JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LUCIEN LÉVY

Sur les systèmes triplement orthogonaux où les surfaces d'une même famille sont égales entre elles

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 8 (1892), p. 351-383.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1892_4_8__351_0>

Sur les systèmes triplement orthogonaux où les surfaces d'une même famille sont égales entre elles;

PAR M. LUCIEN LÉVY.

La recherche des systèmes triplement orthogonaux a été ramenée, par M. Maurice Lévy, à l'intégration de l'équation du troisième ordre

$$A\frac{\partial^3 H}{\partial x^3} + B\frac{\partial^3 H}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^3 H}{\partial y^3} = 0. \tag{1}$$

Les lettres ont la signification suivante : si $\varphi(x, y, z, u) = 0$ est l'équation de la surface et si l'on désigne, suivant l'usage, par p, q, r, s, t les dérivées partielles du premier et du second ordre de z par rapport à x,

$$\begin{aligned} A &= (1+q^2)s - pqt,\\ B &= (1+p^2)t - (1+q^2)r,\\ C &= \qquad pqr - (1+p^2)s. \end{aligned}$$

Lorsque u varie, la surface engendre une des trois familles du système triplement orthogonal, ou, pour parler plus brièvement, une *famille de Lamé*. Soit dn l'élément de normale comprise entre deux surfaces qui correspondent aux valeurs u et $u + du$ du paramètre, la fonction H est définie par l'égalité

$$H = \frac{dn}{du},$$

et, comme dn dépend des dérivées du premier ordre, l'équation (1) est bien du troisième ordre. L'intérêt de cette équation consiste dans la condensation énorme des termes qui contiennent une des trois variables.

M. Darboux, dans un Mémoire publié en 1878 dans les *Annales de l'École Normale*, a mis cette équation sous une forme avantageuse dans certains cas, en supposant la surface rapportée, non plus à des axes fixes, mais à des axes entraînés avec elle. Si l'on appelle a, b, c les composantes de la translation, α, β, γ celles de la rotation du mouvement d'entraînement, et si l'on pose

$$k = \frac{\partial z}{\partial u} + c - ap - bq + \alpha(y + qz) - \beta(x + pz) + \gamma(py - qx).$$

la fonction H, qui figure dans l'équation (1), encore exacte en supposant les axes mobiles, devient

$$\mathrm{H} = \frac{k}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Soit alors

$$\Delta(\mu) = \mathrm{A}\frac{d^2}{dx^2}\frac{\mu}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \mathrm{B}\frac{d^2}{dx\,dy}\frac{\mu}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \mathrm{C}\frac{d^2}{dy^2}\frac{\mu}{\sqrt{1+p^2+q^2}};$$

l'équation (1) s'écrit avec les nouveaux axes

$$\Delta(k) = 0,$$

ou, en développant, comme a, b, c, α, β, γ ne dépendent que de u,

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Delta\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + c\Delta(1) - a\Delta(p) - b\Delta(q) \\ &\qquad + \alpha\Delta(y + qz) - \beta\Delta(x + pz) + \gamma\Delta(py - qx) = 0. \end{aligned} \right.$$

Si la surface conserve une forme invariable, z sera indépendant de u, et toute solution de l'équation (2) donnera, ainsi que M. Darboux l'a fait observer, une surface de forme invariable, qui, par un mouvement convenablement réglé, engendrera une famille de Lamé. On peut se proposer de rechercher des surfaces jouissant de cette propriété. Voici, à cet égard, ce qui a été déjà fait. Dans le Mémoire déjà cité, M. Darboux montre que, si une surface satisfait à la condition indiquée pour un seul mouvement, ce mouvement est hélicoïdal et il indique des hélicoïdes comme solutions. D'autre part, j'ai montré (*Bulletin des Sciences mathématiques*, mars 1891) que les sphères et les plans sont les seules surfaces réelles de forme invariable qui engendrent une famille de Lamé, quelque déplacement qu'on leur imprime; et même ce sont les seules, réelles ou imaginaires, si, comme il va de soi, le système triplement orthogonal doit être composé de trois familles *distinctes*. Enfin, le 22 juin 1891, M. Petot a fait connaître, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, un très intéressant théorème sur les surfaces susceptibles d'engendrer par translation une famille de Lamé, et il en a déduit des conséquences que j'avais énoncées de mon côté à la Société mathématique et à la Société philomathique. M. Petot annonce à la fin de sa Note qu'il possède les surfaces dont la représentation sphérique se compose d'ellipses homofocales ou de cercles pour les deux familles; mais, à ma connaissance, il n'a rien publié sur ce sujet. D'ailleurs, je n'ai pas eu à utiliser son théorème, la méthode que j'ai suivie dans mes recherches étant tout à fait différente.

Dans le présent Mémoire, je donnerai un certain nombre de surfaces qui, par translation, peuvent engendrer une famille de Lamé, et je ferai connaître quelques propriétés de ces surfaces. Pour simplifier les calculs, je supposerai la translation parallèle à l'axe des z, ce qui entraîne

$$a = 0, \qquad b = 0, \qquad \alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0,$$

et l'équation (2) se réduit à la suivante

$$\Delta(1) = 0, \tag{3}$$

c'est-à-dire

$$A \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + B \frac{d^2}{dx\,dy} \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + C \frac{d^2}{dy^2} \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0.$$

Telle est l'équation qu'il s'agit d'intégrer : une des difficultés du calcul consiste dans la formation des coefficients A, B, C. Si donc on peut les connaître d'avance, on aura triomphé d'un gros obstacle. Or les lignes de courbure d'une surface quelconque se projetant, sur le plan des xy, suivant des lignes qui ont pour équation différentielle

$$C\,dx^2 - B\,dx\,dy + A\,dy^2 = 0, \tag{1}$$

un premier procédé de recherche consistera donc à essayer des surfaces pour lesquelles cette équation se forme aisément. Par exemple, les lignes de courbure des surfaces de révolution, autour de Oz, ont pour équation

$$xy\,dx^2 + (y^2 - x^2)\,dx\,dy - xy\,dy^2 = 0.$$

On pourra donc prendre, en supprimant un facteur commun à A, B, C,

$$A = -xy,$$
$$B = x^2 - y^2,$$
$$C = xy.$$

Or soit

$$z = \varphi(x^2 + y^2) = \varphi(\rho)$$

l'équation d'une pareille surface : on aura

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = 2x\varphi'(\rho), \qquad q = 2y\varphi'(\rho),$$

en désignant par des accents les dérivées des fonctions d'une variable,

$$H = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+4\rho\varphi'(\rho)}} = f(\rho),$$
$$\frac{\partial H}{\partial x} = 2xf'(\rho), \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = 2yf'(\rho),$$
$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 2f'(\rho) + 4x^2f''(\rho),$$
$$\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y} = 4xyf''(\rho),$$
$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 2f'(\rho) + 4y^2f''(\rho).$$

Donc l'équation (3) est identiquement vérifiée et les surfaces de révolution en sont une solution. C'était d'ailleurs une solution évidente : car faisons glisser dans son plan une section méridienne le long de l'axe de révolution et considérons les trajectoires orthogonales de cette section; ces trajectoires se déduisent toutes de l'une d'entre elles, sauf l'axe des z, par une translation parallèle à Oz. Faisons tourner toute la figure autourde Oz : nous aurons deux familles de surfaces de révolution, de forme invariable dans une même famille, et orthogonales entre elles. Le système triplement orthogonal est complété par les plans méridiens : ce système est bien connu.

Le succès de la vérification précédente a tenu à ce que z et H s'exprimaient en fonction d'une seule variable, en d'autres termes, H était fonction de z. Il est facile de voir que la vérification réussit même si H est fonction arbitraire de z. La propriété géométrique des nouvelles surfaces consiste en ce que tout plan perpendiculaire à Oz les coupe sous un angle constant : ce sont donc des surfaces à lignes de courbure planes situées dans des plans parallèles que nous allons trouver.

Soit

$$H = f(z).$$

Il s'ensuit

$$\frac{\partial H}{\partial x} = pf'(z), \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = qf'(z),$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = p^2 f'' + rf', \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = pqf'' + sf', \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = q^2 f'' + tf',$$

$$\Delta(1) = (Ap^2 + Bpq + Cq^2)f'' + (Ar + Bs + Ct)f'.$$

Or on sait que, dans toute surface

$$Ar + Bs + Ct = 0,$$

l'équation (3) se réduit donc à la suivante, en supprimant le facteur f'' qui ne donne que des cylindres,

$$Ap^2 + Bpq + Cq^2 = 0$$

ou

$$(5) \qquad (p^2 - q^2)s - pqr + pqt = 0,$$

ce qui est bien l'équation différentielle des surfaces-moulures de Monge (*Analyse appliquée à la Géométrie*, 1re édition, n° 23).

L'intégrale générale de cette équation s'obtient en éliminant φ entre les deux équations

$$(6)\qquad \begin{cases} F(z) = x\cos\varphi + y\sin\varphi + G(\varphi), \\ \, 0 = -x\sin\varphi + y\cos\varphi + G'(\varphi), \end{cases}$$

dont la seconde est la dérivée de la première par rapport à φ. Ces équations contiennent deux fonctions arbitraires, F et G.

Il est à remarquer que les surfaces que nous venons d'obtenir ne font pas partie de systèmes triplement orthogonaux nouveaux : on sait, en effet, que les deux familles de surfaces engendrées par les lignes d'un réseau plan orthogonal lorsque le plan roule sur une surface développable quelconque forment, avec la famille que constituent les différentes positions du plan, un système triplement orthogonal. Si, en particulier, on suppose le réseau plan obtenu par la translation d'une courbe et par les trajectoires orthogonales et qu'on fasse rouler le plan sur un cylindre, on aura le système précédemment trouvé.

Je vais profiter des deux fonctions arbitraires de la solution pour assujettir les surfaces trouvées à décrire une famille de Lamé par un mouvement de rotation autour de Oz. En composant ce mouvement avec une translation parallèle à Oz, on aura un mouvement plus général dans lequel la surface engendrera une famille de Lamé. La surface est déterminée par les équations (6) : il s'agit de former les quantités p, q, r, s, t et H. J'aurai pour cela besoin de calculer $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$; je désignerai, pour abréger l'écriture, par F, F′, F″, F‴ la fonction $F(z)$ et ses dérivées par rapport à z, par G, G′, G″, G‴ la fonction $G(\varphi)$ et ses dérivées par rapport à φ.

La première équation (6) donne, par différentiation et en tenant compte de la seconde

$$F'\,dz = \cos\varphi\,dx + \sin\varphi\,dy,$$

d'où

$$p = \frac{\cos\varphi}{F'}, \qquad q = \frac{\sin\varphi}{F'}$$

et

$$py - qx = \frac{y\cos\varphi - x\sin\varphi}{F'} = -\frac{G'}{F'},$$

$$p^2 + q^2 = \frac{1}{F'^2}, \qquad H = \frac{qx - py}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{G'}{1+F'^2}.$$

La seconde équation (6) donne ensuite

$$0 = -\sin\varphi\, dx + \cos\varphi\, dy + (G'' - x\cos\varphi - y\sin\varphi)\, d\varphi$$

ou, en tenant compte de la première,

$$0 = -\sin\varphi\, dx + \cos\varphi\, dy + (G'' + G - F)\, d\varphi.$$

Posons

$$P = G'' + G - F,$$

nous aurons

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\sin\varphi}{P}, \qquad \frac{d\varphi}{dy} = -\frac{\cos\varphi}{P};$$

par suite,

$$r = \frac{dp}{dx} = -\frac{\sin^2\varphi\, F'^2 + \cos^2\varphi\, F''P}{PF'^3} = -\frac{F'^2 - \cos^2\varphi(F'^2 - F''P)}{PF'^3},$$

$$s = \frac{dp}{dy} = \sin\varphi\cos\varphi\,\frac{F'^2 - F''P}{PF'^3},$$

$$t = \frac{dq}{dy} = -\frac{\cos^2\varphi\, F'^2 + \sin^2\varphi\, F''P}{PF'_3} = -\frac{F'^2 - \sin^2\varphi(F'^2 - F''P)}{PF'^3}.$$

L'équation

$$\Delta(qx - py) = 0$$

est ici

$$A\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right) + B\,\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

parce que, la surface étant une surface-moulure de Monge, on a

$$A + C = 0.$$

Calcul de A :

$$A = (1+q^2)s - pqt,$$

$$A = \frac{F'^2+\sin^2\varphi}{F'^2}\sin\varphi\cos\varphi\,\frac{F'^2-F''P}{PF'^2} + \sin\varphi\cos\varphi\,\frac{1}{F'^2}\,\frac{F'^2-\sin^2\varphi(F'^2-F''P)}{PF'^2},$$

$$A = \sin\varphi\cos\varphi\,\frac{F'^2-F''P+1}{PF'^2}.$$

Je poserai

$$m = \frac{F'^2-F''P+1}{PF'^2},$$

d'où

$$A = m\sin\varphi\cos\varphi.$$

Calcul de B :

$$B = (1+p^2)t - (1+q^2)r,$$

$$B = -\frac{F'^2+\cos^2\varphi}{F'^2}\,\frac{F'^2-\sin^2\varphi(F'^2-F''P)}{PF'^2}$$

$$+\frac{F'^2+\sin^2\varphi}{F'^2}\,\frac{F'^2-\cos^2\varphi(F'^2-F''P)}{PF'^2},$$

$$B = -\cos 2\varphi\,\frac{F'^2-F''P+1}{PF'^2},$$

$$B = -m\cos 2\varphi.$$

Remarque. — Ces valeurs si simples auraient pu être obtenues en observant que les équations

$$\begin{aligned} x\cos\varphi + y\sin\varphi + G(\varphi) - F(h) &= 0,\\ -x\sin\varphi + y\cos\varphi + G'(\varphi) \qquad\quad &= 0 \end{aligned}$$

représentent les projections sur xOy des tangentes à deux lignes de courbure. L'équation différentielle de ces lignes est donc

$$\sin\varphi\cos\varphi\,dx^2 - (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,dx\,dy - \sin\varphi\cos\varphi = 0;$$

on retrouve ainsi les valeurs de A, B, C.

Calcul de $\frac{\partial H}{\partial x}$. — On a

$$H = \frac{G'}{\sqrt{1+F'^2}},$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{G''\sin\varphi}{P\sqrt{1+F'^2}} - \frac{G'F''\cos\varphi}{(1+F'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\sin\varphi G''(1+F'^2) - PG'F''\cos\varphi}{P(1+F'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Calcul de $\frac{\partial H}{\partial y}$:

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{G''\cos\varphi}{P\sqrt{1+F'^2}} - \frac{G'F''\sin\varphi}{(1+F'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{G''(1+F'^2)\cos\varphi + PG'F''\sin\varphi}{P(1+F'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Calcul de $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$. — Posons

$$L = G''(1+F'^2)\sin\varphi - PG'F''\cos\varphi,$$

$$N = P\,(1+F'^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Il en résulte

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{N\frac{\partial L}{\partial x} - L\frac{\partial N}{\partial x}}{N^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} = {} & G'''(1+F'^2)\frac{\sin^2\varphi}{P} + F''G''\sin\varphi\cos\varphi + G''(1+F'^2)\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{P} \\ & - \frac{(G''+G')G'F''\cos\varphi\sin\varphi}{P} + G'F''\cos^2\varphi + G'F''\sin^2\varphi - PG'F'''\frac{\cos^2\varphi}{F'},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial x} & = \frac{G'+G''}{P}(1+F'^2)^{\frac{3}{2}}\sin\varphi - (1+F'^2)^{\frac{3}{2}}\cos\varphi + 3PF''(1+F'^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi \\ & = (1+F'^2)^{\frac{1}{2}}\left[(G'+G'')(1+F'^2)\frac{\sin\varphi}{P} - (1+F'^2)\cos\varphi + 3PF''\cos\varphi\right],\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{N\dfrac{\partial L}{\partial x}-L\dfrac{\partial N}{\partial x}}{(1+F'^2)^{\frac12}} = (1+F'^2)\Big[&G'''(1+F'^2)\sin^2\varphi+PF''G''\sin\varphi\cos\varphi+G''(1+F'^2)\sin\varphi\cos\varphi\\
&-(G'''+G')G'F''\sin\varphi\cos\varphi+PG'F''\cos^2\varphi+PG'F''\sin^2\varphi\\
&-P^2G'F'''\frac{\cos^2\varphi}{F'}-(G'+G''')G''(1+F'^2)\frac{\sin^2\varphi}{P}\\
&+(G'+G''')G'F''\sin\varphi\cos\varphi\\
&+G''(1+F'^2)\sin\varphi\cos\varphi-PG'F''\cos^2\varphi-3PF''G''\sin\varphi\cos\varphi\Big|\\
&+3P^2G'F''^2\cos^2\varphi,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{N\dfrac{\partial L}{\partial x}-L\dfrac{\partial N}{\partial x}}{(1+F'^2)^{\frac12}} &= (1+F'^2)\\
&\times\Big\{[2G''(1+F'^2)-2PF''G'']\sin\varphi\cos\varphi\\
&\quad+\Big[G'''(1+F'^2)+PG'F''-\frac{(G'+G''')G''(1+F'^2)}{P}\Big|\sin^2\varphi-\frac{P^2G'F'''}{F'}\cos^2\varphi\Big\}\\
&+3P^2G'F''^2\cos^2\varphi,
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}=P^{-2}(1+F'^2)^{-\frac32}\,\frac{N\dfrac{\partial L}{\partial x}-L\dfrac{\partial N}{\partial x}}{(1+F'^2)^{\frac12}}.
$$

Calcul de $\dfrac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y}$:

$$
\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y}=\frac{N\dfrac{\partial L}{\partial y}-L\dfrac{\partial N}{\partial y}}{N^2},
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial y}=&-G'''(1+F'^2)\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{P}+2G''F''\sin^2\varphi-G''(1+F'^2)\frac{\cos^2\varphi}{P}\\
&+\frac{(G'+G''')+G'F''\cos^2\varphi}{P}+G''F''\cos^2\varphi-PG'F'''\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{F'},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial y}&=-\frac{(G'+G''')(1+F'^2)^{\frac32}\cos\varphi}{P}-(1+F'^2)^{\frac32}\sin\varphi+3P(1+F'^2)^{\frac12}F''\sin\varphi\\
&=(1+F'^2)^{\frac12}\Big[-(G'+G''')(1+F'^2)\frac{\cos\varphi}{P}-(1+F'^2)\sin\varphi+3PF''\sin\varphi\Big],
\end{aligned}
$$

$$\frac{N\dfrac{\partial L}{\partial y} - L\dfrac{\partial N}{\partial y}}{(1+F'^2)^{\frac{1}{2}}} = (1+F'^2)\Big[-G'''(1+F'^2)\sin\varphi\cos\varphi + 2PG''F''\sin^2\varphi$$
$$- G''(1+F'^2)\cos^2\varphi + (G'+G''')G'F''\cos^2\varphi$$
$$+ PG''F''\cos^2\varphi - P^2G'F'''\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{P}$$
$$+ G''(G'+G''')(1+F'^2)\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{F'} + G''(1+F'^2)\sin^2\varphi$$
$$- 3PF''G''\sin^2\varphi - F''G'(G'+G'')\cos^2\varphi - PG'F''\sin\varphi\cos\varphi\Big]$$
$$+ 3P^2G'F''^2\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$\frac{N\dfrac{\partial L}{\partial y} - L\dfrac{\partial N}{\partial y}}{(1+F'^2)^{\frac{1}{2}}} = (1+F'^2)$$
$$\times\Big\{[PF''G'' - G''(1+F'^2)]\cos 2\varphi$$
$$+\Big[-G'''(1+F'^2) - \frac{P^2G'F'''}{F'} + \frac{(G'+G''')(1+F'^2)G''}{P} - PF''G'\Big]\sin\varphi\cos\varphi\Big\}$$
$$+ 3P^2G'F''^2\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$\frac{N\dfrac{\partial L}{\partial y} - L\dfrac{\partial N}{\partial y}}{(1+F'^2)^{\frac{1}{2}}} = P^{-2}(1+F'^2)^{\frac{3}{2}}\,\frac{N\dfrac{\partial L}{\partial y} - L\dfrac{\partial N}{\partial y}}{(1+F'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Calcul de $\dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2}$. — Posons

$$M = G''(1+F'^2)\cos\varphi + PG'F''\sin\varphi,$$

on a toujours

$$N = P(1+F'^2)^{\frac{3}{2}}.$$

On aura donc

$$-\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{N\dfrac{\partial M}{\partial y} - M\dfrac{\partial N}{\partial y}}{N^2},$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{G'''(1+F'^2)\cos^2\varphi}{P} + F''G''\sin\varphi\cos\varphi + \frac{G''(1+F'^2)\sin\varphi\cos\varphi}{P}$$
$$-\frac{(G'+G''')G'F''\sin\varphi\cos\varphi}{P} - G'F''\sin^2\varphi + \frac{PG'F'''\sin^2\varphi}{F'} - G'F''\cos^2\varphi,$$

$$\begin{aligned}
\frac{N\dfrac{\partial M}{\partial y}-M\dfrac{\partial N}{\partial y}}{(1+F'^2)^{\frac{1}{2}}} = (1+F'^2)\Big[& -G'''(1+F'^2)\cos^2\varphi + PF''G''\sin\varphi\cos\varphi \\
& + G''(1+F'^2)\sin\varphi\cos\varphi - (G'+G''')G'F''\sin\varphi\cos\varphi \\
& - PG'F''\sin^2\varphi + \frac{P^2G'F'''\sin^2\varphi}{F'} - PG'F''\cos^2\varphi \\
& + (G'+G''')(1+F'^2)\frac{G''\cos^2\varphi}{P} + (1+F'^2)G''\cos\varphi\sin\varphi \\
& - 3PF''G''\sin\varphi\cos\varphi + G'F''(G'+G''')\sin\varphi\cos\varphi + PG'F''\sin^2\varphi\Big] \\
- 3P^2G'F''^2\sin^2\varphi & \\
= (1+F'^2) & \\
\times\Big\{ & [2G'''(1+F'^2) - 2PF''G'']\sin\varphi\cos\varphi \\
& + \left[-G'''(1+F'^2) - PG'F'' + \frac{(G'+G''')(1+F'^2)G''}{P}\right]\cos^2\varphi + \frac{P^2G'F'''\sin^2\varphi}{F'}\Big\} \\
- 3P^2G'F''^2\sin^2\varphi, &
\end{aligned}$$

$$-\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = P^{-2}(1+F'^2)^{\frac{3}{2}}\,\frac{N\dfrac{\partial M}{\partial y}-M\dfrac{\partial N}{\partial y}}{(1+F'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Calcul de $\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2}$. — Je désignerai le facteur $P^{-2}(1+F'^2)^{-\frac{3}{2}}$ par n,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right) = (1+F'^2) & \\
\times\Big\{ & 4G''(1+F'^2-PF'')\sin\varphi\cos\varphi \\
& + \left[\frac{(G'+G''')(1+F'^2)G''}{P} - G'''(1+F'^2) - PG'F'' - \frac{P^2G'F'''}{F'}\right]\cos 2\varphi\Big\} \\
& + 3P^2G'F''^2\cos 2\varphi.
\end{aligned}$$

Il est maintenant facile de former l'équation

$$\Delta(qx-py)=0, \qquad \text{ou} \qquad A\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)+B\,\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y}=0.$$

En supprimant les facteurs m et n, et remarquant que $1+F'^2$ a toujours été supposé différent de zéro, il vient

$$G''(1 + F'^2 - PF'') = 0,$$

qui se décompose en deux,

$$G'' = 0$$

et

$$1 + F'^2 - (G'' + G - F)F'' = 0,$$

d'où

$$\frac{1 + F'^2 + FF''}{F''} = G'' + G.$$

Occupons-nous d'abord de la seconde équation. Les deux membres sont fonctions de variables distinctes : ils doivent donc être égaux chacun à une constante a, d'où deux équations différentielles ordinaires à intégrer

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} + G = a,$$

$$1 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 + F\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = a\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}.$$

La première a pour intégrale

$$G(\varphi) = a + C\cos\varphi + C'\sin\varphi,$$

C et C′ étant deux constantes arbitraires.

La seconde donne

$$F(z) = a + \sqrt{D - (z + C'')^2},$$

D et C″ étant deux nouvelles constantes arbitraires; la surface correspondante sera

$$\begin{cases} \sqrt{D - (z + C'')^2} = (x + C)\cos\varphi + (y + C')\sin\varphi, \\ 0 = -(x + C)\sin\varphi + (y + C')\cos\varphi. \end{cases}$$

En élevant au carré les deux membres de chaque équation et ajoutant membre à membre, il vient

$$(x + C)^2 + (y + C')^2 + (z + C'')^2 = D.$$

On trouve une sphère quelconque, ce qui n'apprend rien de nouveau.

Examinons alors les solutions données par l'équation

$$G'' = 0.$$

On en tire

$$G(\varphi) = a\varphi + b,$$

a et b étant deux constantes arbitraires. L'équation de la surface correspondante s'obtiendra en éliminant φ entre les deux équations

$$\begin{cases} F(z) = \quad x\cos\varphi + y\sin\varphi + a\varphi, \\ \quad 0 = -x\sin\varphi + y\cos\varphi + a. \end{cases}$$

Nous avons fait entrer b dans la fonction $F(z)$. Il reste ainsi une fonction arbitraire $F(z)$ et une constante arbitraire a.

La section de la surface par un plan quelconque parallèle au plan des xy est une développante de cercle et toutes ces développantes sont égales entre elles. On peut alors concevoir assez facilement la forme de ces surfaces.

Soit un cylindre de révolution : dans le plan de la base, je trace une développante du cercle de base partant d'un point O de la circonférence de ce cercle, et sur le cylindre une courbe quelconque (C) partant également de O. Si maintenant je déplace le plan de la base du cylindre parallèlement à lui-même, de manière que le point O décrive la courbe (C), la développante de cercle engendrera la surface en question.

En d'autres termes, nous avons démontré le théorème suivant :

Si une surface-moulure de Monge est engendrée par un profil dont le plan reste tangent à un cylindre de révolution et dont un point marqué parcourt une développante du cercle de base de ce cylindre, la surface-moulure engendrera une famille de Lamé dans tout déplacement pour lequel le plan du profil restera tangent au cylindre de révolution, par exemple dans tout mouvement hélicoïdal ayant pour axe l'axe du cylindre.

Remarque. — Ce théorème fournit une solution avec une fonction arbitraire de l'équation qui correspond au mouvement hélicoïdal

$$\Delta(py - qx + k) = 0.$$

où k est une constante.

Le système triplement orthogonal se complète comme précédemment par des surfaces analogues et par des plans.

Une généralisation naturelle nous conduirait maintenant à étudier les surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes; mais, M. Petot ayant annoncé, dans la Note déjà citée, qu'il avait déterminé celles de ces surfaces qui engendrent une famille de Lamé par translation, j'ai préféré diriger mes recherches d'un autre côté et aborder immédiatement les surfaces dont les lignes de courbure sont planes dans un seul système.

Les plus simples parmi ces surfaces sont les enveloppes de sphères ou, pour employer une expression proposée par M. Lecornu, les périsphères. Je vais chercher à déterminer celles de ces surfaces qui satisfont à l'équation

$$\Delta(1) = 0.$$

Les surfaces à lignes de courbure circulaires dans un système sont définies par les deux équations

$$(7)\qquad \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - R^2 = 0, \\ a'(x-a) + b'(y-b) + c'(z-c) + RR' = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles a, b, c, R sont des fonctions d'un paramètre arbitraire λ à éliminer, a', b', c', R' les dérivées de ces fonctions par rapport à λ.

Nous aurons, comme précédemment, à calculer les fonctions p, q, r, s, t et H. Pour cela nous aurons à différentier totalement les deux équations (7); nous appellerons a'', b'', c'', R'' les dérivées secondes de a, b, c, R par rapport à λ; enfin nous introduirons, pour simplifier l'écriture, une fonction auxiliaire D définie par l'égalité suivante

$$(8)\qquad \begin{cases} D = a''(x-a) + b''(y-b) \\ \qquad + c''(z-c) - a'^2 - b'^2 - c'^2 + R'^2 + RR''. \end{cases}$$

Cela posé, la première équation (7) différentiée donne, en tenant compte de la seconde,

$$(x-a)\,dx+(y-b)\,dy+(z-c)\,dz=0;$$

d'où

$$p=\frac{x-a}{c-z}, \qquad q=\frac{y-b}{c-z}.$$

La deuxième équation (7) donne ensuite

$$a'\,dx+b'\,dy+c'(p\,dx+q\,dy)+\mathrm{D}\,d\lambda=0;$$

d'où

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=-\frac{a'+pc'}{\mathrm{D}}, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial y}=-\frac{b'+qc'}{\mathrm{D}}.$$

Posons encore

$$(9) \qquad \mathrm{A}_1=a'+pc', \qquad \mathrm{B}_1=b'+qc',$$

nous aurons

$$(10) \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial x}=-\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{D}}, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial y}=-\frac{\mathrm{B}_1}{\mathrm{D}}.$$

Calculons maintenant r, s, t :

$$r=\frac{dp}{dx}=\frac{1}{c-z}+\frac{(x-a)^2}{(c-z)^3}+\frac{\partial p}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}$$

ou

$$r=\frac{(x-a)^2+(c-z)^2}{(c-z)^3}-\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{D}}\frac{\partial p}{\partial\lambda}.$$

Or

$$\frac{\partial p}{\partial\lambda}=\frac{-a'}{c-z}-\frac{c'(x-a)}{(c-z)^2}=-\frac{\mathrm{A}_1}{c-z}.$$

Donc

$$r=\frac{1+p^2}{c-z}+\frac{\mathrm{A}_1^2}{\mathrm{D}(c-z)}.$$

De même

$$\frac{\partial q}{\partial\lambda}=-\frac{\mathrm{B}_1}{c-z},$$

$$s=\frac{(x-a)(y-b)}{(c-z)^3}+\frac{\partial p}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y}$$

ou

$$s = \frac{pq}{c-z} + \frac{A_1 B_1}{D(c-z)},$$

$$t = \frac{1}{c-z} + \frac{(y-b)^2}{(c-z)^3} + \frac{\partial q}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial y}$$

ou

$$t = \frac{1+q^2}{c-z} + \frac{B_1^2}{D(c-z)}.$$

On aura, pour les coefficients de l'équation (1), les valeurs suivantes

$$\begin{aligned}
A &= (1+q^2)s - pqt \\
&= (1+q^2)\left[\frac{pq}{c-z} + \frac{A_1 B_1}{D(c-z)}\right] - pq\left[\frac{1+q^2}{c-z} + \frac{B_1^2}{D(c-z)}\right] \\
&= \frac{B_1}{D(c-z)}[A_1(1+q^2) - B_1 pq], \\
B &= (1+p^2)t - (1+q^2)r \\
&= (1+p^2)\left[\frac{1+q^2}{c-z} + \frac{B_1^2}{D(c-z)}\right] - (1+q^2)\left[\frac{1+p^2}{c-z} + \frac{A_1 B^2}{D(c-z)}\right] \\
&= \frac{1}{D(c-z)}[(1+p^2)B_1^2 - (1+q^2)A_1^2], \\
C &= pqr - (1+p^2)s \\
&= pq\left[\frac{1+p^2}{c-z} + \frac{A_1^2}{D(c-z)}\right] - (1+p^2)\left[\frac{pq}{c-z} + \frac{A_1 B_1}{D(c-z)}\right] \\
&= \frac{A_1}{D(c-z)}[A_1 pq - B_1(1+p^2)].
\end{aligned}$$

Calculons maintenant H et ses dérivées :

$$H = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{z-c}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)+(z-c)^2}} = \frac{z-c}{R},$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{p}{R} + \frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{p}{R} - \frac{A_1}{D}\frac{\partial H}{\partial \lambda},$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{q}{R} - \frac{B_1}{D}\frac{\partial H}{\partial \lambda},$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = -\frac{c'}{R} - \frac{(z-c)R'}{R^2}.$$

Les dérivées de A_1 et B_1 par rapport à x ou y introduiront deux quantités

$$A_2 = a'' + pc'', \qquad B_2 = b'' + qc'',$$

en sorte que

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} = rc' + A_2 \frac{\partial\lambda}{\partial x}$$

et de même pour les autres dérivées.

On aura donc

$$\begin{aligned}\frac{d^2 H}{dx^2} &= \frac{r}{R} - \frac{pR'}{R^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x} - \frac{1}{D}\frac{\partial H}{\partial\lambda}\left(rc' + A_2\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)\\ &\quad + \frac{A_1}{D^2}\left(A_2 + \frac{\partial D}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)\frac{\partial H}{\partial\lambda} - \frac{A_1}{D}\frac{\partial^2 H}{\partial\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{A_1}{D}\frac{pR'}{R^2}\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\frac{d^2 H}{dx^2} &= \left(\frac{1}{R} - \frac{c'}{D}\frac{\partial H}{\partial\lambda}\right) r + \frac{2A_1}{D}\frac{pR'}{R^2}\\ &\quad + \frac{1}{D^2}\frac{\partial H}{\partial\lambda}\, 2A_1A_2 - \frac{A_1^2}{D^3}\frac{\partial D}{\partial\lambda}\frac{\partial H}{\partial\lambda} + \frac{A_1^2}{D^2}\frac{\partial^2 H}{\partial\lambda^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 H}{dx\,dy} &= \frac{s}{R} - \frac{pR'}{R^2}\frac{\partial\lambda}{\partial y} - \frac{1}{D}\frac{\partial H}{\partial\lambda}\left(sc' + A_2\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)\\ &\quad + \frac{A_1}{D^2}\left(B_2 + \frac{\partial D}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)\frac{\partial H}{\partial\lambda} - \frac{A_1}{D}\frac{\partial^2 H}{\partial\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial y} + \frac{A_1}{D}\frac{qR'}{R^2}\\ &= \left(\frac{1}{R} - \frac{c'}{D}\frac{\partial H}{\partial\lambda}\right) s + \frac{R'}{R^2}(A_1 q + B_1 p)\\ &\quad + \frac{1}{D^2}\frac{\partial H}{\partial\lambda}(A_2B_1 + A_1B_2) - \frac{A_1B_1}{D^3}\frac{\partial D}{\partial\lambda}\frac{\partial H}{\partial\lambda} + \frac{B_1A_1}{D^2}\frac{\partial^2 H}{\partial\lambda^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 H}{dy^2} &= \frac{t}{R} - \frac{qR'}{R^2}\frac{\partial\lambda}{\partial y} - \frac{1}{D}\frac{\partial H}{\partial\lambda}\left(tc' + B_2\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)\\ &\quad + \frac{B_1}{D^2}\left(B_2 + \frac{\partial D}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)\frac{\partial H}{\partial\lambda} - \frac{B_1}{D}\frac{\partial^2 H}{\partial\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial y} + \frac{B_1}{D}\frac{qR'}{R^2}\\ &= \left(\frac{1}{R} - \frac{c'}{D}\frac{\partial H}{\partial\lambda}\right) t + \frac{2B_1 qR'}{R^2}\\ &\quad + \frac{1}{D^2}\frac{\partial H}{\partial\lambda}\, 2B_1B_2 - \frac{B_1^2}{D^3}\frac{\partial D}{\partial\lambda}\frac{\partial H}{\partial\lambda} + \frac{B_1^2}{D^2}\frac{\partial^2 H}{\partial\lambda^2}.\end{aligned}$$

Nous pouvons alors former la quantité

$$\Delta(1) = A\frac{d^2 H}{dx^2} + B\frac{d^2 H}{dx\,dy} + C\frac{d^2 H}{dy^2};$$

si nous remarquons que l'on a identiquement

$$Ar + Bs + Ct = 0,$$

nous pourrons écrire

$$\begin{aligned}\Delta(1) = {} & \frac{R'}{R^2 D}[2AA_1 p + (A_1 q + B_1 p)B + 2CB_1 q] \\ & + \frac{1}{D^2}\frac{\partial H}{\partial \lambda}[2AA_1A_2 + (A_2B_1 + B_2A_1)B + 2CB_1B_2] \\ & + \left(\frac{1}{D^2}\frac{\partial^2 H}{\partial \lambda^2} - \frac{1}{D^3}\right)[AA_1^2 + BA_1B_1 + CB_1^2].\end{aligned}$$

Le dernier crochet devient, en remplaçant A, B, C par leurs valeurs,

$$\begin{aligned}\frac{1}{D(c-z)}[& B_1A_1^2(1+q^2) - A_1^2B_1^2pq \\ & + A_1B_1^2(1+p^2) - A_1^2B_1(1+q^2) \\ & + A_1^2B_1^2pq - A_1B_1^2(1+p^2)].\end{aligned}$$

Il est donc nul identiquement.

Le premier crochet s'écrit

$$(2AA_1 + BB_1)p + (A_1B + 2B_1C)q.$$

Le second

$$(2AA_1 + BB_1)A_2 + (A_1B + 2B_1C)B_2.$$

Nous avons donc à calculer

$$\begin{aligned}2AA_1 + BB_1 & = \frac{1}{D(c-z)}[2A_1^2B_1(1+q^2) - 2A_1B_1^2pq + B_1^3(1+p^2) - B_1A_1^2(1+q^2)] \\ & = \frac{B_1}{D(c-z)}[(A_1q - B_1p)^2 + A_1^2 + B_1^2] \\ & = \frac{B_1}{D(c-z)}[(a'q - b'p)^2 + A_1^2 + B_1^2]\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
2CB_1 + A_1B
&= \frac{1}{D(c-z)}\left[2A_1^2B_1pq - 2A_1B_1^2(1+p^2) + A_1B_1^2(1+p^2) - (1+q^2)A_1^3\right] \\
&= \frac{-A_1}{D(c-z)}\left[(A_1q - B_1p)^2 + A_1^2 + B_1^2\right] \\
&= \frac{-A_1}{D(c-z)}\left[(a'q - b'p)^2 + A_1^2 + B_1^2\right].
\end{aligned}
$$

L'équation $\Delta(1) = 0$ devient donc, en supprimant le facteur

$$\frac{(a'q - b'p)^2 + A_1^2 + B_1^2}{D^2(c-z)},$$

$$\frac{R'}{R^2}(b'p - a'q) + \frac{1}{D}\frac{\partial H}{\partial \lambda}(A_2B_1 - B_2A_1) = 0. \tag{11}$$

Il reste donc à exprimer que cette équation (11) est identiquement vérifiée par tous les points du périsphère représenté par les équations (7). Nous avons à développer l'équation (11). Pour cela, introduisons la nouvelle fonction auxiliaire

$$2k = a'^2 + b'^2 + c'^2 - R'^2,$$

dont le choix sera justifié ultérieurement

$$k' = a'a'' + b'b'' + c'c'' - R'R''.$$

La valeur de D (8) devient ainsi

$$D = a''(x-a) + b''(y-b) + c''(z-c) + RR'' - 2k,$$

ou, en posant

$$
\begin{aligned}
x - a &= X,\\
y - b &= Y,\\
z - c &= Z,
\end{aligned}
$$

$$D = a''X + b''Y + c''Z + RR'' - 2k.$$

Les équations (7) et (11) s'écrivent aussi

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 = 0, \tag{12}$$

$$a'X + b'Y + c'Z + RR' = 0, \tag{13}$$

$$\left\{\begin{aligned} &-\frac{b'X - a'Y}{Z}(a''X + b''Y + c''Z + RR'' - 2k)R' \\ &\qquad + R^2\frac{\partial H}{\partial \lambda}(A_2B_1 - B_2A_1) = 0. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Or

$$\begin{aligned} A_2B_1 - B_2A_1 &= (a'' + pc'')(b' + qc') - (b'' + qc'')(a' + pc') \\ &= a''b' - a'b'' + p(b'c'' - c'b'') + q(a''c' - a'c'') \\ &= a''b' - a'b'' - \frac{X}{Z}(b'c'' - c'b'') - \frac{Y}{Z}(a''c' - a'c'') \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = -\frac{Rc' + R'Z}{R^2}.$$

L'équation (14) s'écrit donc finalement

$$\left\{\begin{aligned} &R'(b'X - a'Y)(a''X + b''Y + c''Z + RR'' - 2k) + (Rc' + R'Z) \\ &\quad \times [(a''b' - a'b'')Z + (b''c' - b'c'')X + (c''a' - a''c')Y] = 0, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

ou, en développant,

$$\begin{array}{|l|l|l|l|l} R'b'a'' & X^2 - a'b''R' & \begin{array}{l} Y^2 + a''b'R' \\ \quad - a'b''R' \end{array} & \begin{array}{l} Z^2 - a'a''R' \\ \quad + b'b''R' \end{array} & XY \end{array}$$

$$\times\begin{array}{|l|l|l} - a''c'R' & YZ + b''c'R' & \begin{array}{l} ZX + \text{des termes} \\ \text{du premier degré} = 0. \end{array} \end{array}$$

Mais on a identiquement, en vertu des équations (12) et (13),

$$R'b'a''(X^2 + Z^2) - a'a''R'XY - a''R'c'YZ = a''b'R^2R' + a''RR'^2Y$$

et

$$\begin{aligned} &- R'a'b''(Y^2 + Z^2) + b'b''R'XY + b''c'R'XZ \\ &\quad = - a'b''R^2R' - b''RR'^2X. \end{aligned}$$

La somme des deux premiers membres de ces identités reproduit l'ensemble des termes du second degré de l'équation (15) qui, développée entièrement, devient, par suite,

$$\begin{aligned}R^2R'(a''b'-a'b'')+RR'^2a''Y-RR'^2b''X-2kR'(b'X-a'Y)\\+RR'R''(b'X-a'Y)+Rc'(a''b'-a'b'')Z\\+Rc'(b''c'-b'c'')X\quad+Rc'(c''a'-a''c')Y=0.\end{aligned}$$

Ajoutons au premier membre la quantité

$$R(a'b''-a''b')(a'X+b'Y+c'Z+RR'),$$

qui est nulle, à cause de l'équation (13): il vient

$$\left.\begin{aligned}a''RY(R'^2-c'^2-b'^2)-b''RX(R'^2-c'^2-a'^2)+RR'R''(b'X-a'Y)\\-b'RX(a'a''+c'c'')+a'RY(c'c''+b'b'')-2kR'(b'X-a'Y)\end{aligned}\right\}=0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\left.\begin{aligned}a''RY(-2k+a'^2)+b''RX(2k-b'^2)-b'RX(a'a''+c'c'')\\+a'RY(c'c''+b'b'')-2kR'(b'X-a'Y)+RR'R'(b'X-a'Y)\end{aligned}\right\}=0,$$

ou enfin

$$(16)\quad 2k(a'R'Y-b'R'X-a''RY+b''RX)+k'R(a'Y-b'X)=0.$$

Telle est l'équation qui doit être identiquement vérifiée en vertu des équations (12) et (13). Au lieu d'éliminer Z et le paramètre λ entre ces trois équations, ce qui est impossible, je vais éliminer X et Y et exprimer que l'équation résultante en Z et λ est identique. Mais je remarque auparavant que l'équation (16) est une identité si

$$2k=a'^2+b'^2+c'^2-R'^2=0.$$

On a donc une première solution du problème; mais cette solution, qui justifie le choix de l'inconnue auxiliaire $2k$, ne donne aucune surface réelle. En effet, la condition $2k=0$ exprime que chaque sphère (7) touche son enveloppe en un point-cercle. Cependant, au point de vue imaginaire, nous avons le théorème suivant qui donne de l'équation (3) une solution avec deux fonctions arbitraires :

Étant donnée une courbe gauche quelconque, si l'on mène une série de plans perpendiculaires aux tangentes de cette courbe tels que le point de rencontre M *d'une tangente avec le plan qui lui est perpendiculaire décrive une développante de la courbe, et si dans chacun de ces plans on mène les deux droites isotropes qui se croisent au point* M, *le lieu de ces droites sera une surface qui, par une translation quelconque, engendrera une famille de Lamé.*

Mais, dans ce cas, le système triplement orthogonal n'est pas complété par deux familles distinctes de la première.

Je supposerai donc k différent de zéro : on tire des équations (13) et (16)

$$\frac{X}{\alpha} = \frac{Y}{\beta} = \frac{-RR'-c'Z}{a'\alpha+b'\beta},$$

en posant

$$\alpha = 2k(a'R'-a''R)+k'a'R,$$
$$\beta = 2k(b'R'-b''R)+k'b'R.$$

Portons les valeurs de X et de Y

$$X = -\alpha\frac{RR'+c'Z}{a'\alpha+b'\beta},\qquad Y = -\beta\frac{RR'+c'Z}{a'\alpha+b'\beta}$$

dans l'équation (12). Cette dernière équation devant être identiquement vérifiée, quelles que soient les valeurs données à Z et à λ, le coefficient de Z^2 doit être nul, d'où la condition

$$(\alpha^2+\beta^2)c'^2+(a'\alpha+b'\beta)^2 = 0.$$

En annulant le terme en Z et le terme tout connu, on trouve

$$RR'c'(\alpha^2+\beta^2) = 0$$

et

$$(\alpha^2+\beta^2)R'^2-(a'\alpha+b'\beta)^2 = 0.$$

Si $\alpha^2+\beta^2$ n'est pas nul, il résulte nécessairement de ces trois équations les trois nouvelles conditions

$$R' = 0,$$
$$c' = 0,$$
$$a'\alpha + b'\beta = 0,$$

dont la dernière résulte des deux précédentes. Donc *les surfaces-canal dont la directrice est une courbe plane située dans un plan perpendiculaire à* OZ *répondent à la question*. Mais cette solution, d'ailleurs évidente, n'est pas nouvelle : elle rentre dans les surfaces-moulures précédemment trouvées.

Si $\alpha^2 + \beta^2$ est nul, on doit poser, en se bornant aux surfaces réelles,

$$\alpha = 0,$$
$$\beta = 0$$

ou

$$2k(a'R' - a''R) + k'a'R = 0,$$
$$2k(b'R' - b''R) + k'b'R = 0,$$

et ces conditions sont suffisantes.

Divisons les deux membres de la première équation par $2ka'R$, de la seconde par $2kb'R$, il vient

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{R'}{R} - \dfrac{a''}{a'} + \dfrac{k'}{2k} = 0, \\ \dfrac{R'}{R} - \dfrac{b''}{b'} + \dfrac{k'}{2k} = 0; \end{cases}$$

d'où

$$\frac{a''}{a'} = \frac{b''}{b'},$$
$$a' = mb',$$
$$a = mb + n,$$

m et n étant deux constantes. Ainsi la courbe directrice du périsphère doit être située dans un plan parallèle à la translation : je supposerai que ce plan soit le plan ZOx

$$b = 0.$$

L'équation (17) donne ensuite

$$\log R - \log a' + \log\sqrt{k} = \log\frac{m}{\sqrt{2}}$$

ou

$$R\sqrt{2k} = ma',$$

m étant une constante arbitraire. Élevons au carré, il vient

$$(18) \qquad R^2(a'^2 + c'^2 - R'^2) = m^2 a'^2.$$

Ainsi nous obtiendrons des solutions du problème proposé de la manière suivante :

Décrivons dans un plan parallèle à Oz une courbe arbitraire, et, de tous les points de cette courbe comme centres, décrivons des sphères dont le rayon sera déterminé en fonction des coordonnées du centre par l'équation (18). *Ces sphères enveloppent une surface qui, par translation parallèle à Oz, engendrera une famille de Lamé.*

L'équation (18) est susceptible d'une interprétation géométrique. Posons

$$R^2 = u,$$

d'où

$$2RR' = u'.$$

L'équation (18) devient

$$(19) \qquad (a'^2 + c'^2)u - \frac{u'^2}{4} = m^2 a'^2,$$

et la section de la surface par le plan zOx résulte de l'élimination de λ entre les deux équations

$$(x-a)^2 + (z-c)^2 = u,$$
$$2a'(x-a) + 2c'(z-c) + u' = 0.$$

La première de ces deux équations est celle d'une circonférence; la seconde est celle de la corde de contact de la circonférence avec son enveloppe. Soit δ la distance de cette corde au centre de la circonférence, on a

$$\delta^2 = \frac{u'^2}{4(a'^2 + c'^2)},$$

et l'équation (19) peut s'écrire

$$(20) \qquad u - \delta^2 = m^2 \frac{a'^2}{a'^2 + c'^2}.$$

Soit θ l'angle que fait avec Ox la tangente en M à la courbe directrice du périsphère, PQ le rayon de la ligne de courbure circulaire correspondant au point M : nous aurons

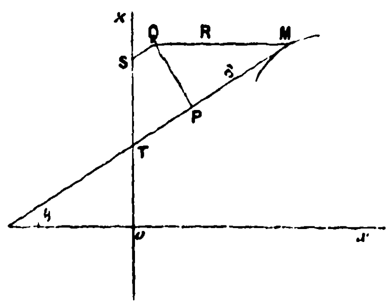
$$\overline{PQ}^2 = u - \delta^2,$$

$$\cos^2\theta = \frac{a'^2}{a'^2 + c'^2},$$

d'où, en portant ces valeurs dans l'équation (26).

$$PQ = m \cos\theta;$$

or, soient T le point de rencontre de Oz avec la tangente MT, S celui



de Oz avec la parallèle à MT menée par le point Q, on voit que

$$PQ = ST \cos\theta.$$

Donc

$$ST = m.$$

Nous pouvons enfin énoncer le théorème suivant :

Si les cylindres de révolution, qui ont pour bases les diverses lignes de courbure circulaires d'un périsphère symétrique, interceptent une longueur constante sur une droite Δ du plan de symétrie du périsphère, ce périsphère engendrera une famille de Lamé par une translation parallèle à la droite Δ.

Il y a intérêt à montrer qu'on peut avoir des solutions réelles : pour cela récrivons l'équation (19) en prenant a comme variable indépendante

$$u'^2 - 4(1 + c'^2)u + 4m^2 = 0. \tag{21}$$

Cette équation admettra l'intégrale

$$u = 2am,$$

si

$$1 + c'^2 = \frac{m}{a}.$$

Cette dernière équation admet comme intégrale

$$c = -a\sqrt{\frac{m}{a} - 1} + m \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{m}{a} - 1} + \text{const.} \tag{22}$$

La courbe qui représente cette équation a évidemment une partie réelle qui correspond aux valeurs de a comprises entre o et m. La valeur de u correspondante est positive, donc le rayon est réel. Enfin, les lignes de courbure circulaires sont réelles et j'ajouterai même que leur plan coupe toujours le périsphère sous l'angle de 45°.

J'ai donc déterminé tous les périsphères réels répondant à la question : il reste à dire quelques mots des surfaces imaginaires pour lesquelles

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0.$$

Il en résulte

$$a'\alpha + b'\beta = 0.$$

Si donc on prend

$$\alpha = i\beta \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

on aura aussi

$$a' = ib',$$

$$a = ib + h,$$

et cette dernière condition nécessaire est aussi suffisante, comme il est facile de s'en assurer. Donc les périsphères symétriques, par rapport à un plan isotrope, engendrent aussi par translation une famille de Lamé. Cette dernière solution comporte deux fonctions arbitraires, puisque la direction plane et la loi de variation du rayon de la sphère sont arbitraires.

Reprenons le cas des surfaces réelles pour compléter le système triplement orthogonal; le problème, comme on le verra, s'achève par des quadratures. La famille de Lamé, que nous venons de déterminer, s'obtient en éliminant un paramètre variable λ entre les deux équations

$$(23)\qquad (x-a)^2 + y^2 + (z-u-c)^2 = R^2,$$

$$(24)\qquad a'(x-a) + c'(z-u-c) + RR' = 0,$$

dans lesquelles nous avons introduit un nouveau paramètre u dont la variation entraînera le déplacement du périsphère parallèlement à Oz. Il convient aussi de récrire l'équation de condition entre les fonctions données

$$(26)\qquad R^2(a'^2 + c'^2 - R'^2) - m^2 a'^2 = 0.$$

Toutes les surfaces d'une des deux autres familles couperont la première suivant une première famille de lignes de courbure, par exemple, suivant les lignes de courbure circulaires, et, par conséquent, seront aussi des périsphères. Ce sont celles-là que je vais d'abord déterminer.

Soit

$$(26)\qquad (x-\alpha)^2 + y^2 + (z-\gamma)^2 - \rho^2 = 0$$

une des sphères enveloppées de ce nouveau périsphère. Cette sphère devra contenir le cercle (23), (24) et de plus couper à angle droit la sphère (23), ce qui donne les conditions

$$\alpha = a + a'S,$$
$$\gamma = u + c + c'S,$$
$$\rho^2 = (a'^2 + c'^2)S^2 + 2RR'S + R^2,$$
$$(a - \alpha)^2 + (u + c - \gamma)^2 = \rho^2 + R^2.$$

Dans ces équations, S est une nouvelle variable. On en tire

$$S = -\frac{R}{R'},$$

$$(27)\quad \begin{cases} \alpha = a - a'\dfrac{R}{R'}, \qquad \gamma = u + c - c'\dfrac{R}{R'}, \\ \rho^2 = \dfrac{(a'^2 + c'^2 - R'^2)R^2}{R'^2} = \dfrac{m^2 a'^2}{R'^2}, \\ \rho = \dfrac{ma'}{R'}. \end{cases}$$

Je vais maintenant considérer le paramètre u comme une fonction de λ et assujettir la sphère (26) à toucher son enveloppe précisément suivant le cercle qui a pour équations les équations (23) et (24). Il suffit pour cela que les deux plans de contact des sphères (23) et (26) avec leurs enveloppes coïncident, c'est-à-dire que

$$\frac{\alpha'}{a'} = \frac{\gamma'}{c'} = \frac{\alpha\alpha' + \gamma\gamma' - \rho\rho'}{aa' + c'(u + c) - RR'}.$$

Or

$$\alpha' = a' + Sa'' + a'S',$$
$$\gamma' = u' + c' + Sc'' + c'S'.$$

La première des deux conditions précédentes devient donc

$$\frac{a''}{a'}S = \frac{c''}{c'}S + \frac{u'}{c'}$$

ou

$$u' = \frac{a''c' - a'c''}{a'}S = \frac{a'c'' - a''c'}{a'}\frac{R}{R'};$$

$$(28)\qquad u = \int \frac{a'c'' - a''c'}{a'}\frac{R}{R'}d\lambda = v + u_1,$$

en posant

$$(29)\qquad u_1 = \int_0^{\lambda} \frac{a'c'' - a''c'}{a'} \frac{R}{R'} d\lambda.$$

Quant à la seconde condition, il est facile de voir qu'elle est une conséquence de la première si l'on a bien soin de prendre

$$\rho = \frac{ma'}{R'}.$$

Donc la seconde famille de Lamé du système triplement orthogonal sera déterminée par les équations

$$(30)\qquad (x - \alpha)^2 + y^2 + (z - \gamma - v)^2 - \rho^2 = 0,$$

$$(31)\qquad \alpha'(x - \alpha) + \gamma'(z - \gamma - v) + \rho\rho' = 0,$$

où nous avons mis en évidence la constante v dont la variation entraînera le déplacement de la surface parallèlement à Oz. Les fonctions α, γ et ρ sont déterminées par les équations (27), (28) et (29).

Remarque. — On tire des équations précédentes

$$a' = \frac{\rho R'}{m},$$

$$c' = \frac{\rho R'\gamma'}{\alpha' m},$$

$$R = \frac{m\alpha'}{\rho'};$$

d'où

$$R^2(a'^2 + c'^2 - R'^2) - m^2 a'^2 = \frac{R'^2}{\rho'^2}\left[\rho^2(\alpha'^2 + \gamma'^2 - \rho'^2) - m^2\alpha'^2\right].$$

Or le premier membre de cette égalité est nul en vertu de l'équation (25); donc le second l'est, et l'on a

$$\rho^2(\alpha'^2 + \gamma'^2 - \rho'^2) - m^2\alpha'^2 = 0,$$

équation qui joue dans la seconde famille le même rôle que l'équation (25) dans la première. Il faut remarquer que la même constante m figure dans les deux cas, ce que l'interprétation géométrique (25) ou (18), donnée plus haut, permettait de prévoir.

Il nous reste enfin à définir la troisième famille de surfaces. Soit

$$w = f(x, y, z)$$

l'équation de cette famille. Si u et v sont les paramètres directeurs des deux autres familles, on doit avoir, comme on sait,

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{32}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{33}$$

Mais il est évident que toute surface de la troisième famille doit pouvoir, par une translation parallèle à Oz, engendrer la famille complète; donc

$$w = z + \varphi(x, y)$$

et

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 1.$$

Alors les équations (32) et (33) feront connaître $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ et l'on obtiendra w en intégrant une différentielle totale. Effectuons le calcul : j'ai d'abord besoin d'avoir $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$; pour cela, je différentie totalement l'équation (23), ce qui donne, en tenant compte de l'équation (24),

$$(x - a)\,dx + y\,dy + (z - u - c)(dz - du) = 0.$$

Donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x - a}{z - u - c},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{z - u - c},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 1.$$

De même

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x-\alpha}{x-v-\gamma},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y}{z-v-\gamma},$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 1,$$

et les équations qui déterminent w deviennent

$$(x-a)\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z - u - c = 0,$$

$$(x-\alpha)\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z - v - \gamma = 0;$$

d'où

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{v+\gamma-u-c}{a-\alpha}, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{(z-v-\gamma)(x-a)-(z-u-c)(x-\alpha)}{y(a-\alpha)},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{a(v+\gamma)-\alpha(u+c)+(u+c-v-\gamma)x+(\alpha-a)z}{y(a-\alpha)}.$$

Or

$$\alpha = a + a'S,$$

$$v+\gamma = u+c+c'S:$$

donc

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{c'}{a'},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{a(u+c+c'S)-(a+a'S)(u+c)-c'Sx+a'Sz}{-a'Sy},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{a'(u+c)-ac'+c'x-a'z}{a'y} = \frac{c'(x-a)-a'(z-u-c)}{a'y}$$

$$dw = -\frac{c'}{a'}dx + \frac{c'(x-a)-a'(z-u-c)}{a'y}dy + dz.$$

dw est une différentielle exacte, comme un intéressant calcul permettrait de le vérifier. Mais on sait que, si deux familles de surfaces se coupent à angle droit suivant leurs lignes de courbure, elles font partie d'un système triplement orthogonal et la troisième famille existe. La vérification est donc inutile et l'on a

$$w = z + \varphi(x, y),$$
$$w = z + \int\left[-\frac{c'}{a'}dx + \frac{c'(x-a) - a'(z-u-c)}{a'y}dy\right],$$

ou, en tenant compte de l'équation (24),

$$w = z + \int\left[-\frac{c'}{a'}dx + \frac{(a'^2 + c'^2)(x-a) + a'\mathrm{RR}'}{a'c'y}dy\right].$$

Dans cette égalité, λ est considéré comme une fonction de x et de y, définie par les équations (23) et (24). Le problème est donc entièrement résolu.