

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

H. WILLOTTE

**Études sur l'emploi des percussions dans la théorie du mouvement  
d'un solide plongé dans un solide [suite et fin]**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 4<sup>e</sup> série*, tome 10 (1894), p. 93-115.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1894\\_4\\_10\\_93\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1894_4_10_93_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

---

---

*Études sur l'emploi des percussions dans la théorie  
du mouvement d'un solide plongé dans un solide [suite et fin (1)],*

PAR M. H. WILLOTTE,

Ingénieur des Ponts et Chaussées.

I. *Rappel des notions fondamentales sur les atomes des corps et les forces interatomiques.* — Dans cette troisième Partie de nos études, nous nous proposons de montrer les applications de la théorie contenue dans les deux premières Parties.

On sait que les masses, dites *pondérables*, répandues dans l'Univers exercent les unes sur les autres des actions qui, tant que leurs distances mutuelles restent de grandeur appréciable aux instruments de mesure, peuvent se représenter par des forces *attractives* fonctions desdites distances; c'est en la constatation de ces forces que réside le principe de la *gravitation universelle*.

Si l'on rapproche deux masses pondérables de façon à rendre leur distance aussi petite que possible, on remarque que l'action existant entre ces masses change de sens quand la distance est devenue très voisine de la limite au delà de laquelle on ne peut plus rapprocher davantage les deux masses; l'attraction s'est alors transformée en une *répulsion* qui se manifeste, dans les solides et les liquides, par les effets dits de *résistance à la compression*.

---

(1) Voir le *Journal de Mathématiques*, 4<sup>e</sup> série, t. VII, p. 399, 431, et t. IX, p. 1, 28.

Quand on fait subir à un corps solide ou liquide un effort de compression (en ayant soin, dans le cas du solide, de s'arranger pour que toutes les parties de celui-ci travaillent réellement à la compression), on constate que, quel que soit l'effort, la diminution relative du volume du corps est toujours excessivement faible. Il semble légitime de conclure de là que l'épaisseur du champ d'action des efforts de répulsion autour de chacune des particules pondérables constitutives des corps est excessivement petite par rapport aux dimensions desdites particules. Traçons par la pensée, autour de chacun des centres  $M$  constituant ce que l'on appelle les *particules indivisibles* de la matière pondérable, deux surfaces fermées  $(S)$ ,  $(S')$ , l'une  $(S)$  limitant la portion d'espace dans laquelle les particules voisines de la particule  $M$  ne peuvent pénétrer, quelque grand que soit l'effort qui tend à les rapprocher de  $M$ , l'autre  $(S')$  enveloppant  $(S)$  et formant autour de  $M$  le lieu des points de changement de sens de l'action émanée de  $M$ ; les portions des normales à  $(S)$  comprises entre  $(S)$  et  $(S')$  seront toutes excessivement petites par rapport aux dimensions de  $(S)$ .

Les auteurs qui ont écrit sur ces questions ne sont pas d'accord sur le mode d'organisation des particules indivisibles constitutives de la matière : quelques-uns pensent que ces particules consistent en petits solides indéformables et insécables auxquels on donne le nom d'*atomes*; certains estiment que les plus petites particules de matière pondérable dont l'on puisse étudier les propriétés, autrement dit les atomes chimiques, ne sont pas absolument indivisibles et doivent être considérés comme des amas de grains d'une matière excessivement ténue, l'éther sans doute, liés entre eux dans un même amas par des forces très grandes par rapport aux forces qui agissent entre les différents atomes; d'autres enfin, les plus nombreux peut-être, croient que chaque particule est un simple point géométrique d'où émanent des actions qui, attractives sur les points analogues éloignés, changent de sens pour les points situés à petites distances et, en devenant répulsives, croissent très rapidement de manière à grandir indéfiniment quand les distances diminuent en se rapprochant respectivement de leurs limites minima infranchissables.

Quel que soit celui de ces trois systèmes que l'on adopte, les forces répulsives agissant entre les particules pondérables indivisibles pour-

ront en tout cas être regardées comme ayant des propriétés très voisines des forces de percussion ; car, comme il a déjà été noté page 94 ci-dessus, il résulte des faits de résistance à la compression constatés sur tous les solides et liquides sans exception que l'épaisseur du champ d'action de ces forces répulsives est toujours excessivement petite par rapport aux dimensions des particules et, ainsi que nous l'avons remarqué au commencement de ces études (*Journal de Mathématiques*, 4<sup>e</sup> série, t. VII, p. 399), les forces de percussion constituent précisément des représentations de ce que deviennent à la limite les forces qui grandissent très rapidement dans un champ d'action excessivement petit.

Pour résumer en un mot ce qui précède, nous conviendrons d'appeler *atomes pondérables* les dernières particules indivisibles de la matière pondérable, entendant seulement dire par là que ces particules jouissent de propriétés mécaniques différant peu de celles que posséderaient de petits solides indéformables et sont, par conséquent, susceptibles de donner naissance par leur rapprochement mutuel à des forces dont la nature est voisine de celle des forces de percussion.

D'autre part, tous les faits de la Physique, ceux de l'Optique notamment, tendent à montrer que la résistance infiniment grande que les atomes pondérables opposent à la pénétration par leurs pareils existe également pour leur pénétration par les particules de l'éther. Il paraît par suite légitime de regarder les particules d'éther comme susceptibles, lorsqu'elles se rapprochent des atomes pondérables de la nature, de faire naître entre elles et ces atomes des forces analogues à celles existant entre les atomes pondérables et propres à être représentées, comme eelles-ci, par des forces de percussion. Dans ces conditions, on pourra appliquer la théorie exposée en nos précédentes études à la recherche des relations existant entre l'éther et les atomes pondérables constitutifs des corps.

II. *Conditions d'application de la théorie exposée.* — Rappelons les résultats trouvés. Nous avons établi (*Journal de Mathématiques*, 4<sup>e</sup> série, t. IX, p. 25) que, lorsqu'on considère un solide isolé ayant pour plans de symétrie les plans de ses axes principaux passant par son centre de gravité (tel que, par exemple, un ellipsoïde

homogène) en état de moyen mouvement permanent au sein d'un fluide infiniment divisé, la valeur moyenne de la *force vive totale* à attribuer au solide pour l'équilibre dynamique du système est égale à une quantité *qui ne dépend que de la constitution du fluide*.

Il faut pour cela que (*loc. cit.*, p. 11) aucune cause extérieure ne soit venue agir sur les régions du fluide entourant le solide pour introduire dans ce fluide un mode particulier de distribution des déplacements et des vitesses, cette distribution devant être abandonnée aux lois du hasard. Or, si l'on considère en une région quelconque de l'Univers, par exemple à la surface de la Terre, un volume d'éther contenant un certain nombre de corps pondérables et limité aux dimensions des champs d'action sur lesquels portent ordinairement les expériences de Physique, notamment celles de Thermométrie, on pourra considérer ce volume, toujours très petit par rapport aux dimensions de l'Univers, comme également actionné en toutes ses parties par les forces extérieures émânées de l'ensemble de l'Univers (telles que, par exemple, celles du Soleil); les lois du hasard s'exerceront dans ces conditions dans l'éther enfermé à l'intérieur du volume considéré.

La théorie précédemment exposée s'appliquera donc ainsi aux atomes isolés plongés dans l'éther; son emploi sera rigoureux pour ceux des atomes isolés qui, limités à la surface d'impénétrabilité (S) définie, page 94 ci-dessus, peuvent être considérés individuellement comme assimilables à un ellipsoïde homogène (ou à quelque autre solide à trois plans de symétrie); il sera approximatif, ainsi qu'il a été expliqué (*loc. cit.*, p. 27-28), dans le cas où les atomes auraient des formes différant peu de celles de solides à trois plans de symétrie.

Lorsque les atomes sont juxtaposés, comme cela arrive pour les solides et les liquides, il y a plusieurs cas à distinguer: Si l'on prend un solide cristallisé contenant une, deux ou plusieurs espèces distinctes d'atomes pondérables disposés de telle façon que les plans des axes principaux relatifs au centre de gravité de l'un quelconque d'entre eux soient pour tous des plans de symétrie de distribution de la matière pondérable dans le voisinage de ces plans, la théorie sera rigoureusement applicable [sauf bien entendu pour les atomes (en très petit nombre relatif) qui sont voisins de la surface du cristal]. Si la con-

stitution du cristal ne peut se ramener au type qui vient d'être défini, la théorie ne sera qu'approximative. Reste à examiner le cas où le corps étudié est un solide amorphe ou un liquide. Considérons dans ce cas les trois plans des axes principaux passant par le centre de gravité d'un atome pondérable quelconque (M) du corps considéré; la théorie serait rigoureusement applicable si cet atome était isolé (en supposant, bien entendu, que les trois plans susvisés fussent, pour cet atome, des plans de symétrie); or, comme dans les corps amorphes solides et dans les liquides la matière est distribuée, selon les lois du hasard, suivant toutes les directions de l'espace, on conçoit que les actions exercées sur l'éther qui enveloppe l'atome (M) par les atomes contigus à celui-ci se contrebalancent de telle sorte que la symétrie dans les lois de distribution de l'éther par rapport aux plans principaux de l'atome M qui est requise pour légitimer l'application rigoureuse de la théorie ne soit pas considérablement altérée; la théorie pourra être alors regardée comme approximative.

Bref, on voit que les conditions d'application plus ou moins rigoureuse de la théorie varient suivant les corps de la nature; son degré d'approximation dépend, pour chaque corps, de la disposition relative des atomes constitutifs de celui-ci. Or on sait, d'autre part, que la loi de Dulong et Petit sur les chaleurs spécifiques, dont l'explication, comme on va le voir, constitue la plus importante des conséquences de ladite théorie, ne se vérifie pas avec le même degré d'approximation pour tous les corps de la Nature.

### III. *Loi de Dulong et Petit en ce qui concerne l'énergie actuelle.*

— Ces explications préliminaires données, considérons dans un espace limité (E) rempli d'éther un nombre indéterminé de corps qui pourront être les uns solides ou liquides, les autres gazeux, autrement dit en un état physique quelconque.

D'après la théorie exposée, *la valeur moyenne*

$$\frac{1}{T} \int_0^T (MW^2 + I\omega^2) dt$$

*de la force vive totale contenue dans chaque atome pondérable devra,*

quand l'équilibre dynamique du système sera établi, être égale à une quantité [la quantité  $\frac{3}{2} \frac{\Sigma N m^2 \lambda^3}{\Sigma N m \lambda}$  du second membre de l'équation (37) de la page 429 de notre précédente étude, *Journal de Mathématiques*, 4<sup>e</sup> série, t. VII] qui est la même pour tous les atomes.

Supposons que, sous l'effet d'une cause extérieure quelconque, un foyer de chaleur ou de froid par exemple, la quantité d'énergie accumulée dans l'espace (E) vienne à varier; alors l'équilibre du système sera troublé et, après une période d'agitation plus ou moins longue, un nouvel équilibre se produira. Quand ce nouvel équilibre sera réalisé, la valeur moyenne de la force vive totale contenue dans chaque atome pondérable sera encore la même pour tous. Par conséquent, en désignant, pour simplifier l'écriture, par  $q$  la valeur de cette force vive moyenne dans le premier équilibre et par  $q'$  sa valeur dans le second, la différence algébrique  $q' - q$ , qui représente la quantité de la force vive moyenne gagnée ou perdue par chacun des atomes pondérables placés dans l'espace (E), sera la même pour tous ces atomes.

Si donc, conformément aux idées généralement admises et enseignées, on regarde la chaleur comme mesurée par la quantité de force vive accumulée sous forme d'énergie vibratoire dans les atomes pondérables, on voit que, au degré d'approximation que comporte la théorie ici présentée, la quantité de chaleur nécessaire pour échauffer ou refroidir également un atome pondérable est la même pour tous les atomes pondérables de la Nature.

C'est là, on le sait, l'un des énoncés sous lesquels on présente ordinairement les lois de Dulong et Petit et de Neumann et Regnault sur les chaleurs spécifiques, en tant du moins qu'on ne considère dans la quantité de chaleur fournie à un corps que celle qui est employée à accroître le mouvement vibratoire de ses atomes constitutifs, autrement dit, à augmenter son énergie actuelle.

IV. *Loi de Dulong et Petit pour l'énergie totale.* — Mais il faut approfondir la question. Car, si la loi générale d'équilibre thermique ainsi établie peut, comme on sait, se vérifier directement pour les gaz simples (assimilés à des gaz parfaits) en montrant que le produit du poids atomique de chacun d'eux par sa chaleur spécifique est le même

pour tous, la même preuve expérimentale ne peut s'étendre immédiatement aux corps solides. Pour ces corps, en effet, il n'est pas possible de mesurer séparément l'énergie actuelle, et dans les expériences on obtient seulement la somme des variations de cette énergie et de la quantité qui, sous le nom d'*énergie potentielle*, représente le travail de résistance à l'écartement des forces attractives agissant entre les atomes.

Pour compléter la théorie en ce qui concerne les solides, nous allons en conséquence montrer que, lorsque les distances entre les atomes pondérables d'un solide s'approchent de leurs limites minima (c'est-à-dire quand, par suite d'un refroidissement suffisant, le solide se contracte autant qu'il lui est possible), *le rapport entre l'énergie actuelle et l'énergie potentielle du solide tend vers une limite qui ne dépend que du nombre de points de contact que, dans l'état de contraction maximum du solide, chaque atome a avec ses voisins* <sup>(1)</sup>.

Pour le prouver, considérons en premier lieu, pour fixer les idées, un solide constitué par un assemblage d'atomes sphériques homogènes, tous identiques, placés de telle façon que, dans l'état de contraction maximum du solide, les atomes soient rangés comme les boulets d'une pile à base triangulaire; chaque atome touchera alors douze atomes pareils à lui-même et les centres des atomes formeront les sommets d'un réseau de tétraèdres réguliers juxtaposés. Le solide considéré est d'ailleurs regardé comme ayant des dimensions telles que, si on le coupe par un plan d'orientation quelconque passant par son centre de gravité, le nombre des atomes rencontrés par ce plan soit excessivement grand.

Nous appellerons *directions principales* les quatre directions respectivement parallèles aux quatre hauteurs de l'un quelconque des tétraèdres réguliers, tous parallèles, dont les sommets sont occupés par les centres des atomes, et *directions d'arêtes* les six directions respectivement parallèles aux arêtes de ces mêmes tétraèdres.

---

(1) La propriété qui va être ainsi établie peut être considérée comme correspondant, dans la présente théorie, à ce qu'est le théorème de Clausius sur le viriel (*Introduction à la théorie des explosifs*, par M. E. Sarrau, p. 76) dans la théorie de l'équilibre thermique des corps faite sans l'intervention des percussions.



Lorsque le solide est dans son état de contraction maximum, de telle façon que les atomes restent sans vitesses se touchant par leurs surfaces limitatives, le centre de tout atome peut être considéré comme soumis à douze forces attractives égales et opposées deux à deux, dirigées respectivement suivant les six directions d'arêtes qui se croisent en son centre; appelons  $F$  la valeur commune de l'une quelconque de ces douze forces; la quantité  $F$  a même valeur dans toute l'étendue du solide pour tout atome (sauf, bien entendu, pour les atomes qui sont très voisins de la surface limitative du solide, atomes dont nous ferons abstraction, dans les calculs qui suivent, en raison de leur très petit nombre relatif).

Supposons maintenant que le solide reçoive une quantité infiniment petite d'énergie distribuée également entre tous ses atomes, de façon que les vitesses du mouvement vibratoire produit soient également réparties suivant toutes les directions de l'espace; les atomes s'écartent infiniment peu les uns des autres; un nouvel équilibre se produira; et, par raison de symétrie, cet équilibre sera tel que la valeur moyenne par rapport au temps de l'accroissement infiniment petit  $\epsilon$  de la distance des centres de deux atomes contigus quelconques sera la même dans toute l'étendue du solide. Les forces  $F$  varieront infiniment peu, tant en grandeur qu'en direction (les droites joignant les centres des atomes étant à tout instant infiniment voisines, comme direction et longueur, de ce qu'elles sont dans l'état de contraction maximum).

Coupons le solide par un plan quelconque  $(P)$  perpendiculaire à l'une des directions principales. Ce plan partagera le solide en deux parties  $(\omega)$  et  $(\omega')$ ; on sait, d'après un théorème bien connu, qu'il doit y avoir égalité entre la somme des projections sur la normale à  $(P)$  des impulsions totales, pendant un temps infiniment grand  $T$ , des forces attractives exercées par  $(\omega')$  sur  $(\omega)$  et la somme des percussions que, par suite des rencontres mutuelles des atomes en mouvement, la partie  $(\omega')$  produit sur  $(\omega)$  pendant le même temps  $T$ .

Évaluons ces percussions. Le solide étant infiniment peu déformé, les points sur lesquels se produisent les chocs des atomes sont toujours infiniment rapprochés, sur la surface desdits atomes, des points de contact dans l'état de contraction maximum. Considérons, sur l'un

quelconque des atomes (M) rencontré dans la partie ( $\omega$ ) du solide par le plan (P), le point de contact (dans l'état de contraction maximum) avec l'atome contigu (M') de la partie ( $\omega'$ ); traçons en ce point la normale extérieure à l'atome (M). Si nous appelons  $l$  et  $l'$  les composantes des vitesses des atomes (M) et (M') mesurées suivant cette normale extérieure au moment qui précède infiniment peu une rencontre des deux atomes, la percussion produite sur (M) par cette rencontre sera

$$M(l' - l),$$

M étant la valeur commune des masses des deux atomes égaux (M) et (M').

Désignons maintenant par  $n$  le nombre des atomes de la partie ( $\omega$ ) rencontrés par le plan (P) qui, à une époque  $t$  quelconque, se trouvent avec la composante de vitesse  $l$  en face d'atomes de la partie ( $\omega'$ ) animés de la vitesse  $l'$ . Appelons  $\Sigma \varepsilon$  la somme des écarts <sup>(1)</sup> simultanés relatifs à ces  $n$  atomes, les  $\varepsilon$  étant mesurés par rapport aux directions d'arêtes, lesquelles sont toujours infiniment voisines de celles des normales aux points de rencontre. Si entre deux chocs consécutifs quelconques la projection du mouvement des atomes sur les directions d'arêtes est uniforme (question qui sera examinée, p. 105 ci-après), le nombre des  $n$  atomes susdéfinis qui viendront se heurter pendant l'instant  $dt$  sera

$$n \frac{(l - l') dt}{\frac{\Sigma \varepsilon}{n}},$$

ou encore, en posant  $\Sigma \varepsilon = n \eta$ ,

$$\frac{n(l - l') dt}{\eta};$$

car, pendant le temps  $dt$ , l'écart diminue de la quantité  $(l - l') dt$ , en sorte qu'il y a rencontre, pendant l'instant  $dt$ , entre tous les atomes

---

<sup>(1)</sup> Nous appelons *écart* l'accroissement  $\varepsilon$  de la distance des centres de deux atomes contigus par rapport à ce qu'est cette distance dans l'état de contraction maximum.

pour lesquels l'écart, au commencement de l'instant  $dt$ , est au plus égal à  $(l - l')dt$ .

La somme des percussions produites pendant l'instant  $dt$  entre les  $n$  atomes considérés sera donc

$$\frac{n(l - l')dt}{\eta} M(l' - l) = - \frac{nM(l' - l)^2 dt}{\eta}.$$

La projection de ces percussions sur la direction principale normale au plan (P) sera

$$- \frac{nM(l' - l)^2 dt \cos \alpha}{\eta},$$

$\alpha$  étant l'angle des directions d'arêtes et des directions principales, et la somme de ces projections pendant le temps T pourra, par suite, s'écrire, en développant le carré  $(l' - l)^2$ ,

$$(1) \quad - \frac{nT \cos \alpha}{\eta} \left( \frac{1}{T} \int_0^T M l'^2 dt - \frac{2}{T} \int_0^T M l l' dt + \frac{1}{T} \int_0^T M l^2 dt \right).$$

Mais, quand (ce qui a lieu quand la température du solide est uniforme) l'énergie est également répandue dans toutes les parties du solide, on a, quels que soient les atomes considérés,

$$\frac{1}{T} \int_0^T M l'^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T M l^2 dt \quad \text{et} \quad \frac{1}{T} \int_0^T M l l' dt = 0,$$

cette dernière égalité résultant de ce que, chaque atome ayant son mouvement propre indépendant, les  $l$  sont par là même indépendants des  $l'$ .

L'expression (1) ci-dessus devient donc

$$- \frac{2nT \cos \alpha}{\eta} \frac{1}{T} \int_0^T M l^2 dt.$$

Si l'on désigne maintenant par N le nombre des atomes de la partie ( $\sigma$ ) du solide rencontrés par le plan (P), la somme analogue à (1)

pour l'ensemble de ces  $N$  atomes sera

$$(2) \quad - \frac{3N \cdot 2nT \cos \alpha}{n\eta} \frac{1}{T} \int_0^T M l^2 dt = - \frac{6NT \cos \alpha}{\eta} \frac{1}{T} \int_0^T M l^2 dt,$$

attendu que dans l'état de contraction maximum il y a trois points de contact de chacun des atomes en question de  $(\varpi)$  avec ceux de  $(\varpi')$ .

D'autre part, la somme des projections des impulsions totales sur la normale à  $(P)$  des forces attractives que  $(\varpi')$  exerce sur  $(\varpi)$  sera, pour la même durée de temps  $T$ ,

$$(3) \quad 3NFT \cos \alpha.$$

L'équilibre dynamique du système exige que les deux expressions (2) et (3) soient égales en valeur absolue, c'est-à-dire que

$$(4) \quad \frac{2N}{\eta} \frac{1}{T} \int_0^T M l^2 dt = NF \quad \text{ou} \quad \frac{2}{T} \int_0^T M l^2 dt = F\eta.$$

Or, si l'on se rappelle que, page 101 ci-dessus, on a, par définition,

$$\Sigma \varepsilon = n\eta,$$

on voit que la quantité  $F\eta$  est égale à

$$\frac{1}{n} F \Sigma \varepsilon,$$

c'est-à-dire qu'elle mesure la valeur du travail exercé pour accroître la distance de deux atomes contigus quelconques de la moyenne  $\frac{1}{n} \Sigma \varepsilon$  des écarts.

Ainsi donc l'équation d'équilibre (4) ci-dessus montre qu'à chacun des points de contact d'un atome avec ses voisins dans l'état de contraction maximum correspond, dans l'état d'équilibre dynamique du solide, une quantité d'énergie potentielle  $F\eta$  égale au double de la quantité  $\frac{1}{T} \int_0^T M l^2 dt$ .

Mais, quand, comme c'est ici le cas, les vitesses des atomes sphériques sont à tout instant également réparties suivant toutes les directions de l'espace, la quantité  $\frac{1}{T} \int_0^T M l^2 dt$  est égale au tiers de l'énergie actuelle moyenne  $\frac{1}{T} \int_0^T M W^2 dt$  contenue dans chaque atome sphérique. On a donc

$$(5) \quad F\eta = \frac{2}{3} \frac{1}{T} \int_0^T M W^2 dt.$$

D'autre part, avec la disposition en pile de boulets triangulaire définie page 99 ci-dessus, chaque atome touche douze de ses pareils. Par conséquent, en désignant par A le nombre des atomes du solide, l'énergie potentielle totale accumulée dans le solide sera

$$\frac{12AF\eta}{2},$$

le dénominateur 2 venant ici de ce que, dans la multiplication ainsi faite, chaque atome se trouve compté deux fois.

Or, d'après l'équation (5), on a

$$\frac{12AF\eta}{2} = 6AF\eta = 6A \cdot \frac{2}{3} \frac{1}{T} \int_0^T M W^2 dt = \frac{4A}{T} \int_0^T M W^2 dt.$$

Et comme  $\frac{A}{T} \int_0^T M W^2 dt$  est la quantité totale d'énergie actuelle contenue dans le solide, on voit que la limite du rapport entre l'énergie potentielle du solide et son énergie actuelle est, dans ce cas, égale à 4.

Avec un autre arrangement d'atomes, par exemple avec des atomes distribués suivant les sommets de cubes juxtaposés, de telle façon que chaque atome touche six de ses pareils, la limite du rapport en question serait  $3 \times \frac{2}{3}$ , c'est-à-dire 2.

Mais, en tout cas, ce rapport est indépendant de la masse M des atomes et de l'intensité des forces qui les lient.

Et il résulte de là qu'il suffit de constater (dans les solides de même

structure atomique) l'égalité des variations d'énergie totale de chaque atome correspondant à un changement de température déterminé (égalité dont la loi de Dulong et Petit est précisément l'énoncé) pour en conclure (au degré d'approximation que comportent les considérations ici présentées) l'égalité des variations de l'énergie actuelle qui a par ailleurs été établie théoriquement, page 98 ci-dessus.

L'accord entre les résultats de l'expérience et ceux de la théorie se trouve donc réalisé.

V. *Action de l'éther*. — Le résultat auquel on arrive ainsi suppose, comme il a été remarqué page 101 ci-dessus, que, entre deux chocs consécutifs quelconques, le mouvement d'un quelconque des atomes est uniforme. Cette condition peut être considérée comme remplie lorsqu'on fait abstraction de l'éther puisque alors les forces  $F$  sont à tout instant infiniment voisines de ce qu'elles sont dans l'état de contraction maximum. Mais, quand on tient compte de l'éther, comme on doit le faire, la solution de la question apparaît moins nettement.

On peut, en tout cas, remarquer que l'action de l'éther sur les variations du mouvement des atomes entre les chocs consécutifs de ceux-ci est d'autant moins sensible que ces chocs sont plus fréquents et que, par suite, à égalité de vitesses [et par conséquent de température <sup>(1)</sup>], l'écart moyen  $\eta$  sera moindre; et, d'autre part, la relation (5), page 104, montre que  $\eta$  sera, dans ces conditions, d'autant plus petit que  $F$  sera plus grand. D'où l'on conclut que la théorie ici présentée est d'autant plus près d'être exacte en premier lieu que la température est plus basse (parce qu'alors le rapport entre les énergies potentielle et actuelle est plus près de sa limite), en second lieu, à égalité de température, que les forces  $F$  sont plus intenses, autrement dit, que les solides considérés sont plus rigides.

L'éther intervient par ailleurs pour établir et maintenir à tout in-

---

(<sup>1</sup>) Il résulte immédiatement de la présente théorie que la température d'un corps peut (au degré d'approximation que comporte la théorie) être regardée comme proportionnelle à son énergie totale, conformément aux idées généralement admises. (Voir, par exemple, l'*Introduction à la théorie des explosifs*, de M. E. Sarrau, § 117, p. 76).

stant l'uniformité de température dans toute l'étendue d'un même solide et entre solides distincts pour assurer l'égalité des énergies actuelles de tous les atomes (quantité  $q$  de la page 98 ci-dessus), et par suite déterminer, dans les variations de température, l'égalité pour tous les atomes de la variation de cette quantité  $q$ , conformément à la loi de Dulong et Petit.

VI. *Généralisation.* — Les considérations qui viennent d'être exposées pour le cas du solide à constitution très simple définie page 99 ci-dessus peuvent être généralisées.

Considérons un solide composé d'un nombre quelconque d'atomes de forme quelconque disposés d'une façon quelconque. Prenons dans l'état de contraction maximum deux atomes se touchant mutuellement. La composante  $F$  de la force d'attraction mutuelle de ces deux atomes suivant la normale en leurs points de contact est détruite par une réaction égale provenant de l'impénétrabilité des atomes. Quand le solide, ayant reçu une quantité d'énergie infiniment petite, se trouve infiniment peu sorti de son état de contraction maximum, la réaction qui équilibrait  $F$  n'existe plus puisque les atomes ne sont plus en contact permanent et cette réaction est remplacée par une suite de percussions dont la somme des impulsions pendant l'espace de temps infini  $T$  doit équilibrer celle de  $F$ . Or, en employant les notations des pages 405, 407 et 417 de notre première étude (*Journal de Mathématiques*, 4<sup>e</sup> série, t. VII), la percussion produite par la rencontre de deux atomes est, d'après la dernière des formules (11) de notre page 405,

$$\frac{2(l' - l)}{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}}$$

La somme des percussions pendant le temps  $dt$  pour les rencontres qui se produisent entre les deux atomes considérés est alors égale, d'après ce qui a été expliqué pages 101 et suivantes ci-dessus, à

$$\frac{(l - l') dt}{\tau_1} \times \frac{2(l' - l)}{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}} = - \frac{2(l' - l)^2 dt}{\tau_1 \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'} \right)},$$

et, pendant le temps  $T$ , cette somme devient

$$(6) \quad -2 \frac{T}{\eta \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'} \right)} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T l^2 dt - \frac{2}{T} \int_0^T ll' dt + \frac{1}{T} \int_0^T l'^2 dt \right].$$

Mais, lorsque le mouvement des atomes se fait dans les conditions de nos précédentes études, on a (*Journal de Mathématiques*, 4<sup>e</sup> série, t. IX, p. 26)

$$\frac{1}{T} \int_0^T l^2 dt = \frac{q}{6\mu}, \quad \frac{1}{T} \int_0^T l'^2 dt = \frac{q}{6\mu'},$$

$q$  désignant, comme page 98 ci-dessus, la quantité  $\frac{3}{2} \frac{\sum N m^2 \lambda^3}{\sum N m \lambda}$ , et, par ailleurs, ainsi qu'il a été remarqué page 102 ci-dessus,  $\frac{1}{T} \int_0^T ll' dt = 0$ .

L'expression (6) devient donc

$$-2 \frac{T}{\eta \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'} \right)} \times \frac{q}{6} \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'} \right) = -\frac{qT}{3\eta},$$

et, comme, d'après ce qui a été remarqué page 106 ci-contre, cette expression doit être égale à  $FT$ , on arrive finalement à la relation

$$(7) \quad \frac{q}{3} = \frac{1}{3} \frac{1}{T} \int_0^T (M W^2 + I \omega^2) dt = F \eta,$$

qui n'est autre que la généralisation de l'équation (5) de la page 104 ci-dessus et qui, par suite, permet, comme elle, de rattacher par le raisonnement de la page 105, mais pour le cas d'atomes quelconques, la présente théorie à la loi expérimentale de Dulong et Petit.

VII. *Dilatation des solides.* — Les formules (5), p. 104, et (7) ci-dessus, ont une autre conséquence importante; elles montrent en effet toutes deux que pour un même solide quelconque l'écart moyen  $\eta$  des atomes est proportionnel à la quantité d'énergie accumulée dans le solide, autrement dit à la température. On retrouve donc ainsi la loi expérimentale de la dilatation des solides.



Si, comme cela arrive dans les solides amorphes, les forces  $F$  agissant entre les atomes ont des valeurs égales suivant les diverses directions de l'espace, la dilatation se fera également dans tous les sens et le solide, en s'échauffant, restera semblable à lui-même. Lorsque, comme cela se produit pour les cristaux, les composantes des  $F$  sont plus grandes suivant certaines directions que selon d'autres, les composantes des écarts varient suivant ces directions en raison inverse des valeurs des composantes de  $F$ .

VIII. *Lois fondamentales de l'équilibre des gaz parfaits.* — Après avoir ainsi étudié les principales conditions de l'équilibre thermique des solides, considérons les corps pris à l'autre extrémité de l'échelle des températures, c'est-à-dire les *gaz parfaits*.

Les atomes devant, dans la présente théorie, demeurer constamment à distances excessivement petites de leurs positions moyennes, nous avons à montrer comment cette condition nécessaire permet d'expliquer les propriétés des gaz au moins aussi facilement que le fait la théorie dite *cinétique*, dans laquelle, comme on sait, les atomes sont considérés au contraire comme éprouvant des déplacements d'amplitude considérable.

Prenons un cylindre rigide fermé à une extrémité, ouvert à l'autre et rempli de gaz parfait. Le maintien du gaz dans le cylindre ne serait pas possible dans ces conditions; la moindre perturbation extérieure ferait en effet sortir du cylindre un certain nombre des atomes du gaz, et ces atomes, une fois dehors, ne rentreraient plus. Il faut donc, pour assurer l'équilibre du système, fermer l'extrémité ouverte du cylindre par une paroi solide inébranlable.

Soit  $\Omega$  la surface d'un élément plan quelconque de cette paroi, élément que nous assimilerons d'abord à un plan idéal rigide identique à lui-même en toutes ses parties. Désignons, à un instant quelconque, par  $A$  le nombre d'atomes (de forme quelconque) identiques contenus dans l'unité de volume du gaz et orientés tous de la même façon avec les mêmes valeurs de vitesses en tous leurs points homologues.

Si l'un de ces atomes vient rencontrer l'élément  $\Omega$ , il rebondira sur lui en produisant une percussion égale à  $2\mu l$  (les notations étant les mêmes que p. 106 ci-dessus).

Le nombre de percussions identiques à celle-là qui se produisent sur l'aire  $\Omega$  pendant l'intervalle  $dt$  sera en vertu d'un raisonnement déjà employé plusieurs fois, notamment en notre première étude (*Journal de Mathématiques*, 4<sup>e</sup> série, t. VII, p. 410),

$$A \Omega l dt$$

(nombre des atomes orientés de même façon et ayant les mêmes vitesses contenus dans un cylindre ayant  $\Omega$  pour surface de base et  $l dt$  pour hauteur).

La somme des  $A \Omega l dt$  percussions ainsi produites est

$$2 A \Omega \mu l^2 dt.$$

Le total des percussions subies par l'élément  $\Omega$  pendant l'espace de temps infiniment grand  $T$  est par suite

$$2 \Omega \sum \left( \int_0^T A \mu l^2 dt \right),$$

le signe  $\sum$  portant sur l'ensemble des atomes contenus dans l'unité de volume du gaz.

Mais, quand le gaz est en état d'équilibre, les nombres  $A$  peuvent être considérés comme indépendants du temps. On a donc

$$\sum \left( \int_0^T A \mu l^2 dt \right) = \sum A \times \int_0^T \mu l^2 dt = \frac{1}{6} q T \sum A,$$

$q$  étant la quantité définie et employée p. 98 et 107 ci-dessus.

Si, par suite, on appelle  $P$  l'effort nécessaire pour maintenir en place l'élément  $\Omega$ , on a l'équation d'équilibre

$$(8) \quad \frac{2}{6} q T \Omega \sum A = P T. \quad \text{ou encore} \quad \frac{P}{\Omega} = \frac{1}{3} q \sum A,$$

$\sum A$  désignant le nombre total d'atomes contenus dans l'unité de volume du gaz.

La pression  $\frac{P}{\Omega}$  par unité de surface de la paroi est donc proportionnelle à la quantité  $q$  (c'est-à-dire à la température) et au nombre d'atomes  $\sum A$  contenus dans l'unité du gaz. On retrouve ainsi l'expression bien connue de la pression des gaz donnée par la théorie cinétique.

Mais la formule (8) donne encore un autre résultat. On en tire, en effet

$$\sum A = \frac{3}{q} \frac{P}{\Omega}.$$

Or, la quantité  $q$  étant par sa définition indépendante de la nature du gaz, on voit que cette relation exprime qu'à égalité de température et de pression le nombre total  $\sum A$  d'atomes contenus dans l'unité de volume d'un gaz quelconque est le même pour tous les gaz simples. C'est la loi bien connue d'*Avogadro et d'Ampère*, loi que la théorie cinétique n'explique pas (1) et qui ressort au contraire immédiatement, on le voit, de la théorie ici présentée.

Les considérations qui précèdent supposent (comme le fait la théorie cinétique) que, p. 108 ci-dessus, l'élément  $\Omega$  soit assimilable à un plan idéal parfaitement rigide. En réalité de pareils plans n'existent pas dans la Nature et les parois de fermeture des enceintes sont constituées, comme tous les solides, d'atomes juxtaposés indépendants, en sorte que, pour établir la formule de la pression d'un gaz d'une façon absolument rigoureuse, il faudrait étudier toutes les actions se produisant entre les divers atomes du gaz et ceux des parois qui le contiennent. Mais il est vraisemblable que l'éther accumulé le long de ces parois

(1) Verdet dit seulement à ce sujet : « Pour que dans le choc réciproque les vitesses ne changent pas, c'est-à-dire pour que l'état des deux gaz soit le même avant et après le mélange, il suffira que la force vive moyenne de chaque molécule soit la même pour les deux gaz (*Théorie mécanique de la chaleur*, t. II, p. 10-11) »; d'où il conclut (p. 12) la loi d'Avogadro et Ampère. Il revient sur cette question à peu près dans les mêmes termes aux pages 27 et 28 du même Ouvrage. Ces indications de Verdet, convenablement interprétées et développées, contiennent en germe la théorie exposée dans les présentes études.

forme comme une couche élastique dont l'effet est tel que le mouvement de tout atome du gaz se rapprochant de l'une des parois peut être représenté approximativement par celui que produirait une force de percussion naissant à la rencontre de cet atome et de la paroi. S'il n'en était pas ainsi, la valeur de la pression d'un gaz dépendrait (ce qui n'est pas, l'expérience le montre) de la nature des parois de son enveloppe.

Bref, la théorie ici présentée permet d'expliquer les propriétés des gaz parfaits aussi bien que la théorie cinétique et a en outre les avantages suivants.

1° Par l'emploi des formules établies en nos précédentes études, elle fait intervenir la notion nécessaire de la résistance que l'éther apporte aux déplacements rectilignes des atomes ;

2° Elle explique la loi d'Avogadro et d'Ampère.

Il y a lieu par ailleurs de noter qu'elle s'applique non pas seulement à des atomes sphériques, mais encore aux atomes de formes très variées rentrant dans les catégories définies aux pages 24 à 28 de notre seconde étude (*Journal de Mathématiques*, 4<sup>e</sup> série, t. IX).

Il est à remarquer que la relation (8), établie page 109 ci-dessus, est indépendante de l'amplitude d'oscillation des atomes pondérables, et, par suite, exacte quelque petite que soit cette amplitude.

IX. *Postulatum du principe de Carnot.* — Il est maintenant une question qui vient de suite à l'esprit, c'est de savoir si la théorie présentée permet de rendre compte du postulatum du principe de Carnot, à savoir que le transport de chaleur, sans consommation de travail extérieur, entre corps de températures différentes se fait toujours du corps le plus chaud au corps le plus froid et jamais en sens inverse.

Il serait bien facile de faire voir que les formules données justifient ce postulatum. Mais il y a lieu de remarquer que la question demande à être traitée de plus près. Les formules établies ci-dessus ne sont en effet qu'approximatives comme aussi les lois expérimentales qu'elles représentent. Le postulatum du principe de Carnot énonce au contraire un fait rigoureusement exact.

Or, sans entrer dans aucun détail de calcul, on voit en réfléchissant

aux bases des présentes études que les forces répulsives qui agissent entre l'éther et les atomes pondérables (forces que nous avons assimilées à des percussions) satisfont certainement à la condition que voici : Lorsqu'un atome pondérable se trouve en état d'équilibre dynamique au sein d'une masse d'éther, si, par suite d'une cause accidentelle quelconque, sa force vive totale vient à augmenter, immédiatement les forces répulsives émanées de l'éther agissent pour diminuer la force vive momentanément accrue et la ramener au taux normal; en sens inverse, si la force vive de l'atome tombe au-dessous de ce taux, l'effet desdites forces répulsives est d'accroître la force vive pour la ramener à ce qu'elle doit être. C'est ce que nous avons déjà fait remarquer au commencement de notre première étude (*Journal de Mathématiques*, 4<sup>e</sup> série, t. VII, p. 400).

Quand donc on met en présence des atomes pondérables pris à des températures différentes, l'action de la masse d'éther qui les enveloppe tous consiste à prendre de la force vive aux atomes les plus chauds et à en donner aux atomes les plus froids jusqu'à ce que l'équilibre dynamique de tout le système soit établi. Les transports de chaleur se font bien, par conséquent, dans le sens indiqué par le postulatum du principe de Carnot (1).

Ces considérations peuvent en outre être invoquées pour rattacher la conception de la température résultant de la présente théorie à la définition qu'en a donnée M. Félix Lucas dans sa très intéressante Notice : *La solution du problème des températures* (Gauthier-Villars, 1887).

X. *Loi de Newton sur le refroidissement des solides.* — Nous examinerons une dernière question qui sera de montrer que la théorie présentée est d'accord avec la loi de Newton sur la vitesse du refroidissement des corps.

Si l'on réfléchit à la manière dont ont été établies dans le cours des

---

(1) Voir, à titre de rapprochement, la Note S des *Leçons sur la théorie mécanique de la chaleur* de VERDET, t. I, p. CXXIX. Le postulatum du principe de Carnot s'y trouve expliqué, à peu près de la même façon, au moyen de la considération d'atmosphères jouant un rôle analogue à celui attribué ici à l'éther.

présentes études les conditions de l'équilibre dynamique des atomes pondérables placés dans une atmosphère d'éther, on reconnaît que cet équilibre réside au fond dans le fait d'une série indéfinie de petites oscillations de la force vive de chaque atome, oscillations dans lesquelles cette force vive est tantôt plus grande, tantôt plus petite que sa valeur moyenne, à laquelle l'éther la ramène constamment dès qu'elle s'en écarte un peu.

Cela posé, considérons seulement, pour simplifier, un atome pondérable sphérique et partons de la formule (26) de la page 420 de notre première étude

$$\sum_2 v = \left( -\frac{2}{3} l t \sum N m \lambda^2 - 2 l^2 t \sum N m \lambda + \frac{t}{2 \mu} \sum N m^2 \lambda^3 \right) d\sigma.$$

Faisons la sommation des formules analogues à un même instant pour tous les  $d\sigma$  de la surface de l'atome. Remarquons que, dans le cas des atomes sphériques, les quantités  $\sum N m \lambda^2$ ,  $\sum N m \lambda$  ayant même valeur en tous points de la surface d'un même atome, on a

$$\int l d\sigma = 0, \quad \int l^2 d\sigma = \frac{S}{3} W^2,$$

les notations étant celles définies aux pages 406, 407, 421 et employées page 423 de notre première étude.

Dans ces conditions, si l'on désigne par le symbole  $\underline{\sum} v$  la somme des variations  $v$  obtenues, il vient

$$\underline{\sum} v = -\frac{2 t S W^2}{3} \sum N m \lambda + \frac{t S}{2 M} \sum N m^2 \lambda^3,$$

$\mu$  étant, pour les atomes sphériques, égal à  $M$ .

Cette formule donne l'expression de  $\underline{\sum} v$  pendant le temps  $t$  durant lequel l'atome sphérique, se trouvant d'ailleurs en état d'équilibre dynamique au sein de l'éther, possède une certaine valeur déterminée de vitesse de translation  $W$ .

Quand l'atome n'est pas en état d'équilibre dynamique, ladite formule n'est plus applicable. Mais si l'état de l'atome est voisin de son état d'équilibre dynamique, la véritable formule donnant le  $\underline{\sum} \nu$  sera, par raison de continuité,

$$\underline{\sum} \nu = - \frac{2tSW^2}{3} \sum Nm\lambda + \frac{tS}{2M} \sum Nm^2\lambda^3 + \eta t,$$

$\eta$  étant un petit coefficient qui devient nul lorsque l'atome est en équilibre dynamique et qui, par suite, pour les états voisins de l'équilibre dynamique, aura des valeurs très petites de manière à mettre ces états en continuité avec les états oscillatoires dont la succession, comme il a été remarqué page 113 ci-dessus, constitue l'équilibre dynamique.

On pourra donc, en négligeant le très petit produit  $\eta t$  pour les états voisins de l'équilibre dynamique et remarquant que, si l'espace de temps  $t$  devient infiniment petit et égal à  $dt$ , la variation  $\underline{\sum} \nu$  n'est autre chose que la différentielle  $2MW dW$  de l'énergie de l'atome, écrire

$$(9) \quad MW \frac{dW}{dt} = - \frac{SW^2}{3} \sum Nm\lambda + \frac{S}{4M} \sum Nm^2\lambda^3.$$

Appelons  $MW_0^2$  la valeur moyenne de l'énergie de l'atome dans le cas de l'équilibre dynamique; on a, d'après la formule (29) de la page 423 de notre première étude

$$MW_0^2 = \frac{3}{4} \frac{\sum Nm^2\lambda^3}{\sum Nm\lambda},$$

en sorte que l'équation (9) peut se mettre sous la forme

$$MW \frac{dW}{dt} = \frac{1}{3} (-W^2 + W_0^2) S \sum Nm\lambda = H(W_0^2 - W^2),$$

en posant  $\frac{1}{3} S \sum Nm\lambda = H$ , et elle donne par intégration

$$M(W^2 - W_0^2) = Ce^{-\frac{2Ht}{M}},$$

C désignant une constante.

La loi de la variation  $M(W^2 - W_0^2)$  de la quantité d'énergie calorifique accumulée dans les atomes pondérables en fonction du temps  $t$  est donc bien la même que celle exprimée par la formule de Newton sur le refroidissement des solides à basse température.

XI. *Résumé.* — En résumé, la théorie qui vient d'être présentée rend compte de :

- 1° La loi de Dulong et Petit sur les chaleurs spécifiques pour les solides à basse température;
- 2° La loi de la dilatation des solides à basse température;
- 3° Les lois de la pression dans les gaz parfaits;
- 4° La loi d'Avogadro et Ampère dans les gaz parfaits;
- 5° Le postulatum du principe de Carnot;
- 6° La loi de Newton sur le refroidissement des solides à basse température.

