JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. WILLOTTE

Études sur l'emploi des percussions dans la théorie du mouvement d'un solide plongé dans un fluide (suite)

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 9 (1893), p. 5-28.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1893_4_9__5_0>

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Études sur l'emploi des percussions dans la théorie du mouvement d'un solide plongé dans un fluide [suite (¹)],

PAR M. H. WILLOTTE,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

1. *Objet du présent travail. Équations fondamentales.* — Nous nous proposons, dans cette seconde Partie de nos études, de rechercher dans quelles conditions les lois établies en notre première Partie (¹) pour un fluide à points indépendants peuvent être étendues au cas où le fluide serait composé de points liés entre eux et au solide immergé par des forces à actions continues dépendant d'un potentiel.

Pour élucider la question, nous supposerons d'abord qu'aucune percussion ne se produise entre le solide et les points du fluide; nous établirons dans cette hypothèse les lois des petits mouvements du système qui laissent les différentes parties de ce système dans des po-

(¹) Voir le *Journal de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. VII, p. 399-431.

sitions constamment très voisines de leurs situations d'équilibre stable, de telle façon que le système reste en état de moyen mouvement permanent; nous examinerons ensuite quel est l'effet des percussions possibles.

Soit, en suivant la marche exposée par M. Resal pour l'étude des petits mouvements, pages 258 et suivantes du Tome I de son *Traité de Mécanique générale*,

$$(1) \qquad \sum\left[m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)\right] = \delta\varphi$$

l'équation différentielle des mouvements du système, le $\sum$ du premier membre portant sur tous les points constitutifs du système et $\delta\varphi$ désignant la différentielle totale du potentiel de ce système.

Cherchons l'expression des liaisons.

Pour cela, prenons trois axes fixes Ox, Oy, Oz [les axes auxquels se rapporte l'équation (1)] coïncidant respectivement avec les positions des trois axes d'inertie principaux du solide passant par le centre de gravité G de celui-ci lorsque tout le système est immobile dans sa position d'équilibre stable. Marquons dans le solide deux points P, P' situés respectivement, à l'unité de distance du point G, sur les axes principaux d'inertie qui, dans la position d'équilibre stable du système, coïncident avec les axes Ox, Oy (de telle sorte que $GP = GP' = 1$), et appelons à une époque quelconque t du mouvement :

x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point G par rapport aux axes fixes Ox, Oy, Oz;

$x_0 + \sqrt{1 - y_1^2 - z_1^2}$, $y_0 + y_1$, $z_0 + z_1$ les coordonnées du point P;

$x_0 + x_2$, $y_0 + \sqrt{1 - x_2^2 - z_2^2}$, $z_0 + z_2$ les coordonnées du point P' par rapport à ces mêmes axes.

Conformément aux règles usitées dans la théorie des petits mouvements, nous négligerons les puissances d'ordres supérieurs au premier et les produits des quantités toujours très petites x_0, y_0, z_0, y_1, z_1, x_2, z_2.

La relation qui exprime la perpendicularité des deux droites GP, GP' sera alors

$$x_2 + y_1 = 0,$$

et les neuf cosinus directeurs du trièdre des axes principaux d'inertie du solide par rapport aux axes fixes Ox, Oy, Oz auront pour expressions

$$\begin{array}{cccl} 1 & -y_1 & -z_1 & \text{(cosinus des angles faits avec } Ox\text{)},\\ y_1 & 1 & -z_2 & \text{(cosinus des angles faits avec } Oy\text{)},\\ z_1 & z_2 & 1 & \text{(cosinus des angles faits avec } Oz\text{)}. \end{array}$$

Si l'on considère dans le solide un point quelconque, dont on désigne par a, b, c les coordonnées par rapport au trièdre des axes principaux d'inertie du solide, on aura pour valeurs, à une époque quelconque, des coordonnées x, y, z de ce point par rapport aux axes fixes Ox, Oy, Oz

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} x &= x_0 + a - by_1 - cz_1,\\ y &= y_0 + ay_1 + b - cz_2,\\ z &= z_0 + az_1 + bz_2 + c. \end{aligned}\right.$$

On en conclut, en désignant par $\underline{\sum}$ la partie de la somme du premier membre de l'équation (1) qui est relative aux points du solide,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\underline{\sum}\left[m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)\right]\\ &= \underline{\sum}\left[\quad m\left(\frac{d^2x_0}{dt^2} - b\frac{d^2y_1}{dt^2} - c\frac{d^2z_1}{dt^2}\right)(\delta x_0 - b\,\delta y_1 - c\,\delta z_1)\right.\\ &\qquad + m\left(\frac{d^2y_0}{dt^2} + a\frac{d^2y_1}{dt^2} - c\frac{d^2z_2}{dt^2}\right)(\delta y_0 + a\,\delta y_1 - c\,\delta z_2)\\ &\qquad \left. + m\left(\frac{d^2z_0}{dt^2} + a\frac{d^2z_1}{dt^2} + b\frac{d^2z_2}{dt^2}\right)(\delta z_0 + a\,\delta z_1 + b\,\delta z_2)\right]\\ &= M\left(\frac{d^2x_0}{dt^2}\delta x_0 + \frac{d^2y_0}{dt^2}\delta y_0 + \frac{d^2z_0}{dt^2}\delta z_0\right)\\ &\quad + A\frac{d^2z_2}{dt^2}\delta z_2 + B\frac{d^2z_1}{dt^2}\delta z_1 + C\frac{d^2y_1}{dt^2}\delta y_1, \end{aligned}\right.$$

M étant la masse totale du solide, A, B, C ses moments d'inertie par rapport à ses trois axes principaux passant par son centre de gravité, axes par rapport auxquels on a pour l'ensemble du solide

$$\sum ma = \sum mb = \sum mc = 0$$

et

$$\sum mbc = \sum mac = \sum mab = 0.$$

En remplaçant, dans le premier membre de l'équation (1), page 6 ci-dessus, la partie de la somme $\sum$ relative au solide par son expression écrite en les deux dernières lignes de la relation (3), on se trouve avoir tenu compte dans ce premier membre de toutes les liaisons du système.

Occupons-nous maintenant d'introduire l'effet des liaisons dans le second membre de la même équation (1).

La différentielle $\delta\varphi$ peut, à toute époque, se mettre sous la forme

$$\delta\varphi = \sum\left(\frac{d\varphi}{dx}\delta x + \frac{d\varphi}{dy}\delta y + \frac{d\varphi}{dz}\delta z\right),$$

les dérivées partielles $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}$, dérivées qui sont des fonctions de toutes les coordonnées de tous les points du système, étant calculées avec les valeurs que possèdent ces coordonnées à l'époque considérée et le signe $\sum$ enfermant tous les points du système.

Les valeurs des déplacements de tous les points du système étant constamment très petites, on néglige, comme il a déjà été indiqué page 6 ci-dessus, les puissances d'ordres supérieurs au premier et les produits de ces déplacements, en sorte que, en remarquant que lorsque tous les points du système sont dans leurs positions d'équilibre stable les valeurs des dérivées $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}$ (composantes de la force agissant sur le point x, y, z) sont toutes nulles, il vient, d'après la formule de Taylor,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \sum(\alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta), \\ \frac{d\varphi}{dy} &= \sum(\alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta), \\ \frac{d\varphi}{dz} &= \sum(\alpha_3\xi + \beta_3\eta + \gamma_3\zeta), \end{aligned}\right.$$

ξ, η, ζ étant les composantes parallèles aux axes fixes Ox, Oy, Oz du déplacement de l'un quelconque des points du système, les α, β, γ désignant des constantes et le signe $\sum$ enfermant tous les points du système.

Or, si l'on considère un point quelconque (a, b, c) du solide, les expressions des composantes : $x-a$, $y-b$, $z-c$ du déplacement de ce point seront d'après les formules (2) de la page 7 ci-dessus

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} x-a &= x_0 - by_1 - cz_1,\\ y-b &= y_0 + ay_1 - cz_2,\\ z-c &= z_0 + az_1 + bz_2.\end{aligned}\right.$$

Par conséquent, en substituant dans les relations (4) à celles des valeurs de ξ, η, ζ qui appartiennent à des points du solide les expressions (5), on voit finalement que les dérivées $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ sont des formes linéaires des deux catégories de variables que voici :

1° Les six coordonnées x_0, y_0, z_0, y_1, z_1, z_2 des points G, P, P' du solide;

2° Les composantes ξ, η, ζ des déplacements de tous les points du système qui ne font pas partie du solide (autrement dit de tous les points du fluide).

Ce sont également ces deux catégories de variables qui figurent dans les formes différentielles δx, δy, δz au second membre de l'équation (1), puisque, pour tous les points du solide, on a, d'après les formules (2),

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta x_0 - b\,\delta y_1 - c\,\delta z_1,\\ \delta y &= \delta y_0 + a\,\delta y_1 - c\,\delta z_2,\\ \delta z &= \delta z_0 + a\,\delta z_1 + b\,\delta z_2.\end{aligned}$$

En définitive, l'étude du mouvement du système constitué par le fluide considéré et le solide qui y est immergé se trouve, on le voit, ramenée à l'étude d'un système sans liaisons, comprenant les deux catégories de deux variables indépendantes ci-dessus définies.

Si $\prod$ désigne le nombre total des points constitutifs du fluide ($\prod$ pouvant être aussi grand qu'on le voudra), le nombre total de variables à considérer sera $6+3\prod$. Posons, pour simplifier l'écriture,

$$6+3\prod = \mathrm{K}.$$

Les équations sous forme finie du mouvement d'un tel système sont connues.

En désignant par k l'une quelconque des K variables du système, on a

$$k=\sum r\sin\sqrt{\rho}(t+\varepsilon), \tag{6}$$

ρ étant l'une quelconque des racines d'une équation de degré K dont toutes les racines doivent être réelles, positives et inégales (sans quoi, comme on sait, le maintien du moyen mouvement permanent du système animé de petits mouvements serait impossible),

le signe $\sum$ de l'expression (6) comprenant pour chaque variable un nombre K de termes de la forme indiquée,

r et ε étant des constantes.

Les K fonctions circulaires $\sin\sqrt{\rho}(t+\varepsilon)$, qui figurent dans chacune des K expressions (6) nécessaires pour représenter les K variables, sont les mêmes dans ces K expressions, en sorte que le système des K expressions (6) ne contient que K fonctions circulaires distinctes.

Les K constantes ε sont arbitraires.

Les constantes r ont des valeurs différentes dans chacune des K expressions intégrales (6). Il y a donc en tout K^2 constantes r; mais, sur ces K^2 constantes, il n'y en a que K qui soient arbitraires, les $\mathrm{K}(\mathrm{K}-1)$ autres s'exprimant linéairement en fonction de ces K arbitraires.

Il y a, en résumé, dans le système des K intégrales (6) 2K constantes arbitraires, savoir : 1° les K constantes ε; 2° K des constantes r.

Ces 2K constantes arbitraires se déterminent en écrivant qu'à une époque t_0 quelconque les K composantes de déplacements k et les K dérivées $\frac{dk}{dt}$ de ces composantes ont des valeurs particulières choisies arbitrairement (valeurs qui doivent naturellement être prises très petites, mais dont certaines peuvent être infiniment grandes par rapport aux autres).

II. *Distribution des déplacements et des vitesses dans le fluide.* — D'après ce qui vient d'être dit, les composantes k, $\frac{dk}{dt}$ et, par suite, les grandeurs et les directions des déplacements et des vitesses de tous les points du système peuvent, à une certaine époque quelconque t_0, être choisies arbitrairement.

Il résulte de là que, lorsqu'on prend un système, comme celui ici considéré, formé d'un solide M plongé dans un fluide composé d'un nombre excessivement grand $\prod$ de points m, si par ailleurs aucune cause extérieure n'est venue agir sur ledit système pour lui imposer un mode particulier de distribution des déplacements et des vitesses, la distribution des grandeurs et des directions des déplacements et des vitesses des $\prod$ points m du fluide à l'époque t_0 doit être considérée comme uniquement régie par les lois du hasard.

Et cette distribution au hasard qui existe à l'époque t_0 se maintient à toute époque dans la suite des temps.

Si, en effet, on se reporte à l'expression générale (p. 10 ci-dessus) des K variables du système

$$k = \sum r \sin\sqrt{\rho}(t+\varepsilon), \tag{6}$$

on voit que l'on a

$$\frac{dk}{dt} = \sum r\sqrt{\rho}\cos\sqrt{\rho}(t+\varepsilon),$$

$$\frac{d^2k}{dt^2} = -\sum r\rho \sin\sqrt{\rho}(t+\varepsilon),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et, par suite, que les dérivées successives en t des quantités k sont égales à des sommes de produits des quantités r par des fonctions circulaires

$$\sqrt{\rho}\cos\sqrt{\rho}(t+\varepsilon), \quad -\rho\sin\sqrt{\rho}(t+\varepsilon), \quad \ldots,$$

qui sont les mêmes pour tous les points du système.

Si donc les valeurs des k et, par suite, des r sont distribuées suivant les lois du hasard à l'époque t_0, les valeurs à la même époque t_0 des dérivées successives en t de ces quantités k jouiront de la même propriété qui, par suite, se conservera à toute époque pour les valeurs de k et de leurs dérivées en t.

Par conséquent, les propriétés fondamentales dont, en notre première étude (*Journal de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. VII, p. 409), nous avons reconnu l'existence à toute époque dans le fluide à points indépendants, existent également dans le fluide présentement considéré. La seule différence qu'il y ait entre les deux cas est que, dans le fluide dont nous nous occupons maintenant, le nombre N de points m animés simultanément d'une même valeur de vitesse λ compris dans l'unité de volume du fluide (*loc. cit.*, p. 410), constant à toute époque en chaque région, varie d'une région à l'autre en proportion du nombre de points m compris en chaque région du fluide lorsque ces points sont à l'état de repos dans leurs positions d'équilibre stable.

Le nombre N étant variable d'une région à une autre du fluide, il importe d'indiquer comment on peut le définir en chaque région. Pour y arriver, il faut procéder comme l'on fait généralement en Mécanique et en Physique pour définir la densité en chaque point d'un fluide qui n'est pas homogène : si l'on considère dans le fluide un espace limité (E) quelconque, le nombre $\mathfrak{N}$ de points animés d'une même valeur de vitesse λ contenus dans cet espace (E) a naturellement une valeur bien déterminée. Le nombre N sera, par définition, la limite du rapport $\frac{\mathfrak{N}}{\text{volume de (E)}}$ lorsque l'on fait décroître indéfiniment les dimensions et, par suite, le volume de l'espace (E).

Cette définition exige que, quelque petit que soit (E), le nombre de points m qui y est contenu soit infiniment grand. Mais on arrivera toujours à réaliser cette condition en attribuant au fluide considéré un état de division infini, état que, nous l'avons dit au commencement de ces études (*loc. cit.*, p. 400), nous supposons toujours réalisé (comme on le fait d'ailleurs en toute question de Physique et de Mécanique où il est utile de définir la densité en chaque point d'un fluide non homogène).

III. *Raisons d'être de la considération des percussions.* — Nous avons jusqu'ici, dans l'étude du mouvement du système considéré, fait complètement abstraction des percussions possibles.

Or il y a lieu maintenant de prendre en considération ces percussions; des rencontres entre les points m du fluide et la surface du solide M peuvent, en effet, se produire, quelque petits que soient d'ailleurs les déplacements des points m; il suffit pour cela que, dans la position d'équilibre stable du système, certains de ces points m soient très rapprochés de la surface du solide M.

Il est vrai que le cas d'un système comprenant des points m suffisamment rapprochés de la surface du solide M pour qu'au moindre ébranlement du système certains de ces points viennent choquer le solide peut *a priori* sembler assez exceptionnel; mais il ne faut pas perdre de vue ce que nous avons dit au commencement de notre précédente étude (p. 399), à savoir que nous considérons les forces de percussion comme des représentations de « ce que deviennent, dans l'hypothèse limite d'une vitesse d'accroissement infinie, les forces répulsives de la nature ». A ce point de vue, lorsque nous disons que dans un déplacement très petit, aussi petit que l'on voudra, d'un point m voisin de la surface limitative du solide M, ce point m vient heurter le solide, nous entendons seulement exprimer que ce point m, en se déplaçant, se meut dans la zone d'action des forces répulsives à petites distances émanées du centre matériel dont le solide M est la représentation mécanique. Et alors on conçoit que le fait de l'existence de rencontres entre les points m du fluide et le solide M doive être regardé non plus comme exceptionnel, mais, au contraire, comme très général, et que les conséquences tirées de la considération de ces rencontres soient susceptibles d'être employées très utilement dans l'explication théorique des lois naturelles, ce que nous nous proposons de montrer, en effet, dans la suite des présentes études.

Nous allons, en conséquence, analyser le rôle des percussions dans le système étudié.

IV. *Marche à suivre pour tenir compte des percussions successivement produites.* — Si l'on considère à une époque quelconque t le système formé par le fluide et le solide M qui y est immergé, les mouvements des différentes parties de ce système s'effectuent à partir de l'époque t, conformément aux lois étudiées ci-dessus, jusqu'à ce qu'un choc se produise entre l'un des points m du fluide et le solide.

Que va-t-il se passer quand un choc aura lieu? Pendant la durée infiniment petite du choc, les grandeurs des diverses composantes des déplacements des différents points du système resteront toutes invariables. Les composantes des vitesses de ces points se maintiendront également sans changements, à l'exception toutefois de celles qui appartiennent aux parties du système venues en contact mutuel dans le choc.

Nous savons qu'en employant les notations définies en notre précédente étude la percussion ϖ produite dans la rencontre du point m et du solide M est donnée (*voir* notre précédente étude, p. 408) par la formule

$$\varpi = \frac{2m(\lambda\cos\varphi - l)}{1 + \frac{m}{M} + \frac{m}{\mathfrak{M}}}.$$

La composante $\lambda\cos\varphi$ de la vitesse du point m suivant la normale en l'élément choqué du solide devient, après le choc,

$$\lambda\cos\varphi - \frac{\varpi}{m} = \lambda\cos\varphi - \frac{2(\lambda\cos\varphi - l)}{1 + \frac{m}{M} + \frac{m}{\mathfrak{M}}}; \tag{8}$$

quant à la composante de la vitesse de ce même point m suivant le plan tangent à l'élément choqué du solide, elle demeure invariable.

D'autre part, les relations (1) et (2) des pages 401 et 402 de notre précédente étude donnent pour les variations des composantes des vitesses du solide

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &u-u_0=\frac{\varpi\cos\alpha}{M}, && v-v_0=\frac{\varpi\cos\beta}{M}, && w-w_0=\frac{\varpi\cos\gamma}{M},\\ &n-n_0=\frac{h\varpi}{A}, && p-p_0=\frac{i\varpi}{B}, && q-q_0=\frac{j\varpi}{C}.\end{aligned}\right.$$

Ayant par la formule (8) ci-dessus la variation de la vitesse du point choquant m, on pourra par un calcul facile déterminer les variations des composantes de vitesses de ce point m suivant les axes fixes Ox, Oy, Oz définis page 6 ci-dessus.

Par ailleurs, connaissant par les relations (9) les variations des composantes u, v, w, n, p, q des vitesses du solide, on arrivera, à l'aide d'expressions aisées à construire, à évaluer les variations des composantes de vitesses suivant les mêmes axes fixes Ox, Oy, Oz des trois points G, P, P′ définis page 6 ci-dessus et par elles ensuite les variations des dérivées $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz_0}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dz_1}{dt}$, $\frac{dz_2}{dt}$ des variables x_0, y_0, z_0, y_1, z_1, z_2.

On a alors tout ce qu'il faut pour tenir compte de l'influence du choc considéré sur le mouvement du système. Prenons, en effet, l'expression générale des composantes des déplacements des points du système

$$(6)\qquad k=\sum r\sin\sqrt{\rho}(t+\varepsilon).$$

Considérons cette expression à l'instant qui suit immédiatement un choc et désignons par r_0 et ε_0 les valeurs qu'avaient dans cette même expression les paramètres r et ε à l'instant qui précède ce même choc.

Les K composantes des déplacements du système restant toutes invariables pendant la durée du choc, on peut, en exprimant cette propriété, écrire K relations de la forme

$$(10)\qquad \sum r\sin\sqrt{\rho}(t+\varepsilon)=\sum r_0\sin\sqrt{\rho}(t+\varepsilon_0).$$

D'autre part, pour les $\frac{K-3-6}{3}$ points du fluide qui n'interviennent pas dans le choc, les composantes des vitesses demeurent également invariables pendant la durée du choc, circonstance qui permet d'écrire $K-3-6$ relations de la forme

$$(11)\qquad \sum r\sqrt{\rho}\cos\sqrt{\rho}(t+\varepsilon)=\sum r_0\sqrt{\rho}\cos\sqrt{\rho}(t+\varepsilon_0).$$

On a donc ainsi formé $2K-9$ relations entre les $2K$ paramètres r et ε dont il s'agit de déterminer les valeurs après le choc en fonction des valeurs r_0 et ε_0 de ces paramètres avant le choc; et il reste pour achever la définition de ces $2K$ paramètres à trouver neuf équations.

Or ces neuf équations complémentaires nécessaires s'obtiennent immédiatement en écrivant que les composantes suivant les axes de la vitesse du point choquant m d'une part, les quantités $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz_0}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dz_1}{dt}$, $\frac{dz_2}{dt}$ relatives au solide choqué d'autre part éprouvent par l'effet du choc les variations que nous avons appris à calculer page 15 ci-dessus.

Les $2K$ paramètres r et ε des expressions (6) se trouvent donc ainsi déterminés après le choc et par eux le mouvement de tous les points du système est défini jusqu'au choc suivant, choc pour lequel on peut opérer de nouveau comme il vient d'être indiqué; en sorte que, en continuant ainsi, on arrive à suivre indéfiniment le mouvement du système.

V. *Étude des effets des percussions sur l'état intérieur du fluide.* — Il nous faut maintenant étudier les effets des percussions produites sur l'état intérieur du fluide.

Pour cela, prenons l'expression (8), p. 14 ci-dessus, de la valeur après le choc de la composante suivant la normale en l'élément choqué de la vitesse du point choquant

$$\lambda\cos\varphi-\frac{2(\lambda\cos\varphi-l)}{1+\frac{m}{M}+\frac{m}{\mathfrak{M}}}.$$

En posant, comme nous l'avons fait en la page 417 de notre précédente étude, $\frac{1}{M} + \frac{1}{\mathfrak{M}} = \frac{1}{\mu}$, on peut écrire ladite expression sous la forme

$$(8\ bis)\qquad \frac{-\lambda\cos\varphi + \frac{m}{\mu}\lambda\cos\varphi + 2l}{1 + \frac{m}{\mu}}.$$

Si le solide était immobile (auquel cas la composante l de la vitesse de l'élément choqué serait nulle) et possédait une masse infinie $\left(\text{de telle façon que le rapport } \frac{m}{\mu} \text{ fût rigoureusement nul}\right)$, l'expression en question se réduirait à $-\lambda\cos\varphi$. Alors l'effet des rencontres des points m et de la surface du solide serait sans influence sur l'état moyen du fluide en chaque région de celui-ci : les points m venant rencontrer successivement la surface du solide rebondiraient sur cette surface en faisant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence et tout se passerait comme si l'espace occupé par le solide était rempli par une masse de fluide dont la constitution et l'état mécanique seraient en continuité avec la constitution et l'état du fluide extérieur au solide.

Mais le solide est en mouvement et le rapport $\frac{m}{\mu}$, tout en étant infiniment petit (*voir* notre précédente étude, p. 407) n'est pas rigoureusement nul.

L'expression (8 *bis*) montre que, pour tenir compte de ces particularités, il faut ajouter au terme $-\lambda\cos\varphi$, qui représenterait la valeur de la composante de vitesse après le choc dans le cas du solide immobile, des termes qui sont au plus des ordres de grandeur $\frac{m}{\mu}\lambda$ et l.

D'autre part, les expressions (6), p. 10, des composantes du mouvement du système sont linéaires par rapport aux paramètres $r\cos\sqrt{\rho}\,\varepsilon$, $r\sin\sqrt{\rho}\,\varepsilon$ qui y apparaissent lorsqu'on développe leurs fonctions circulaires. On peut donc, en calculant les valeurs de ces paramètres après un choc, déterminer séparément : 1° la partie de chacun desdits paramètres correspondant au changement par lequel la composante de vitesse $\lambda\cos\varphi$ devient $-\lambda\cos\varphi$; 2° la partie complémentaire de chacun de ces mêmes paramètres relative à la modification qu'il faut faire subir à la composante $-\lambda\cos\varphi$ pour la transformer en l'expression (8 *bis*).

Si l'on appelle d'une part r_1, ε_1, d'autre part r_2, ε_2 les valeurs de r et de ε correspondant respectivement au premier et au second de ces deux changements, l'expression

$$(6)\qquad k=\sum r\sin\sqrt{\rho}\,(t+\varepsilon),$$

calculée après le choc, peut s'écrire

$$(6\ bis)\qquad k=\sum r_1\sin\sqrt{\rho}\,(t+\varepsilon_1)+\sum r_2\sin\sqrt{\rho}\,(t+\varepsilon_2).$$

Le terme $\sum r_1\sin\sqrt{\rho}\,(t+\varepsilon_1)$ de cette expression (6 *bis*) est tel que, d'après ce qui a été expliqué page 17 ci-dessus, s'il existait seul, les percussions ne produiraient aucune perturbation dans l'état moyen du fluide en chaque région; il n'y a donc pas lieu de s'en occuper davantage.

Reste à examiner l'influence du terme $\sum r_2\sin\sqrt{\rho}\,(t+\varepsilon_2)$ de cette même expression (6 *bis*).

Or, pour déterminer les $2K$ paramètres r_2 et ε_2 qui figurent dans ce terme, nous avons d'abord à écrire $2K-9$ relations (K pour les composantes de déplacements, $K-9$ pour les composantes de vitesses) de l'une ou l'autre des formes

$$(12)\qquad \sum r_2\sin\sqrt{\rho}\,(t+\varepsilon_2)=0,\qquad \sum r_2\sqrt{\rho}\cos\sqrt{\rho}\,(t+\varepsilon_2)=0;$$

ces $2K-9$ relations exprimant que les termes correctifs à ajouter aux expressions des K composantes des déplacements du système, pour tenir compte de l'effet du mouvement du solide M au moment d'un choc, ont des valeurs initiales nulles et qu'il en est de même des termes correctifs analogues relatifs aux $K-9$ composantes de vitesses des $\frac{K-9}{3}$ points m qui n'interviennent pas dans le choc.

Puis, pour compléter la détermination des $2K$ paramètres r_2 et ε_2, nous devons considérer 9 relations de la forme

$$(13) \qquad \sum r_2 \sqrt{\rho} \cos \sqrt{\rho}\,(t + \varepsilon_2) = \eta l + \theta \frac{m}{\mu} \lambda,$$

dans lesquelles l'expression $\eta l + \theta \frac{m}{\mu} \lambda$ désigne une quantité qui est au plus des ordres de grandeur de la vitesse l et du produit $\frac{m}{\mu} \lambda$. Ces 9 relations sont relatives aux variations des composantes de vitesses du point choquant d'une part, du solide d'une autre.

En rapprochant les $2K - 9$ relations (12) et les 9 relations (13), on forme un système de $2K$ relations propres à déterminer les $2K$ paramètres r_2 et ε_2, et l'on voit de suite, par l'examen du tableau constitué par ce système, que les paramètres r_2 seront de l'ordre de grandeur du second membre des relations (13), c'est-à-dire des ordres de grandeur des quantités l et $\frac{m}{\mu} \lambda$.

Par ailleurs, l'expression $\sum r_2 \sin \sqrt{\rho}\,(t + \varepsilon_2)$ est une somme de fonctions circulaires et, comme ses termes constitutifs, étant indépendants les uns des autres, sont les uns d'un signe, les autres d'un autre, son ordre de grandeur est le même que celui des paramètres r_2.

Chacun des chocs qui se produit entre les divers points m du fluide et le solide détermine l'adjonction aux expressions des composantes de chacun des divers points m du fluide d'une expression corrective de la forme $\sum r_2 \sin \sqrt{\rho}\,(t + \varepsilon_2)$ indiquée ci-dessus, aussi bien pour ceux des points m qui n'interviennent pas dans le choc que pour celui qui produit le choc.

Ces expressions correctives sont toutes constituées par des sommes de fonctions circulaires qui, nous venons de le dire, sont des ordres de grandeur des paramètres r_2 et, par suite, des quantités l et $\frac{m}{\mu} \lambda$. De plus, toute expression corrective appartenant à un point, qui n'intervient pas dans le choc auquel elle doit sa naissance, a une valeur initiale nulle, en sorte qu'elle a, à une époque quelconque, autant de chances d'avoir le signe $+$ que le signe $-$.

Il en résulte que pour tout point du fluide, comme les expressions correctives qui naissent pour ce point, en dehors du moment où il intervient dans un choc, sont, dans un fluide infiniment divisé, infiniment plus nombreuses que celles qui se produisent dans les chocs déterminés par le point, la somme algébrique des expressions correctives ajoutées successivement aux expressions des composantes du mouvement dudit point a, à une époque quelconque, des chances respectives d'avoir le signe + ou le signe −, dont la différence est infiniment petite par rapport à leurs valeurs.

Et, d'après cela, pour tenir compte, dans l'étude des chocs produits entre le solide M et les points m du fluide, des altérations que ces chocs produisent dans l'état du fluide, il faut ajouter aux expressions des composantes du mouvement des points m dans le fluide non altéré des expressions correctives qui sont au plus des ordres de grandeur des quantités l, $\frac{m}{\mu}\lambda$ et dont le signe est (en négligeant des quantités relatives infiniment petites) aussi souvent + que −.

Nous pouvons donc, pour la sommation des effets de ces chocs sur chaque élément $d\sigma$ de la surface du solide, partir de l'expression (24) de la page 416 de notre précédente étude,

$$-\frac{2m(\lambda\cos\varphi - l)^2}{1+\frac{m}{\mu}}\left(l + \frac{m}{\mu}\,\frac{\lambda\cos\varphi - l}{1+\frac{m}{\mu}}\right)\mathrm{N}\,l\sin\varphi\,d\varphi \times d\sigma,$$

en y ajoutant à la quantité $\lambda\cos\varphi$ un terme correctif de la forme $\eta_1 l + \theta_1\frac{m}{\mu}\lambda$, η_1, θ_1 étant des coefficients de grandeur finie dont le signe est aussi souvent + que −.

Si alors, développant les calculs, on supprime finalement, comme il a été fait en la page 420 de notre précédente étude, tous les termes qui sont d'un ordre de petitesse supérieur à ceux des produits $l^2\lambda$, $\frac{m}{\mu}\lambda^3$, on est conduit, pour représenter la somme $\sum_1 \varphi$, à une expression qui ne diffère de celle

$$\sum_1 \varphi = -2m\mathrm{N}\left(\frac{l\lambda^2}{3} + l^2\lambda - \frac{m}{\mu}\,\frac{\lambda^3}{4}\right) t\,d\sigma,$$

établie sous le n° (25 *bis*) en ladite page 420, que par un terme correctif de la forme $\eta_2 l^2 \lambda$ (1), η_2 étant un coefficient dont le signe est aussi souvent $+$ que $-$.

Mais ensuite lorsque, continuant la série d'opérations indiquées aux pages 420 et 421 de notre précédente étude, on fait la sommation par rapport au temps t des expressions (25 *bis*), complétées par les termes correctifs en $\eta_2 l^2 \lambda$, pendant un espace de temps T infiniment grand pour diviser ensuite par T le résultat obtenu, les valeurs des sommes des termes correctifs en $\eta_2 l^2 \lambda$ à signes variables sont nécessairement finies, quelque grand que soit T, et, par conséquent, leurs quotients par T seront infiniment petits pour $T = \infty$.

Les termes correctifs disparaissent ainsi du résultat final, en sorte qu'il n'y a pas lieu de s'en occuper davantage.

VI. *Conséquence de la non-homogénéité du fluide.* — Il reste à examiner une particularité importante qui différencie le cas du fluide à actions continues intérieures ici considéré du cas simple traité dans notre précédente étude.

Quand le fluide est à points indépendants, quand de plus, ce qui est le cas de notre précédente étude, aucune force continue ne s'exerce entre le solide M et les points m constitutifs du fluide, les valeurs des nombres N (nombre de points m animés d'une même valeur de vitesse λ compris en chaque région dans l'unité de volume du fluide) restent les mêmes dans toute l'étendue du fluide et particulier tout le long de la surface du solide.

Il n'en est plus de même dans le cas actuellement examiné du fluide à actions continues intérieures. Les nombres N, constants à toute époque en chaque région du fluide, changent de valeurs d'une région à l'autre du fluide et, par suite, ne sont pas, en général, égaux entre eux dans toute l'étendue de la zone du fluide placée en contact avec la surface du solide.

Il en résulte que l'on ne peut plus, comme nous l'avons fait en la

(1) On voit, en effet, immédiatement par le détail des calculs que cette expression ne contient pas de termes correctifs en $l\lambda^2$, ni non plus en $\frac{m}{\mu}\lambda^3$.

page 421 de notre précédente étude, mettre la somme $\sum \mathrm{N} m\lambda^2$ en facteur commun dans le premier terme du second membre de la relation (27) de ladite page 421, et montrer ainsi, en s'appuyant sur la formule $\int l\,d\sigma = 0$, que ce premier terme est nul. Que faire alors?

Pour élucider la question, prenons l'expression de l donnée par la formule (22) de la page 416 de notre précédente étude,

$$l = u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma + hn + ip + jq;$$

on en conclut

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} l\,dt \times \sum \mathrm{N} m\lambda^2\right) d\sigma \\ &\quad = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} u\,dt \times \sum \mathrm{N} m\lambda^2 \cos\alpha\, d\sigma \\ &\qquad + \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} v\,dt \times \sum \mathrm{N} m\lambda^2 \cos\beta\, d\sigma + \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} w\,dt \times \sum \mathrm{N} m\lambda^2 \cos\gamma\, d\sigma \\ &\qquad + \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} n\,dt \times \sum \mathrm{N} m\lambda^2 h\, d\sigma \\ &\qquad + \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} p\,dt \times \sum \mathrm{N} m\lambda^2 i\, d\sigma + \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} q\,dt \times \sum \mathrm{N} m\lambda^2 j\, d\sigma. \end{aligned}\right.$$

Dans cette relation (14), le premier $\sum$ du premier membre comprend tous les $d\sigma$ de la surface du solide; le second $\sum$ de ce même membre porte sur toutes les valeurs de λ existant en chacune des régions du fluide placées respectivement en contact avec chacun des $d\sigma$. Les $\sum$ du second membre représentent des sommations doubles portant à la fois sur tous les $d\sigma$ du solide et sur tous les λ correspondant dans le fluide à chacun de ces $d\sigma$.

Quelles sont les conditions auxquelles doit satisfaire l'expression constituant le second membre de la relation (14) ainsi formée pour que ladite expression et par suite le premier membre de cette relation soient identiquement nuls ou tout au moins aient une limite nulle pour $T = \infty$?

Comme les valeurs simultanées des différentes composantes de vitesses u, v, w, n, p, q du solide sont évidemment indépendantes les unes des autres, pour que le second membre de la relation (14) ait une limite nulle, il est nécessaire que les six termes de ce second membre aient séparément des limites nulles.

Prenons le premier desdits termes : $\frac{1}{T}\int_0^T u\,dt \times \sum N m \lambda^2 \cos\alpha\, d\sigma$.

Pour que ce terme soit identiquement nul ou tout au moins ait une limite nulle pour $T = \infty$, il faut que l'on ait

$$(15) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \text{ou bien} & \frac{1}{T}\int_0^T u\,dt = 0, \\ \text{ou bien} & \sum N m \lambda^2 \cos\alpha\, d\sigma = 0. \end{array} \right.$$

Mais, en appliquant aux variations de la composante u la marche indiquée au § XII, page 430 de notre précédente étude, on trouve par un calcul facile que la condition nécessaire et suffisante pour que la quantité $\frac{1}{T}\int_0^T u\,dt$ ait une limite nulle est que la somme

$$\sum N m \lambda^2 \cos\alpha\, d\sigma$$

soit égale à zéro. L'alternative (15) équivaut donc en tout cas à la condition $\sum N m \lambda^2 \cos\alpha\, d\sigma = 0$.

En répétant sur les cinq autres termes du second membre de la relation (14) ce que l'on vient de dire au sujet du premier, on trouve que finalement les six conditions nécessaires et suffisantes pour que le premier membre de ladite relation (14) ait une limite nulle pour $T = \infty$ sont

$$(16) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \sum N m \lambda^2 \cos\alpha\, d\sigma = 0, & \sum N m \lambda^2 \cos\beta\, d\sigma = 0, & \sum N m \lambda^2 \cos\gamma\, d\sigma = 0, \\ \sum N m \lambda^2 h\, d\sigma = 0, & \sum N m \lambda^2 i\, d\sigma = 0, & \sum N m \lambda^2 j\, d\sigma = 0. \end{array} \right.$$

VII. *Examen de deux cas particuliers (notamment du cas des solides qui ont pour plans de symétrie les plans de leurs axes principaux passant par leurs centres de gravité).* — Les conditions (16) sont compatibles avec le maintien de la condition de distribution suivant les lois du hasard des valeurs des composantes des vitesses λ dans les différentes régions du fluide, indiquée page 12 ci-dessus, quand on a

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{lll} \sum \mathrm{N}m\cos\alpha\, d\sigma = 0, & \sum \mathrm{N}m\cos\beta\, d\sigma = 0, & \sum \mathrm{N}m\cos\gamma\, d\sigma = 0, \\ \sum \mathrm{N}mh\, d\sigma = 0, & \sum \mathrm{N}mi\, d\sigma = 0, & \sum \mathrm{N}mj\, d\sigma = 0. \end{array}\right.$$

Car, quand les vitesses λ sont réparties suivant les lois du hasard dans toute l'étendue du fluide, la somme $\sum \mathrm{N}m\lambda^2$ est, en chaque région, égale au produit $\Lambda\sum \mathrm{N}m$ d'une quantité Λ, qui a la même valeur dans toute l'étendue du fluide, par la somme $\sum \mathrm{N}m$ (masse de l'unité de volume en chaque région).

Les conditions (17) sont notamment satisfaites dans deux cas :

1° Quelle que soit la forme du solide M, si la loi de distribution des forces du système est telle que les nombres N soient constants, non pas nécessairement dans toute l'étendue du fluide, mais tout au moins dans la zone du fluide qui est en contact avec la surface du solide.

2° Quelle que soit la loi de distribution des forces du système lorsque le système admet comme plans de symétrie les faces du trièdre ayant pour arêtes les axes d'inertie principaux du solide M passant par son centre de gravité (comme cela arrive, par exemple, quand le solide M est un ellipsoïde homogène); dans ce cas, en effet, les sommes formant les premiers membres des relations (17) sont toutes nulles, comme composées d'éléments égaux et de signes contraires se détruisant deux à deux.

Dans ces deux cas, on pourra répéter les raisonnements des pages 423 et suivantes de notre précédente étude, et remarquant que, pareillement à ce qui a été dit ci-dessus pour la somme $\sum \mathrm{N}m\lambda^2$, on a

$$\sum \mathrm{N}m\lambda = \Lambda_1 \sum \mathrm{N}m, \qquad \sum \mathrm{N}m^2\lambda^3 = \Lambda_2 \sum \mathrm{N}m\,(^1)$$

et, par suite,

$$\frac{\Sigma\,\mathrm{N}m^2\lambda^3}{\Sigma\,\mathrm{N}m\lambda} = \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1},$$

Λ_1, Λ_2 étant des quantités constantes dans toute l'étendue du fluide, on arrivera aux équations (34) et (35) de la page 429 de notre précédente étude et par elles aux deux théorèmes que voici :

La valeur moyenne de la force vive totale d'un solide invariable en état de moyen mouvement permanent au sein d'un fluide infiniment divisé, dont les points sont liés entre eux et au solide par des forces dépendant d'un potentiel, est égale, quelles que soient les dimensions *et la* masse *du solide, à une quantité qui ne dépend que de la constitution du fluide.*

La force vive moyenne de translation du solide est égale à sa force vive moyenne de rotation.

VIII. *Cas général.* — Passons au cas général.

Les équations (17) ne sont plus alors ordinairement satisfaites et, par conséquent, il n'est plus possible de regarder les équations nécessaires (16) comme compatibles avec le fait de l'égale distribution des λ dans les diverses régions du fluide.

Qu'arrive-t-il alors?

Pour élucider la question, nous commencerons par mettre en évidence une importante propriété du mouvement du système qui a lieu quand, comme dans les cas examinés au paragraphe précédent, les conditions (17) de la page 24 ci-dessus étant vérifiées, les équations (34), (35) de notre première étude sont applicables.

---

(1) Cette relation suppose que tous les points m consécutifs du fluide aient même valeur de masse ou tout au moins que la composition du fluide en points m de masses différentes calculée pour chaque région soit constante dans toute l'étendue de la couche de ce fluide placée en contact avec le solide.

Prenons la relation (27) de la page 421 de ladite étude et divisons-en les deux membres par T; il viendra

$$\frac{1}{T}\sum_{s}\varphi=\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{T}\int_0^T l\,dt\times\sum \mathrm{N}m\lambda^2-\frac{2}{T}\int_0^T l^2\,dt\times\sum \mathrm{N}m\lambda+\frac{1}{2\mu}\sum \mathrm{N}m^2\lambda^3\right)d\sigma.$$

Examinons les termes enfermés dans la parenthèse du second membre de cette relation.

Le premier de ces termes est nul, parce que l'on a alors, ainsi qu'il a été indiqué en la page 431 de notre première étude, pour tout élément $d\sigma$ de la surface du solide, $\frac{1}{T}\int_0^T l\,dt = 0$.

D'autre part, d'après l'expression de l, reproduite page 22 ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T l^2\,dt = {} & \cos^2\alpha\times\frac{1}{T}\int_0^T u^2\,dt\\ &+\cos^2\beta\times\frac{1}{T}\int_0^T v^2\,dt+\cos^2\gamma\times\frac{1}{T}\int_0^T w^2\,dt\\ &+h^2\times\frac{1}{T}\int_0^T n^2\,dt+i^2\times\frac{1}{T}\int_0^T p^2\,dt+j^2\times\frac{1}{T}\int_0^T q^2\,dt\\ &+2\cos\alpha\cos\beta\times\frac{1}{T}\int_0^T uv\,dt\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

et, par suite, en tenant compte des équations (34), (35) susvisées,

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T l^2\,dt &=\left(\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}{\mathrm{M}}+\frac{h^2}{\mathrm{A}}+\frac{i^2}{\mathrm{B}}+\frac{j^2}{\mathrm{C}}\right)\times\frac{1}{4}\frac{\Sigma \mathrm{N}m^2\lambda^3}{\Sigma \mathrm{N}m\lambda}\\ &=\frac{1}{4\mu}\frac{\Sigma \mathrm{N}m^2\lambda^3}{\Sigma \mathrm{N}m\lambda},\end{aligned}$$

puisque par ailleurs la quantité μ est définie (p. 417 et 405 de notre précédente étude) par les égalités

$$\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\mathrm{M}}+\frac{1}{\mathfrak{M}},\qquad \frac{1}{\mathfrak{M}}=\frac{h^2}{\mathrm{A}}+\frac{i^2}{\mathrm{B}}+\frac{j^2}{\mathrm{C}}.$$

On a donc, dans ces conditions, en tout $d\varpi$ de la surface du solide

$$(18)\quad \frac{1}{T}\sum_{2}\varphi = \left(-\frac{1}{2\mu}\frac{\Sigma N m^2\lambda^2}{\Sigma N m\lambda}\times\sum N m\lambda + \frac{1}{2\mu}\sum N m^2\lambda^2\right)d\varpi = 0.$$

Or, comme la variation φ de force vive éprouvée par le solide dans chaque choc est égale et de signe contraire à celle que subit le point choquant m du fluide, il résulte de l'équation (18) ainsi établie que la moyenne des variations de force vive dans chacune des régions du fluide qui sont respectivement en contact avec chacun des éléments $d\varpi$ de la surface du solide est nulle, en sorte que le maintien du moyen mouvement permanent se trouve ainsi indéfiniment assuré en chaque région isolée du fluide.

Dans le cas général, les conditions (17) de la page 24 ci-dessus et, par suite, les équations (34), (35) de notre précédente étude n'étant pas ordinairement satisfaites, l'équilibre dynamique du système ne peut se réaliser aussi simplement et il faut que des déplacements de force vive se produisent dans le fluide le long de lignes tracées sur la surface du solide, *avec prédominance dans des sens déterminés*, de façon que les régions du fluide, pour lesquelles la quantité $\frac{1}{T}\sum_{2}\varphi$ a une valeur négative, cèdent de la force vive à celles pour lesquelles cette même quantité a une valeur positive. Ces déplacements de force vive avec prédominance de sens n'existent pas dans le cas, examiné au paragraphe précédent, des solides ayant pour plans de symétrie les plans des axes principaux de leurs centres de gravité, puisque, comme il vient d'être établi, la quantité $\frac{1}{T}\sum_{2}\varphi$ y est nulle en toute région du fluide. On conçoit donc que si, prenant un solide M quelconque, on imagine une série de solides tels que chaque solide soit infiniment peu différent de ceux qui l'avoisinent dans la série et que, en outre, la série parte du solide M pour aboutir à un solide à trois plans de symétrie, les formules qui donneront les conditions de l'état de moyen mouvement permanent pour chacun des solides de la série (plongé isolément dans un fluide) varieront d'une façon continue, les déplacements de force vive avec prédominance de sens prenant de moins en moins d'importance à mesure que partant du solide M on se rapproche de plus en plus du solide à plans de symétrie. Et, si le solide M est peu différent d'un solide à plans de symétrie, on pourra considérer les formules relatives à ce dernier comme représentant approximativement le mouvement du solide M ; en sorte que les théorèmes établis, page 25 ci-dessus, pour les solides à plans de symétrie, seront d'autant plus près d'être applicables à un solide M quelconque que ce solide différera moins d'un solide à plans de symétrie (quelle que soit d'ailleurs l'expression analytique de la surface limitative de celui-ci).