JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. APPELL

Sur les fonctions périodiques de deux variables

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 7 (1891), p. 157-219.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1891_4_7__157_0>

Sur les fonctions périodiques de deux variables;

PAR M. P. APPELL.

INTRODUCTION.

Les fonctions doublement périodiques d'une variable qui se comportent, à distance finie, comme une fraction rationnelle, peuvent toutes, ainsi qu'il est bien connu, s'exprimer par des combinaisons rationnelles de fonctions Θ d'une variable. Après la découverte des fonctions Θ de plusieurs variables faite par Göpel et Rosenhain, on a dû se demander immédiatement si toute fonction de n variables avec $2n$ groupes de périodes, se comportant à distance finie comme une fraction rationnelle, pourrait être exprimée à l'aide des fonctions Θ de n variables. Au premier abord il semble que non, car les périodes d'une fonction Θ de n variables ne peuvent pas être choisies arbitrairement : elles sont liées par $\frac{n(n-1)}{2}$ relations bien connues. Cependant, dans une conversation qu'il eut avec M. Hermite en 1860, Riemann avait affirmé que ces relations doivent nécessairement exister entre les $2n$ groupes de périodes d'une fonction de n variables, tout au moins après une transformation d'un degré convenable effectuée sur ces périodes; mais il n'a donné aucune indication sur la méthode qui l'avait conduit à ce théorème d'une importance capitale. M. Weierstrass a, depuis, annoncé à quelques-uns de ses élèves qu'il possède une démonstration de ce théorème; mais il n'a ni publié ni indiqué la méthode dont il fait usage ([1]). Dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 3 décembre 1883, MM. Poincaré et Picard, s'appuyant sur ce théorème de M. Weierstrass ([2]) que $(n+1)$ *fonctions de n variables à* $2n$ *groupes de périodes sont liées par une relation algébrique* ont donné une démonstration du théorème de Riemann fondée sur la considération d'intégrales de différentielles totales et sur la théorie des intégrales abéliennes.

En me bornant au cas le plus simple de deux variables indépendantes, je me propose, dans ce Mémoire, de traiter directement la question. Partant de l'expression d'une fonction de deux variables, sans singularités essentielles à distance finie, sous forme du quotient de deux fonctions entières, telle qu'elle résulte d'un théorème de M. Poincaré ([3]), je montre que, si cette fonction admet quatre paires de périodes, on peut toujours les amener à vérifier la relation de Riemann et exprimer la fonction par le quotient de deux fonctions entières composées avec des fonctions Θ de deux variables. Je n'ai donc pas à m'appuyer sur l'existence d'une relation algébrique entre trois fonctions de deux variables à quatre paires de périodes : la méthode suivie permet, au contraire, de démontrer l'existence de cette relation.

Pour appliquer d'abord la méthode à un exemple simple, je commence par traiter le cas des fonctions d'une variable à deux périodes, en m'appuyant sur des résultats relatifs aux fonctions entières, dus à M. Guichard ([4]); puis, je traite, par une méthode toute semblable, le cas des fonctions de deux variables à quatre paires de périodes. Le Mémoire se termine par quelques remarques sur les fonctions de deux variables avec deux paires de périodes. J'ai laissé de côté l'étude des fonctions à trois paires de périodes qui peut être faite de la même façon.

Les principaux résultats contenus dans ce Mémoire ont été indiqués

---

([1]) Voir une Lettre de M. Weierstrass à M. Borchardt, *Journal de Crelle*, t. 89.

([2]) *Monatsberichte*; 1862.

([3]) *Acta mathematica*, t. II.

([4]) *Annales de l'École Normale*; 1887.

dans deux Notes que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences dans les séances des 6 et 27 janvier 1890.

Le premier Chapitre est entièrement consacré à la démonstration du théorème préliminaire suivant :

Étant données deux fonctions entières $H(x,y)$ *et* $K(x,y)$ *de deux variables indépendantes, vérifiant l'identité*

$$H(x,y+1)-H(x,y)=K(x+1,y)-K(x,y),$$

il existe une troisième fonction entière $G(x,y)$ *vérifiant les deux équations*

$$G(x+1,y)-G(x,y)=H(x,y),$$
$$G(x,y+1)-G(x,y)=K(x,y).$$

CHAPITRE I.

THÉORÈMES PRÉLIMINAIRES.

1. Dans un Mémoire intitulé *Sur la résolution de l'équation aux différences finies* $G(x+1)-G(x)=H(x)$ (*Annales de l'École Normale*, novembre 1887), M. Guichard a démontré le théorème suivant :

Étant donnée une fonction entière quelconque $H(z)$, *il existe une autre fonction entière* $G(z)$ *vérifiant l'équation aux différences finies*

$$G(z+1)-G(z)=H(z). \tag{1}$$

Comme le fait remarquer M. Guichard, on sait trouver la fonction $G(z)$ quand $H(z)$ est un polynôme

$$H(z)=a_0+a_1 z+\ldots+a_n z^n;$$

il suffit pour cela de se servir des polynômes de Bernoulli $\varphi_n(z)$ qui, pour z entier positif, expriment la somme des $n^{\text{ièmes}}$ puissances des $(z-1)$ premiers nombres entiers

$$\varphi_0(z)=z-1,\qquad \varphi_1(z)=\frac{z(z-1)}{2},\qquad \varphi_2(z)=\frac{z(z-1)(2z-1)}{6},\qquad \ldots$$

polynômes qui vérifient l'identité

$$\varphi_n(z+1)-\varphi_n(z)=z^n;$$

en vertu de cette identité, on aura une fonction satisfaisant à l'équation (1) en prenant

$$G(z)=a_0\varphi_0(z)+a_1\varphi_1(z)+\ldots+a_n\varphi_n(z):$$

la fonction entière la plus générale vérifiant l'équation (1) sera évidemment égale à $G(z)$ augmentée d'une fonction entière admettant la période 1.

Lorsque $H(z)$ est une série entière convergente pour toutes les valeurs de z (fonction entière)

$$H(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n+\ldots,$$

la série

$$a_0\varphi_0(z)+a_1\varphi_1(z)+\ldots+a_n\varphi_n(z)+\ldots$$

n'est pas toujours convergente; on ne peut donc pas étendre aux fonctions entières la méthode élémentaire suivie pour les cas où $H(z)$ est un polynôme. M. Guichard arrive à former dans tous les cas la fonction $G(z)$ en construisant, à l'aide d'une intégrale définie renfermant un paramètre variable z, une fonction qui a des lignes de discontinuité ou *coupures* du genre de celles qui ont été envisagées pour la première fois par M. Hermite (*Journal de Crelle* et *Cours professé à la Faculté des Sciences*); il fait ensuite disparaître ces discontinuités et obtient la fonction cherchée.

Nous modifierons de la façon suivante la méthode de M. Guichard. Nous formerons, à l'aide d'une intégrale définie affectée de coupures, des fonctions entières $\psi_n(z)$ vérifiant les identités

$$\psi_n(z+1)-\psi_n(z)=z^n \qquad (n=0,1,2,\ldots,\infty)$$

et se comportant, quand n est très grand, de telle façon que, si

$$H(z)=a_0+a_1 z+a_2 z^2+\ldots+a_n z^n+\ldots$$

est une série convergente quel que soit z, il en soit de même de

$$G(z)=a_0\psi_0(z)+a_1\psi_1(z)+a_2\psi_2(z)+\ldots+a_n\psi_n(z)+\ldots:$$

cette dernière série définira alors une fonction entière $G(z)$ répondant à la question. Il est évident que les fonctions $\psi_n(z)$ ne diffèrent des polynômes de Bernoulli $\varphi_n(z)$ que par une fonction entière admettant la période 1 : c'est ce que nous vérifierons, en nous servant des expressions des polynômes de Bernoulli par des intégrales définies données par M. Hermite.

2. Soit n un nombre entier positif; considérons, en suivant la méthode de M. Guichard, l'intégrale définie

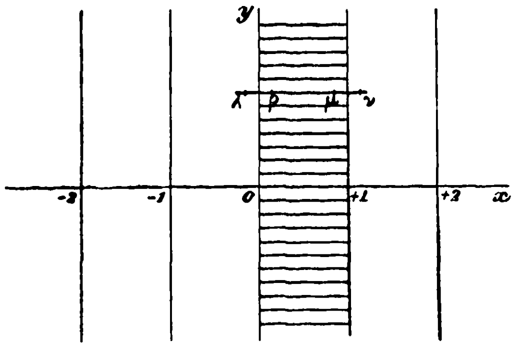
$$\mathrm{H}_n(z)=\int_{\infty}^{+\infty}\frac{e^{2n\pi zi}+e^{-2n\pi zi}}{e^{2n\pi t}+e^{-2n\pi t}}\,\frac{i^{n+1}t^n e^{-2\pi t}}{e^{-2\pi t}-e^{2\pi zi}}\,dt,$$

l'intégration étant étendue aux valeurs *réelles* de t, i désignant l'unité imaginaire positive et z une quantité imaginaire $x+yi$. Cette intégrale a un sens bien déterminé quand la partie réelle de z n'est pas un nombre entier, positif, négatif ou nul. Si z est de la forme $m+i\theta$, m étant un entier et θ une quantité réelle, il y a dans l'intégrale un élément infini correspondant à $t=\theta$.

L'intégrale $\mathrm{H}_n(z)$ définit donc une fonction de z admettant pour *coupures* les parallèles à l'axe des quantités imaginaires ayant pour équations

$$x=0, \qquad x=\pm 1, \qquad x=\pm 2, \qquad \ldots$$

D'après les propriétés des intégrales affectées de coupures, données par M. Hermite (*voir* le *Cours professé à la Faculté des Sciences*), l'intégrale $\Pi_n(z)$ tend vers une limite quand z tend vers un point de l'une des coupures; mais cette limite est différente suivant que z tend vers la coupure en venant d'un côté ou de l'autre. La fonction $\Pi_n(z)$ possède évidemment la période 1, puisque le changement de z en $z+1$



n'altère pas les éléments de l'intégrale. Considérons la bande indéfinie comprise entre les deux droites parallèles $x=0$, $x=1$ (cette bande est couverte de hachures dans la figure); la fonction $\Pi_n(z)$ est uniforme dans l'intérieur de cette bande; nous conviendrons d'appeler valeur de $\Pi_n(z)$ en un point de l'un des bords de la bande la valeur limite vers laquelle tend $\Pi_n(z)$ quand z tend vers ce point *en venant de l'intérieur de la bande*. Ces valeurs de $\Pi_n(z)$ dans la bande

$$0 \leq x \leq 1$$

étant supposées connues, les valeurs de $\Pi_n(z)$ en tous les autres points du plan s'en déduiront par la formule

$$\Pi_n(z+1) = \Pi_n(z).$$

Si λ et ρ sont deux points infiniment voisins situés en face l'un de l'autre sur les deux bords de la coupure $Oy (x=0)$, ρ à droite, λ à gauche, on a, d'après les théorèmes généraux de M. Hermite,

$$\Pi_n(\lambda) - \Pi_n(\rho) = \rho^n.$$

Le point $\mu = \lambda + 1$ est dans la bande ombrée infiniment près de la coupure $x = 1$; comme on a

$$\Pi_n(\mu) = \Pi_n(\lambda + 1) = \Pi_n(\lambda),$$

on voit que

$$(2) \qquad \Pi_n(\mu) - \Pi_n(\rho) = \rho^n.$$

Cela posé, considérons une fonction $\psi_n(z)$ définie par les deux conditions suivantes : 1° pour tous les points z situés dans la bande ombrée (comprise entre les droites $x = 0$, $x = 1$) et sur les droites limitant cette bande, on a

$$\psi_n(z) = \Pi_n(z);$$

2° pour tout autre point du plan, la valeur de $\psi_n(z)$ est définie par la relation

$$(3) \qquad \psi_n(z + 1) - \psi_n(z) = z^n.$$

Cette fonction $\psi_n(z)$ n'a plus de coupures : prenons, par exemple, le point

$$\nu = \rho + 1$$

situé en face de μ sur l'autre bord de la coupure $x = 1$: on a, par définition,

$$\psi_n(\nu) = \psi_n(\rho + 1) = \psi_n(\rho) + \rho^n;$$

d'autre part, d'après (2),

$$\psi_n(\mu) = \Pi_n(\mu) = \Pi_n(\rho) + \rho^n;$$

comme $\psi_n(\rho) = \Pi_n(\rho)$, on voit que

$$\psi_n(\nu) = \psi_n(\mu):$$

la fonction ψ_n est donc continue quand on traverse la coupure $x = 1$. La relation (3) montre alors qu'elle est continue sur toutes les autres coupures.

Cette fonction $\psi_n(z)$ est donc une fonction de z holomorphe dans tout le plan, c'est-à-dire une fonction entière. Nous ne nous arrêterons pas à démontrer que cette fonction admet une dérivée : cela résultera d'une vérification que nous ferons plus loin (n° 5), en montrant que $\psi_n(z)$ est égale au polynôme de Bernoulli $\varphi_n(z)$ augmenté d'un polynôme entier en $e^{2\pi z i}$ et $e^{-2\pi z i}$.

3. *Valeurs de la fonction $\psi_n(z)$ quand n est très grand.* — Supposons d'abord la partie réelle de z comprise entre 0 et 1; alors $\psi_n(z)$ est donnée par l'intégrale $\mathrm{II}_n(z)$,

$$\psi_n(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2n\pi z i} + e^{-2n\pi z i}}{e^{2n\pi t} + e^{-2n\pi t}} \frac{i^{n+1} t^n e^{-2\pi t}}{e^{-2\pi t} - e^{2\pi z i}} dt,$$

où le *module* de $\dfrac{e^{-2\pi t}}{e^{-2\pi t} - e^{2\pi z i}}$ reste, pour toutes les valeurs de t, inférieur à une limite fixe positive A.

Considérons cette intégrale comme la somme de deux intégrales, l'une allant de $-\infty$ à 0, l'autre de 0 à $+\infty$, et, dans la première, changeons t en $-t$, puis intervertissons l'ordre des limites, nous aurons

$$\psi_n(z) = i^{n+1} \int_0^{\infty} \frac{e^{2n\pi z i} + e^{-2n\pi z i}}{e^{2n\pi t} + e^{-2n\pi t}} \left[\frac{e^{-2\pi t}}{e^{-2\pi t} - e^{2\pi z i}} + (-1)^n \frac{e^{2\pi t}}{e^{2\pi t} - e^{2\pi z i}} \right] t^n dt.$$

Dans cette intégrale le module de la somme entre crochets est moindre que $2\mathrm{A}$, puisque le module de chacun des termes de cette somme est moindre que A; le module de

$$\frac{1}{e^{2n\pi t} + e^{-2n\pi t}}$$

est moindre que $e^{-2n\pi t}$. On a donc, en désignant, comme M. Weierstrass, par $|\mathrm{Z}|$ le module de Z,

$$|\psi_n(z)| < |e^{2n\pi z i} + e^{-2n\pi z i}|\, 2\mathrm{A} \int_0^{\infty} e^{-2n\pi t} t^n dt.$$

En faisant

$$2n\pi t = u, \qquad t^n dt = \frac{u^n du}{(2n\pi)^{n+1}},$$

on voit que

$$\int_0^\infty e^{-2n\pi t} t^n \, dt = \frac{1}{(2n\pi)^{n+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^n \, du = \frac{\Gamma(n+1)}{(2n\pi)^{n+1}} = \frac{1.2.3\ldots n}{(2n\pi)^{n+1}},$$

quantité évidemment moindre que $\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}$. Soit, d'autre part, ρ celui des modules des deux quantités

$$e^{2\pi z i}, \quad e^{-2\pi z i}$$

qui est le plus grand, de sorte que

$$|e^{2n\pi z i} + e^{-2n\pi z i}| < 2\rho^n;$$

nous aurons enfin

$$(4) \qquad |\psi_n(z)| < \frac{2A}{\pi}\left(\frac{\rho}{2\pi}\right)^n.$$

Pour établir cette formule nous avons supposé la partie réelle de z comprise entre 0 et 1 : voyons ce qui se passe quand cette partie réelle est *nulle*.

Le raisonnement précédent n'est plus applicable, car le module de

$$\frac{e^{-2\pi t}}{e^{-2\pi t} - e^{2\pi z i}}$$

devient infini lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$. Supposons donc z infiniment voisin de la valeur $i\theta$, θ étant réel, et désignons par ε une quantité positive. L'intégrale définie qui donne $\psi_n(z)$ est de la forme

$$\psi_n(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z, t) \, dt;$$

nous l'écrirons

$$\psi_n(z) = \int_{-\infty}^{\theta-\varepsilon} F(z, t) \, dt + \int_{\theta+\varepsilon}^{+\infty} F(z, t) \, dt + \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} F(z, t) \, dt.$$

Dans les deux premières intégrales, le module de

$$\frac{e^{-2\pi t}}{e^{-2\pi t} - e^{2\pi z i}}$$

reste inférieur à une limite positive a. Le module de la somme de ces deux intégrales est donc moindre que l'intégrale

$$a\,|e^{2n\pi zi}+e^{-2n\pi zi}|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|t^n|\,dt}{e^{2n\pi t}+e^{-2n\pi t}},$$

puisque les éléments de cette dernière intégrale sont réels et positifs, plus grands que les modules des éléments correspondants des deux premières intégrales, et que le champ d'intégration est plus étendu. Or cette dernière intégrale est égale à

$$2a\,|e^{2n\pi zi}+e^{-2n\pi zi}|\int_{0}^{\infty}\frac{t^n\,dt}{e^{2n\pi t}+e^{-2n\pi t}},$$

qui, d'après ce qui précède (formule 4), est moindre que

$$\frac{2a}{\pi}\left(\frac{\rho}{2\pi}\right)^n,$$

ρ désignant le plus grand module des deux quantités $e^{2\pi zi}$ et $e^{-2\pi zi}$. Il reste à étudier l'intégrale

$$\int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon}\mathrm{F}(z,t)\,dt,$$

que nous écrirons comme il suit

$$(5)\quad \begin{aligned} & i(e^{2n\pi zi}+e^{-2n\pi zi})\int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon}\left(\frac{i^n t^n}{e^{2n\pi t}+e^{-2n\pi t}}-\frac{z^n}{e^{2n\pi zi}+e^{-2n\pi zi}}\right)\frac{e^{-2\pi t}\,dt}{e^{-2\pi t}-e^{2\pi zi}} \\ & \qquad + i z^n\int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon}\frac{e^{-2\pi t}\,dt}{e^{-2\pi t}-e^{2\pi zi}}. \end{aligned}$$

Quand z tend vers $i\theta$, la deuxième de ces intégrales

$$\int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon}\frac{e^{-2\pi t}\,dt}{e^{-2\pi t}-e^{2\pi zi}}$$

qui ne dépend pas de n, tend vers une limite finie; si donc on appelle b un nombre positif plus grand que le module de cette limite, on voit que

$$\left| i z^n \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} \frac{e^{-2\pi t}\,dt}{e^{-2\pi t} - e^{2\pi z i}} \right| < b\,|\theta|^n.$$

Quant à la première intégrale, tous ses éléments restent finis quand on y fait $z = i\theta$, et l'intégrale ainsi obtenue

$$\mathrm{I} = \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} \left(\frac{i^n t^n}{e^{2n\pi t} + e^{-2n\pi t}} - \frac{i^n \theta^n}{e^{2n\pi\theta} + e^{-2n\pi\theta}} \right) \frac{e^{-2\pi t}\,dt}{e^{-2\pi t} - e^{-2\pi\theta}}$$

reste finie quand n augmente indéfiniment, car tous ses éléments tendent vers zéro (¹). Si l'on désigne par c un nombre plus grand que le module de cette intégrale, le premier terme de la somme (5) a un module moindre que $2c\rho^n$.

On a donc, enfin, quand $z = i\theta$,

$$|\psi_n(z)| < \frac{2a}{\pi}\left(\frac{\rho}{2\pi}\right)^n + b\,|\theta|^n + 2c\rho^n,$$

ou, en appelant $\frac{2\mathrm{A}}{3}$ le plus grand des nombres $\frac{2a}{\pi}$, b, $2c$, et λ le plus grand des nombres $|\theta|$ et ρ,

$$|\psi_n(z)| < 2\mathrm{A}\lambda^n,$$

formule analogue à (4). En résumé, quand la partie réelle x de z est nulle ou comprise entre o et 1

$$0 \leqq x < 1,$$

le module de $\psi_n(z)$ quand n augmente indéfiniment reste inférieur à une expression de la forme

$$2\mathrm{A}\lambda^n,$$

A et λ désignant des nombres positifs indépendants de n.

(¹) *Voir*, pour la démonstration de ce point, la remarque placée à la fin de ce numéro (p. 169).

Cette proposition s'étend facilement à des valeurs quelconques de z. En effet, la formule fondamentale

$$\psi_n(z+1) = \psi_n(z) + z^n$$

donne les deux formules

$$(6)\quad \begin{cases} \psi_n(z) = \psi_n(z+k) - z^n - (z+1)^n - \ldots - (z+k-1)^n, \\ \psi_n(z) = \psi_n(z-k) + (z-k)^n + (z-k+1)^n + \ldots + (z-1)^n, \end{cases}$$

k désignant un entier positif. Si z a une valeur quelconque, on peut toujours choisir k de telle façon que l'une des deux quantités

$$z+k, \quad z-k$$

ait sa partie réelle comprise entre o et 1 ou égale à o. Supposons, par exemple, que $(z+k)$ remplisse cette condition : la première des formules (6) montre que

$$|\psi_n(z)| \leqq |\psi_n(z+k)| + |z^n| + |(z+1)^n| + \ldots + |(z+k-1)^n|;$$

mais on a, comme nous venons de le voir,

$$|\psi_n(z+k)| < 2B\mu^n;$$

d'autre part, en appelant ν le plus grand des modules des k quantités

$$z, \quad z+1, \quad \ldots, \quad z+k-1$$

le module de la somme de leurs puissances $n^{\text{ièmes}}$ est moindre que $k\nu^n$; donc

$$|\psi_n(z)| < 2B\mu^n + k\nu^n < 2A\lambda^n,$$

en appelant A le plus grand des nombres 2B et k, λ le plus grand des nombres μ et ν.

La deuxième des formules (6) conduit à un résultat identique.

Remarque. — Nous avons admis que le module de l'intégrale

$$I = i^n \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} [\varphi(t) - \varphi(\theta)] \frac{e^{-2\pi t}\, dt}{e^{-2\pi t} - e^{-2\pi\theta}},$$

où

$$\varphi(t) = \frac{t^n}{e^{2n\pi t} + e^{-2n\pi t}}$$

(t, θ réels, ε réel positif), reste fini quand n augmente indéfiniment. Pour mettre ce fait en évidence, on peut distinguer deux cas, suivant que θ est nul ou non :

1° $\theta = 0$. Alors $\varphi(\theta) = 0$. Le module du produit

$$\frac{te^{-2\pi t}}{e^{-2\pi t} - 1}$$

reste, dans les limites de l'intégration, inférieur à un nombre positif fixe p. Si donc on partage l'intégrale en deux, l'une prise de $-\varepsilon$ à 0, l'autre de 0 à $+\varepsilon$, on aura

$$|I| < 2p \int_0^\varepsilon \frac{t^{n-1}}{e^{2n\pi t} + e^{-2n\pi t}}\, dt < 2p \int_0^\varepsilon t^{n-1}\, dt,$$

$$|I| < 2p\frac{\varepsilon^n}{n}.$$

Comme ε peut être supposé moindre que l'unité, on voit que le module de I tend vers zéro quand n augmente indéfiniment.

2° Supposons θ différent de zéro, positif, par exemple. On pourra prendre ε assez petit pour que $\theta - \varepsilon$ soit positif. Écrivons

$$I = i^n \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} \frac{\varphi(t) - \varphi(\theta)}{t - \theta} \frac{e^{-2\pi t}(t-\theta)}{e^{-2\pi t} - e^{-2\pi\theta}}\, dt.$$

Le module du facteur $\frac{e^{-2\pi t}(t-\theta)}{e^{-2\pi t} - e^{-2\pi\theta}}$ reste encore inférieur à un nombre positif p. D'autre part, le théorème des accroissements finis donne

$$\varphi(t) - \varphi(\theta) = (t - \theta)\varphi'(u)$$

u étant compris entre t et 0, c'est-à-dire positif. Comme

$$\varphi'(u) = \frac{nu^{n-1}}{e^{2n\pi u}+e^{-2n\pi u}} - \frac{2n\pi u^n}{e^{2n\pi u}+e^{-2n\pi u}}\,\frac{e^{2n\pi u}-e^{-2n\pi u}}{e^{2n\pi u}+e^{-2n\pi u}},$$

on a

$$|\varphi'(u)| < nu^{n-1}e^{-2n\pi u} + 2n\pi u^n e^{-2n\pi u},$$

$$|\varphi'(u)| < n\left(\frac{1}{u}+2\pi\right)(ue^{-2\pi u})^n.$$

Le maximum du produit $ue^{-2\pi u}$ étant $\frac{1}{2\pi e}$, et le facteur $\frac{1}{u}+2\pi$ restant, dans l'intégrale, inférieur à $\frac{1}{\theta-\varepsilon}+2\pi$, on aura

$$|\varphi'(u)| < n\left(\frac{1}{\theta-\varepsilon}+2\pi\right)\left(\frac{1}{2\pi e}\right)^n,$$

d'où

$$|\mathrm{I}| < 2np\varepsilon\left(\frac{1}{\theta-\varepsilon}+2\pi\right)\left(\frac{1}{2\pi e}\right)^n,$$

limite qui tend encore vers zéro pour n infini.

4. *Application à la résolution de deux problèmes de calcul fonctionnel.* — Prenons d'abord le problème de M. Guichard. Soit

$$\mathrm{H}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

une fonction entière : il s'agit de former une fonction entière $\mathrm{G}(z)$ vérifiant l'équation

$$\mathrm{G}(z+1) - \mathrm{G}(z) = \mathrm{H}(z). \tag{7}$$

La série

$$\mathrm{G}(z) = a_0(z-1) + a_1\psi_1(z) + a_2\psi_2(z) + \ldots + a_n\psi_n(z) + \ldots$$

converge quel que soit z, car le module du terme général $a_n\psi_n(z)$ est moindre que

$$2\mathrm{A}\,|a_n|\,\lambda^n,$$

A et λ désignant des constantes indépendantes de n, et la série dont le terme général est $|a_n|\lambda^n$ est convergente. La série $G(z)$ définit donc une fonction entière vérifiant l'équation (7)(¹). La fonction entière la plus générale vérifiant cette équation est égale à $G(z)$ augmentée d'une fonction entière avec la période 1.

Il est évident que l'on pourra ramener au problème que nous venons de résoudre la détermination d'une fonction $G_1(z)$ vérifiant une équation de la forme

$$G_1(z+\omega)-G_1(z)=H(z),$$

ω désignant une constante quelconque. Il suffira de déterminer une fonction entière $G(z)$ vérifiant l'équation

$$G(z+1)-G(z)=H(\omega z),$$

puis de prendre

$$G_1(z)=G\left(\frac{z}{\omega}\right).$$

Cherchons maintenant à résoudre le même problème pour des fonctions de deux variables indépendantes.

Étant données deux fonctions entières $H(x,y)$ *et* $K(x,y)$ *de deux variables* x *et* y, *former une fonction entière* $G(x,y)$ *vérifiant les deux équations*

$$(8)\qquad \begin{cases} G(x+1,y)-G(x,y)=H(x,y), \\ G(x,y+1)-G(x,y)=K(x,y). \end{cases}$$

Pour que le problème soit possible, il faut que les deux fonctions données H et K vérifient une certaine équation de condition. En effet, en changeant, dans la première des relations (8), y en $y+1$ et ajoutant à la deuxième, on obtient

$$G(x+1,y+1)-G(x,y)=H(x,y+1)+K(x,y);$$

de même, en changeant dans la seconde de ces relations x en $x+1$ et ajoutant le résultat à la première, on a

$$G(x+1,y+1)-G(x,y)=K(x+1,y)+H(x,y).$$

(¹) *Voir* un Mémoire de M. Weierstrass, *Monatsberichte*, p. 723; 1880.

On doit donc avoir

$$(9) \qquad H(x, y+1) + K(x, y) = K(x+1, y) + H(x, y).$$

Supposons cette condition remplie; le problème est alors possible et l'on peut former la fonction $G(x, y)$ de la façon suivante :

Ordonnons $H(x, y)$ par rapport aux puissances de x

$$H(x, y) = \sum_{n=0}^{n=\infty} x^n h_n(y),$$

les coefficients $h_n(y)$ étant des fonctions entières de y. Si nous posons

$$L(x, y) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \psi_n(x) h_n(y),$$

où $\psi_n(x)$ est la fonction définie précédemment, avec la convention que $\psi_0(x) = x - 1$, et si nous désignons par $M(x, y)$ une fonction entière quelconque de x et y assujettie à la seule condition d'admettre la période 1 par rapport à x,

$$M(x+1, y) = M(x, y),$$

l'expression

$$(10) \qquad G(x, y) = L(x, y) - M(x, y)$$

définit la fonction entière la plus générale vérifiant la première des relations (8)

$$G(x+1, y) - G(x, y) = H(x, y).$$

Il faut déterminer la fonction $M(x, y)$ de telle façon que la fonction (10) vérifie aussi la deuxième des relations (8). Pour cela, remarquons que, si nous retranchons la relation

$$L(x+1, y) - L(x, y) = H(x, y)$$

de celle qu'on en déduit par le changement de y en $y+1$, nous obtenons l'équation

$$\begin{aligned}L(x+1, y+1) - L(x, y+1) - L(x+1, y) + L(x, y)\\ = H(x, y+1) - H(x, y)\end{aligned}$$

dont le second membre est égal à

$$K(x+1, y) - K(x, y)$$

en vertu de la relation (9). On peut donc écrire

$$\begin{aligned}L(x+1, y+1) - L(x+1, y) - K(x+1, y)\\ = L(x, y+1) - L(x, y) - K(x, y),\end{aligned}$$

ce qui montre que la fonction entière

$$P(x, y) = L(x, y+1) - L(x, y) - K(x, y)$$

admet la période 1 par rapport à x.

Cette fonction $P(x, y)$, ordonnée par rapport à y, est donc de la forme

$$P(x, y) = \sum_{n=0}^{n=\infty} y^n p_n(x),$$

les coefficients $p_n(x)$ étant des fonctions entières de x avec la période 1. Cela posé, en prenant la fonction $G(x, y)$ définie par l'équation (10), on voit que l'expression

$$(11) \qquad G(x, y+1) - G(x, y) - K(x, y)$$

est identique à

$$(12) \qquad P(x, y) - M(x, y+1) + M(x, y),$$

où la fonction entière $M(x, y)$ est assujettie à la seule condition d'avoir la période (1) par rapport à x. Prenons pour cette fonction l'expression suivante

$$\mathrm{M}(x, y) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \psi_n(y) p_n(x),$$

où $\psi_n(y) = y - 1$ et où les coefficients $p_n(x)$ sont ceux qui figurent dans le développement de $\mathrm{P}(x, y)$. La fonction M étant ainsi déterminée, l'expression (12) est nulle : il en est de même de l'expression (11) qui lui est égale, et la fonction $\mathrm{G}(x, y)$ vérifie bien les deux relations (8). La fonction la plus générale vérifiant ces deux relations est égale à $\mathrm{G}(x, y)$ augmentée d'une fonction entière admettant la période 1 par rapport à x et à y.

S'il s'agit de former une fonction entière $\mathrm{G}_1(x, y)$ vérifiant deux équations de la forme

$$\begin{aligned} \mathrm{G}_1(x + a, y) - \mathrm{G}_1(x, y) &= \mathrm{H}(x, y), \\ \mathrm{G}_1(x, y + b) - \mathrm{G}_1(x, y) &= \mathrm{K}(x, y), \end{aligned}$$

on formera, comme nous venons de le faire, une fonction $\mathrm{G}(x, y)$ vérifiant les deux relations

$$\begin{aligned} \mathrm{G}(x + 1, y) - \mathrm{G}(x, y) &= \mathrm{H}(ax, by), \\ \mathrm{G}(x, y + 1) - \mathrm{G}(x, y) &= \mathrm{K}(ax, by), \end{aligned}$$

puis l'on prendra

$$\mathrm{G}_1(x, y) = \mathrm{G}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right).$$

5. Pour terminer ce Chapitre, nous montrerons, comme nous l'avons annoncé, que la fonction $\psi_n(z)$ ne diffère du polynôme de Bernoulli $\varphi_n(z)$ que par une expression entière en $e^{2\pi z i}$ et $e^{-2\pi z i}$.

Reprenons l'expression de $\psi_n(z)$ telle que nous l'avons écrite dans le n° **3**, en supposant la partie réelle de z entre 0 et 1,

$$\psi_n(z) = i^{n-1} \int_0^{\infty} \frac{e^{2n\pi z i} + e^{-2n\pi z i}}{e^{2n\pi t} + e^{-2n\pi t}} \left| \frac{e^{-2\pi t}}{e^{-2\pi t} - e^{2\pi z i}} + (-1)^n \frac{e^{2\pi t}}{e^{2\pi t} - e^{2\pi z i}} \right| t^n \, dt.$$

Nous distinguerons deux cas, suivant que n est pair ou impair.

1° Supposons d'abord n impair, $n = 2\nu + 1$; nous aurons alors, en introduisant des fonctions circulaires à la place des exponentielles

$$\psi_{2\nu+1}(z) = i(-1)^\nu \int_0^\infty \frac{\cos 2n\pi z}{\cos 2n\pi ti} \frac{t^{2\nu+1} \sin 2\pi ti\, dt}{\cos 2\pi z - \cos 2\pi ti},$$

ou encore, en ajoutant et retranchant l'unité au premier rapport $\frac{\cos 2n\pi z}{\cos 2n\pi ti}$,

$$\psi_{2\nu+1}(z) = i(-1)^\nu \int_0^\infty \frac{\cos 2n\pi z - \cos 2n\pi ti}{\cos 2\pi z - \cos 2\pi ti} \frac{\sin 2\pi ti}{\cos 2n\pi ti} t^{2\nu+1}\, dt$$
$$+ i(-1)^\nu \int_0^\infty \frac{2 \sin\pi ti \cos\pi ti}{\cos 2\pi z - \cos 2\pi ti} t^{2\nu+1}\, dt.$$

D'autre part, d'après M. Hermite (*Journal de Crelle*, t. 79), le polynôme de Bernoulli, $\varphi_{2\nu+1}(z)$, est donné par la formule suivante, où la partie réelle de z est supposée comprise entre o et 1,

$$\varphi_{2\nu+1}(z) = i(-1)^\nu \int_0^\infty \frac{2\sin^2\pi z \cos\pi ti}{\sin\pi ti} \frac{t^{2\nu+1}\, dt}{\cos 2\pi z - \cos 2\pi ti}.$$

On a donc, en retranchant les deux expressions de $\psi_{2\nu+1}(z)$ et $\varphi_{2\nu+1}(z)$, et remarquant que

$$2\sin^2\pi ti - 2\sin^2\pi z = \cos 2\pi z - \cos 2\pi ti,$$

$$\psi_{2\nu+1}(z) - \varphi_{2\nu+1}(z)$$
$$= i(-1)^\nu \int_0^\infty \left[\frac{\cos 2n\pi z - \cos 2n\pi ti}{\cos 2\pi z - \cos 2\pi ti} \frac{\sin 2\pi ti}{\cos 2n\pi ti} + \frac{\cos\pi ti}{\sin\pi ti}\right] t^{2\nu+1}\, dt.$$

Cette dernière intégrale est évidemment *un polynôme en* $\cos 2\pi z$, car l'expression

$$\frac{\cos 2n\pi z - \cos 2n\pi ti}{\cos 2\pi z - \cos 2\pi ti}$$

est un polynôme en $\cos 2\pi z$. C'est ce que nous voulions démontrer.

2° Supposons maintenant n pair, $n = 2\nu$. Nous aurons

$$\psi_{2\nu}(z) = i(-1)^\nu \int_0^\infty \frac{\cos 2n\pi z}{\cos 2n\pi ti} \frac{e^{-2\pi z i} - \cos 2\pi ti}{\cos 2\pi z - \cos 2\pi ti} t^{2\nu}\, dt,$$

ou, encore, en ajoutant et retranchant l'unité au rapport $\frac{\cos 2n\pi z}{\cos 2n\pi ti}$,

$$\psi_{2\nu}(z) = i(-1)^\nu \int_0^\infty \frac{\cos 2n\pi z - \cos 2n\pi ti}{\cos 2\pi z - \cos 2\pi ti} \frac{e^{-2\pi zi} - \cos 2\pi ti}{\cos 2n\pi ti} t^{2\nu} dt$$
$$+ i(-1)^\nu \int_0^\infty \frac{e^{-2\pi zi} - \cos 2\pi ti}{\cos 2\pi z - \cos 2\pi ti} t^{2\nu} dt.$$

D'autre part, d'après l'expression du polynôme de Bernoulli $\varphi_{2\nu}(z)$ donnée par M. Hermite (*Journal de Crelle*, t. 79), on a

$$\varphi_{2\nu}(z) = (-1)^\nu \sin 2\pi z \int_0^\infty \frac{t^{2\nu}\, dt}{\cos 2\pi z - \cos 2\pi ti}.$$

Calculons la différence $\psi_{2\nu}(z) - \varphi_{2\nu}(z)$, en remarquant l'identité

$$i(e^{-2\pi zi} - \cos 2\pi ti) - \sin 2\pi z = i(\cos 2\pi z - \cos 2\pi ti),$$

nous aurons

$$\psi_{2\nu}(z) - \varphi_{2\nu}(z)$$
$$= i(-1)^\nu \int_0^\infty \left[\frac{\cos 2n\pi z - \cos 2n\pi ti}{\cos 2\pi z - \cos 2\pi ti} \frac{e^{-2\pi zi} - \cos 2\pi ti}{\cos 2n\pi ti} + 1 \right] t^{2\nu} dt;$$

cette dernière intégrale est un *polynôme* en $e^{2\pi zi}$ et $e^{-2\pi zi}$, ce qui démontre la proposition que nous avions en vue.

CHAPITRE II.

FONCTIONS PÉRIODIQUES D'UNE VARIABLE.

6. Soit $f(x)$ une fonction analytique d'une variable se comportant en tous les points à distance finie comme une fraction rationnelle. Cette fonction peut, d'après les résultats trouvés par M. Weierstrass, se mettre sous la forme

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

où les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions entières *n'ayant pas de zéros communs*. Cette forme n'est pas unique, car on peut évidemment multiplier le numérateur et le dénominateur par une même fonction entière *n'ayant pas de zéros*, c'est-à-dire par une exponentielle dont l'exposant est une fonction entière de x.

Supposons que la fonction $f(x)$ admette une période ω : on aura identiquement

$$\frac{\varphi(x+\omega)}{\psi(x+\omega)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Cette identité montre que les fonctions entières $\varphi(x+\omega)$ et $\varphi(x)$ ont les mêmes zéros; leur rapport, qui n'a ni zéros ni infinis, est donc de la forme $e^{g(x)}$, $g(x)$ désignant une fonction entière, et l'on a

$$\frac{\varphi(x+\omega)}{\varphi(x)} = \frac{\psi(x+\omega)}{\psi(x)} = e^{g(x)}.$$

Soit maintenant $h(x)$ une fonction entière de x vérifiant l'identité

$$h(x+\omega) - h(x) = g(x).$$

Si nous posons

$$\varphi_1(x) = \varphi(x)\,e^{-h(x)},$$
$$\psi_1(x) = \psi(x)\,e^{-h(x)},$$

la fonction $f(x)$ sera le quotient des deux fonctions $\varphi_1(x)$ et $\psi_1(x)$ *n'ayant pas de zéros communs* et vérifiant les deux équations

$$\varphi_1(x+\omega) = \varphi_1(x), \qquad \psi_1(x+\omega) = \psi_1(x).$$

Donc *une fonction uniforme $f(x)$, sans singularités essentielles, qui admet la période ω, peut toujours être mise sous la forme du quotient de deux fonctions entières admettant séparément la période ω.*

Supposons maintenant que la fonction

$$f(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$$

admette une seconde période ω'. On aura encore l'identité

$$\frac{\varphi_1(x+\omega')}{\psi_1(x+\omega')} = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)};$$

d'où l'on conclut, comme plus haut,

$$\frac{\varphi_1(x+\omega')}{\varphi_1(x)} = \frac{\psi_1(x+\omega')}{\psi_1(x)} = e^{g_1(x)},$$

$g_1(x)$ désignant une fonction entière.

Comme les fonctions $\varphi_1(x)$ et $\psi_1(x)$ admettent la période ω, on doit avoir

$$e^{g_1(x+\omega)} = e^{g_1(x)}, \qquad g_1(x+\omega) = g_1(x) - 2ni\pi,$$

n étant un entier. Cette dernière relation, écrite sous la forme

$$g_1(x+\omega) + \frac{2ni\pi}{\omega}(x+\omega) = g_1(x) + \frac{2ni\pi}{\omega}x,$$

montre que la fonction entière

$$g_1(x) + \frac{2ni\pi}{\omega}x$$

admet la période ω et est, par conséquent, développable par la formule de Fourier en une série de la forme

$$g_1(x) + \frac{2ni\pi}{\omega}x = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} a_\nu e^{\frac{2\nu i\pi x}{\omega}}.$$

Nous pourrons alors déterminer une fonction entière $h_1(x)$ admettant la période ω et vérifiant l'équation

$$(13) \qquad h_1(x+\omega') - h_1(x) = g_1(x) + \frac{2ni\pi}{\omega}x - a_0.$$

En effet, cette fonction $h_1(x)$ sera de la forme

$$h_1(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} b_\nu e^{\frac{2\nu i\pi x}{\omega}},$$

et, en écrivant qu'elle vérifie la relation (13), on aura

$$b_\nu(1 - q^{2\nu}) = a_\nu,$$

où q est la quantité $e^{\frac{\pi\omega' i}{\omega}}$. Les coefficients b_ν sont ainsi déterminés tous à l'exception de b_0 et la série obtenue pour $h_1(x)$ est convergente pour toutes les valeurs de x, comme celle qui définit $g_1(x) + \frac{2ni\pi}{\omega}x$: cela résulte de ce que le module de $\frac{1}{1-q^{2\nu}}$ reste, pour toutes les valeurs entières de ν, autres que zéro, inférieur à une limite fixe. Si, pour une valeur de ν non nulle, ce module devenait infini, le rapport des périodes $\frac{\omega'}{\omega}$ serait réel et commensurable, et ces deux périodes se réduiraient à une seule. La fonction $h_1(x)$ étant déterminée, si l'on pose

$$\Phi(x) = \varphi_1(x)\, e^{-h_1(x)},$$
$$\Psi(x) = \psi_1(x)\, e^{-h_1(x)},$$

les fonctions Φ et Ψ n'auront pas de zéros communs, et la fonction $f(x)$ sera donnée par l'expression

$$f(x) = \frac{\Phi(x)}{\Psi(x)},$$

les fonctions entières Φ et Ψ admettant la période ω et vérifiant les relations

$$(14)\qquad \begin{cases} \Phi(x+\omega') = e^{-\frac{2ni\pi x}{\omega}+a_0}\,\Phi(x), \\ \Psi(x+\omega') = e^{\frac{2ni\pi x}{\omega}+a_0}\,\Psi(x). \end{cases}$$

Les fonctions Φ et Ψ sont développables par la formule de Fourier en séries de la forme

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu e^{\frac{2\nu\pi x i}{\omega}}, \qquad \Psi(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} B_\nu e^{\frac{2\nu\pi x i}{\omega}}:$$

on déterminera les coefficients A_ν et B_ν en exprimant que ces fonctions vérifient les relations (14). Si l'on suppose, comme d'habitude, que dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ le coefficient de i est positif, on reconnaît que les séries ainsi obtenues définissant Φ et Ψ ne sont convergentes que si n est positif. Les séries ainsi obtenues pour Φ et Ψ sont composées, comme il est bien connu, à l'aide de fonctions Θ.

On trouve de cette façon, *a priori* et en partant de la seule notion de la double périodicité, l'expression des fonctions doublement périodiques par des quotients de fonctions Θ.

On pourra montrer de même qu'une fonction $f(x)$ sans singularités essentielles vérifiant des relations de la forme

$$f(x+\omega) = e^{l(x)} f(x),$$
$$f(x+\omega') = e^{l_1(x)} f(x),$$

où $l(x)$ et $l_1(x)$ sont des fonctions entières, est égale au produit d'une exponentielle de la forme $e^{G(x)}$ par un quotient de fonctions Θ (¹): ce résultat conduit, en particulier, à l'expression des fonctions doublement périodiques de seconde et troisième espèce.

CHAPITRE III.

FONCTIONS PÉRIODIQUES DE DEUX VARIABLES.

7. Dans le Chapitre précédent nous avons montré, par une méthode directe, que toutes les fonctions doublement périodiques, sans singularités essentielles, peuvent être exprimées par un quotient de fonctions Θ. Le but principal que nous poursuivons maintenant est de montrer, par une méthode analogue, que toute fonction quadruple-

(¹) *Voir* le Mémoire de M. Guichard (*Annales de l'École Normale*, novembre 1887), où se trouvent traitées, à un tout autre point de vue, de nombreuses questions de ce genre.

ment périodique de deux variables, sans singularités essentielles à distance finie, peut être exprimée à l'aide des fonctions Θ de deux variables.

Nous commencerons par rappeler quelques propriétés fondamentales des fonctions uniformes de deux variables, en complétant, par une remarque, un beau théorème de M. Poincaré.

8. D'après un théorème de M. Poincaré (*Acta mathematica*, t. II), une fonction analytique uniforme $f(x,y)$ de deux variables x et y, se comportant comme une fraction rationnelle en tous les points à distance finie, peut s'écrire sous la forme

$$f(x,y) = \frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)},$$

les fonctions $\varphi(x,y)$ et $\psi(x,y)$ étant *entières*, et ne s'annulant simultanément qu'aux points où la fonction $f(x,y)$ est indéterminée. Précisons ce dernier point en nous reportant au Mémoire de M. Weierstrass : *Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze*, dont l'exposition détaillée a fait le sujet de la Thèse de doctorat de M. Dautheville (Paris, 1885). Soit

$$x = x_0, \qquad y = y_0$$

un point où les deux fonctions φ et ψ s'annulent. Faisons, comme à la page 25 de la Thèse de M. Dautheville, le changement de variables

$$x - x_0 = c_{11} x_1 + c_{12} y_1, \qquad y - y_0 = c_{21} x_1 + c_{22} y_1,$$

le déterminant des constantes c_{ik}

$$c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}$$

étant différent de zéro et les deux séries φ et ψ ne s'annulant pas identiquement (quel que soit x_1) pour $y_1 = 0$. Alors on peut déterminer un domaine δ du point $x_1 = 0, y_1 = 0$, dans lequel on a

$$\varphi(x,y) = \mathrm{P}\varphi_0, \qquad \psi(x,y) = \mathrm{Q}\psi_0,$$

φ_0 et ψ_0 désignant des séries qui ne s'annulent pas dans le domaine δ, P et Q des polynômes en x_1,

$$P = x_1^\mu + P_1 x_1^{\mu-1} + \ldots + P_\mu,$$
$$Q = x_1^\nu + Q_1 x_1^{\nu-1} + \ldots + Q_\nu,$$

dont les coefficients $P_1, \ldots, P_\mu, Q_1, \ldots, Q_\nu$ sont des séries entières en y_1 dépourvues de termes constants. *On peut toujours supposer le domaine δ assez petit pour que ces deux polynômes ne puissent s'annuler simultanément dans ce domaine que pour $x_1 = y_1 = 0$.*

En effet, formons le résultant de ces deux polynômes : ce sera une série entière en y_1 dépourvue de terme constant. Si ce résultant n'est pas *identiquement nul*, on pourra prendre δ assez petit pour que, dans le domaine δ, il ne s'annule que pour $y_1 = 0$; ce qui démontre la proposition. Si ce résultant était identiquement nul, quelle que soit la valeur attribuée à y_1 dans le domaine δ, les deux polynômes P et Q en x_1 admettraient un diviseur commun D de la même forme qu'eux,

$$P = DP', \qquad Q = DQ',$$

et l'on pourrait trouver dans le domaine δ des valeurs de x_1 et y_1 annulant D sans annuler simultanément P′ et Q′; on aurait ainsi des systèmes de valeurs annulant φ et ψ sans que, pour ces valeurs, le rapport

$$\frac{\varphi}{\psi} = \frac{P\varphi_0}{Q\psi_0} = \frac{P'\varphi_0}{Q'\psi_0}$$

soit *indéterminé;* ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur les deux fonctions entières φ et ψ.

Cela posé, admettons que la fonction $f(x, y)$ ait été mise d'une autre façon sous la forme

$$f(x,y) = \frac{\varphi_1(x,y)}{\psi_1(x,y)},$$

φ_1 et ψ_1 étant également des fonctions entières. On aura l'identité

$$(15) \qquad \frac{\varphi_1(x,y)}{\psi_1(x,y)} = \frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)}.$$

Nous allons montrer que le rapport

$$(16) \qquad \frac{\varphi_1(x,y)}{\varphi(x,y)}$$

est une fonction *régulière en tous les points à distance finie*, c'est-à-dire *une fonction entière* $G(x,y)$. De sorte que l'identité (15) entraîne

$$\varphi_1(x,y) = G(x,y)\,\varphi(x,y),$$
$$\psi_1(x,y) = G(x,y)\,\psi(x,y).$$

Les seuls points où le rapport (16) $\frac{\varphi_1}{\varphi}$ peut cesser d'être régulier sont les points où $\varphi(x,y)$ s'annule. Soit x_0, y_0 un de ces points; deux cas sont à distinguer, suivant que $\psi(x,y)$ s'annule ou non au point x_0, y_0 :

1° La fonction $\psi(x,y)$ ne s'annule pas au point x_0, y_0; alors, comme l'identité (15) donne

$$\frac{\varphi_1(x,y)}{\varphi(x,y)} = \frac{\psi_1(x,y)}{\psi(x,y)},$$

et que le second rapport est régulier au point x_0, y_0, il en est de même du premier.

2° La fonction $\psi(x,y)$ s'annule aussi au point x_0, y_0. Alors $\varphi_1(x,y)$ s'annule également en ce point, car, si cette fonction n'était pas nulle, le premier terme de l'identité (15) aurait au point x_0, y_0 une valeur déterminée, finie ou infinie, et le second terme serait indéterminé au même point; ce qui est impossible.

Les trois fonctions

$$\varphi(x,y), \quad \psi(x,y), \quad \varphi_1(x,y)$$

s'annulant au même point x_0, y_0, faisons, comme plus haut,

$$x - x_0 = c_{11}x_1 + c_{12}y_1, \qquad y - y_0 = c_{21}x_1 + c_{22}y_1,$$

le déterminant des constantes c_{ik} n'étant pas nul, et ces constantes étant choisies de telle façon que les trois fonctions ne s'annulent pas identiquement pour $y_1 = 0$, quel que soit x_1. On a alors, dans un certain domaine δ du point $x_1 = 0$, $y_1 = 0$,

$$\varphi(x,y) = P\varphi_0, \qquad \psi(x,y) = Q\psi_0, \qquad \varphi_1(x,y) = R\varphi_{1,0},$$

φ_0, ψ_0 et $\varphi_{1,0}$ désignant des séries qui ne s'annulent pas dans le domaine δ, P, Q, R des polynômes en x_1,

$$\begin{aligned} P &= x_1^\mu + P_1 x_1^{\mu-1} + \ldots + P_\mu, \\ Q &= x_1^\nu + Q_1 x_1^{\nu-1} + \ldots + Q_\nu, \\ R &= x_1^\rho + R_1 x_1^{\rho-1} + \ldots + R_\rho, \end{aligned}$$

dont les coefficients sont des séries entières en y_1 dépourvues de termes constants. Si l'on remplace $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ et $\varphi_1(x,y)$ par ces expressions dans l'identité (15)

$$\frac{\varphi_1(x,y)}{\psi_1(x,y)} = \frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)},$$

on a une relation qu'on peut écrire

$$(17) \qquad \frac{QR}{P} = \frac{\varphi_0\psi_1(x,y)}{\varphi_{1,0}\psi_0}.$$

Le second membre de cette identité est une fonction régulière dans le domaine δ, puisque les séries $\varphi_{1,0}$ et ψ_0 ne s'annulent pas dans ce domaine : le premier membre est donc aussi une fonction régulière dans ce domaine. Il en résulte que le polynôme R doit être divisible par P. En effet, donnons à y_1 une valeur non nulle assez petite pour que les p racines du polynôme P soient dans le domaine δ; si δ est assez petit, aucune de ces racines ne peut annuler Q, comme nous l'avons vu, elles annulent donc toutes R : car, autrement, en faisant x_1 égal à une de ces racines, on rendrait le premier membre infini, le second restant fini dans l'identité (17). Donc, quelle que soit la valeur attribuée à y_1, pourvu que son module soit inférieur à une certaine limite, les μ racines du polynôme P annulent R. Le polynôme R est donc divisible par P, et l'on a

$$R = PR',$$

R' étant un polynôme de la même forme que R. Le rapport

$$\frac{\varphi_1(x,y)}{\varphi(x,y)} = \frac{R\varphi_{1,0}}{P\varphi_0} = R' \frac{\varphi_{1,0}}{\varphi_0}$$

se comporte donc régulièrement dans le domaine δ et, en particulier, au point x_0, y_0.

C'est ce que nous voulions démontrer.

9. Soit $f(x,y)$ une fonction uniforme de x et y se comportant à distance finie comme une fraction rationnelle. Cette fonction peut s'écrire sous forme du quotient de deux fonctions entières $\varphi(x,y)$ et $\psi(x,y)$

$$f(x,y) = \frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)},$$

les fonctions φ et ψ ne s'annulant simultanément qu'aux points où la fonction est réellement indéterminée. Ce mode de représentation n'est pas unique; on en obtient évidemment une infinité d'autres possédant les mêmes propriétés en multipliant le numérateur et le dénominateur de $f(x,y)$ par une même fonction entière *n'ayant pas de zéros*, c'est-à-dire par une exponentielle dont l'exposant est une fonction entière.

Supposons que la fonction $f(x,y)$ admette un groupe de périodes (a,b), c'est-à-dire que

$$f(x+a, y+b) = f(x,y).$$

On aura l'identité

$$(18) \qquad \frac{\varphi(x+a, y+b)}{\psi(x+a, y+b)} = \frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)}.$$

La fonction $f(x,y)$ est ainsi mise sous la forme du quotient de deux nouvelles fonctions entières

$$\varphi(x+a, y+b) \qquad \text{et} \qquad \psi(x+a, y+b).$$

On aura donc, en vertu de la remarque que nous avons faite dans le numéro précédent,

$$\varphi(x+a, y+b) = G(x, y)\,\varphi(x, y),$$
$$\psi(x+a, y+b) = G(x, y)\,\psi(x, y),$$

$G(x, y)$ désignant une fonction entière.

Si dans l'identité (18) nous faisons pour un instant

$$x = x' - a, \qquad y = y' - b,$$

elle devient

$$\frac{\varphi(x', y')}{\psi(x', y')} = \frac{\varphi(x'-a, y'-b)}{\psi(x'-a, y'-b)},$$

ce qui montre que le rapport

$$\frac{\varphi(x'-a, y'-b)}{\varphi(x', y')} = \frac{\varphi(x, y)}{\varphi(x+a, y+b)} = \frac{1}{G(x, y)}$$

est une fonction entière. La fonction $G(x, y)$ est donc telle que son inverse est aussi une fonction entière, d'où l'on conclut que $G(x, y)$ est de la forme

$$G(x, y) = e^{g(x, y)},$$

où $g(x, y)$ est une fonction entière.

En résumé, si la fonction $f(x, y)$ admet un groupe de périodes (a, b), on a

$$(19) \qquad \frac{\varphi(x+a, y+b)}{\varphi(x, y)} = \frac{\psi(x+a, y+b)}{\psi(x, y)} = e^{g(x, y)}.$$

10. Cela posé, supposons d'abord que la fonction $f(x, y)$ ait deux groupes de périodes que nous pouvons toujours, pour simplifier, ramener à être $(2\pi i, 0)$, $(0, 2\pi i)$,

$$f(x+2\pi i, y) = f(x, y), \qquad f(x, y+2\pi i) = f(x, y).$$

Nous aurons

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{\varphi(x+2\pi i, y)}{\varphi(x,y)} = \dfrac{\psi(x+2\pi i, y)}{\psi(x,y)} = e^{g(x,y)}, \\[2ex] \dfrac{\varphi(x, y+2\pi i)}{\varphi(x,y)} = \dfrac{\psi(x, y+2\pi i)}{\varphi(x,y)} = e^{h(x,y)}, \end{cases}$$

$g(x,y)$ et $h(x,y)$ désignant des fonctions entières.

Si, dans la première des relations (20), on change y en $y+2\pi i$ et si l'on tient compte de la deuxième, il vient

$$\frac{\varphi(x+2\pi i, y+2\pi i)}{\varphi(x,y)} = e^{g(x,y+2\pi i)+h(x,y)};$$

de même, en changeant, dans la seconde, x en $x+2\pi i$ et en tenant compte de la première, on a

$$\frac{\varphi(x+2\pi i, y+2\pi i)}{\varphi(x,y)} = e^{g(x,y)+h(x+2\pi i,y)}.$$

Donc

$$g(x,y+2\pi i)+h(x,y) = g(x,y)+h(x+2\pi i,y)-2ni\pi.$$

où n est un nombre entier; nous écrirons cette formule de la façon suivante

$$(21)\qquad \begin{cases} g(x,y+2\pi i)-g(x,y) \\ \quad = h(x+2\pi i,y)-n(x+2\pi i)-h(x,y)+nx. \end{cases}$$

Cela posé, formons, par la méthode indiquée au n° **4**, une fonction entière $\lambda(x,y)$, vérifiant les deux relations

$$\lambda(x+2\pi i,y)-\lambda(x,y) = g(x,y),$$
$$\lambda(x,y+2\pi i)-\lambda(x,y) = h(x,y)-nx.$$

compatibles en vertu de la relation (21); et soient

$$\varphi_1(x,y) = \varphi(x,y)e^{-\lambda(x,y)},$$
$$\psi_1(x,y) = \psi(x,y)e^{-\lambda(x,y)};$$

on aura une nouvelle expression de la fonction $f(x, y)$,

$$f(x, y) = \frac{\varphi_1(x, y)}{\psi_1(x, y)},$$

où le numérateur et le dénominateur ne s'annulent simultanément qu'aux points où la fonction est indéterminée, et vérifient les deux relations

$$(22) \qquad \begin{cases} \varphi_1(x + 2\pi i, y) = \varphi_1(x, y), \\ \varphi_1(x, y + 2\pi i) = e^{nx}\varphi_1(x, y), \\ \psi_1(x + 2\pi i, y) = \psi_1(x, y), \\ \psi_1(x, y + 2\pi i) = e^{nx}\psi_1(x, y). \end{cases}$$

Nous avons vu qu'une fonction d'une variable, sans singularités essentielles, avec une période, peut toujours s'écrire sous forme du quotient de deux fonctions entières, sans zéros communs, admettant séparément la même période. Pour la fonction $f(x, y)$ de deux variables avec deux groupes de périodes, nous venons d'obtenir un résultat différent. Cette fonction peut se mettre sous la forme du quotient de deux fonctions entières φ_1 et ψ_1, ne s'annulant simultanément qu'aux points d'indétermination et vérifiant les équations (22), c'est-à-dire n'admettant pas séparément les deux groupes de périodes de $f(x, y)$. On pourrait néanmoins mettre la fonction $f(x, y)$ sous forme du quotient de deux fonctions entières admettant séparément les deux groupes de périodes; mais cette nouvelle expression ne serait pas *irréductible*, en ce sens que son numérateur et son dénominateur seraient égaux à $\varphi_1(x, y)$ et $\psi_1(x, y)$ multipliés par une même fonction entière s'annulant nécessairement. C'est ce que nous montrerons dans un paragraphe particulier (n° **17**).

11. Imaginons maintenant que la fonction $f(x, y)$ admette deux autres groupes de périodes

$$(\alpha, \beta), \quad (\alpha', \beta'),$$

c'est-à-dire que

$$f(x + \alpha, y + \beta) = f(x, y),$$
$$f(x + \alpha', y + \beta') = f(x, y).$$

On aura les deux identités

$$\frac{\varphi_1(x+\alpha, y+\beta)}{\psi_1(x+\alpha, y+\beta)} = \frac{\varphi_1(x, y)}{\psi_1(x, y)},$$
$$\frac{\varphi_1(x+\alpha', y+\beta')}{\psi_1(x+\alpha', y+\beta')} = \frac{\varphi_1(x, y)}{\psi_1(x, y)},$$

d'où l'on conclut, comme nous l'avons montré au n° **9**, pour une paire de périodes quelconque,

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\varphi_1(x+\alpha, y+\beta)}{\varphi_1(x, y)} &= \frac{\psi_1(x+\alpha, y+\beta)}{\psi_1(x, y)} = e^{g_1(x,y)}, \\ \frac{\varphi_1(x+\alpha', y+\beta')}{\varphi_1(x, y)} &= \frac{\psi_1(x+\alpha', y+\beta')}{\psi_1(x, y)} = e^{h_1(x,y)}, \end{aligned}\right.$$

g_1 et h_1 désignant des fonctions entières. La comparaison des relations (23) et (22) va nous donner immédiatement des propriétés importantes de ces fonctions $g_1(x, y)$ et $h_1(x, y)$. Comme les fonctions φ_1 et ψ_1 admettent, par rapport à x, la période $2\pi i$, la première des relations (23) montre que l'on a

$$e^{g_1(x+2\pi i, y)} = e^{g_1(x,y)}, \qquad g_1(x+2\pi i, y) = g_1(x, y) + 2ai\pi,$$

a désignant un nombre entier. Dans la première des relations (23) changeons y en $y + 2\pi i$ et rappelons-nous que

$$\varphi_1(x, y+2\pi i) = e^{nx}\varphi_1(x, y),$$
$$\varphi_1(x+\alpha, y+\beta+2\pi i) = e^{nx+n\alpha}\varphi_1(x+\alpha, y+\beta),$$

nous aurons

$$e^{g_1(x, y+2i\pi)} = e^{n\alpha+g_1(x,y)};$$

d'où

$$g_1(x, y+2i\pi) = g_1(x, y) + n\alpha + 2bi\pi,$$

b désignant un entier. Les deux formules ainsi obtenues montrent que la fonction

$$(24)\qquad g_1(x, y) - ax - by - \frac{n\alpha}{2i\pi}y$$

admet la période $2i\pi$ par rapport à x et aussi par rapport à y. Elle est donc, par la formule de Fourier, développable en une double série ordonnée suivant les puissances positives et négatives de e^x et e^y,

$$g_1(x, y) - ax - by - \frac{n\alpha}{2i\pi} y = \sum_{p,q=-\infty}^{p,q=+\infty} A_{p,q} e^{px+qy},$$

p et q désignant des entiers prenant toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$. Cette formule donne

$$(25) \qquad g_1(x, y) = ax + by + \frac{n\alpha}{2i\pi} y + \sum_{p,q=-\infty}^{p,q=+\infty} A_{p,q} e^{px+qy}.$$

En partant de la seconde des relations (23) on trouvera de même

$$(26) \qquad h_1(x, y) = a'x + b'y + \frac{n\alpha'}{2i\pi} + \sum_{p,q=-\infty}^{p,q=+\infty} B_{p,q} e^{px+qy},$$

a' et b' désignant des entiers.

Enfin la comparaison des deux relations (23) va nous fournir une dernière équation liant les fonctions g_1 et h_1. Écrivons les relations (23)

$$\frac{\varphi_1(x + \alpha, y + \beta)}{\varphi_1(x, y)} = e^{g_1(x, y)},$$

$$\frac{\varphi_1(x + \alpha', y + \beta')}{\varphi_1(x, y)} = e^{h_1(x, y)};$$

dans la première changeons x et $x + \alpha'$, y en $y + \beta'$ et tenons compte de la deuxième; nous aurons

$$\frac{\varphi_1(x + \alpha + \alpha', y + \beta + \beta')}{\varphi_1(x, y)} = e^{g_1(x+\alpha', y+\beta') + h_1(x, y)};$$

puis changeons dans la deuxième x en $x + \alpha$, y en $y + \beta$ et tenons compte de la première; nous aurons de même

$$\frac{\varphi_1(x + \alpha + \alpha', y + \beta + \beta')}{\varphi_1(x, y)} = e^{g_1(x, y) + h_1(x+\alpha, y+\beta)}.$$

On en conclut que les deux exponentielles formant les seconds membres sont égales, c'est-à-dire

$$g_1(x+\alpha', y+\beta') + h_1(x, y) = g_1(x, y) + h_1(x+\alpha, y+\beta) + 2Ni\pi,$$

N étant un entier.

Écrivons cette relation sous la forme

$$(27)\qquad \begin{cases} g_1(x+\alpha', y+\beta') - g_1(x, y) \\ \quad = h_1(x+\alpha, y+\beta) - h_1(x, y) + 2Ni\pi, \end{cases}$$

et remplaçons-y $g_1(x, y)$ et $h_1(x, y)$ par les développements en séries (25) et (26) obtenus précédemment. Nous aurons, en égalant les coefficients de e^{px+qy} dans les deux membres de la relation (27),

$$(28)\qquad A_{p,q}(e^{p\alpha'+q\beta'} - 1) = B_{p,q}(e^{p\alpha+q\beta} - 1),$$

tant que p et q ne sont pas nuls tous deux. Puis, en égalant les termes indépendants de e^x et e^y dans les deux membres de la relation (27)

$$(29)\qquad a\alpha' + b\beta' + \frac{n\alpha\beta'}{2\pi i} = a'\alpha + b'\beta + \frac{n\beta\alpha'}{2\pi i} + 2Ni\pi.$$

On arrive ainsi à une relation entre les périodes qui est des plus dignes d'attention. Elle permet, en effet, de montrer que, par une transformation convenable, on peut ramener les quatre paires de périodes à la forme normale $(2\pi i, 0)$, $(0, 2\pi i)$, (A, B), (A', B') avec la condition

$$B = A'.$$

Mais il faut que nous nous assurions d'abord de ce fait que les coefficients

$$a,\quad a',\quad b,\quad b',\quad n,\quad N$$

ne sont pas tous nuls; c'est ce qui résultera des développements suivants.

12. Déterminons une fonction entière $\lambda(x, y)$ par les conditions suivantes : cette fonction doit admettre la période $2i\pi$ par rapport à x et à y séparément ; elle doit de plus vérifier les deux relations compatibles

$$(30)\quad \begin{cases} \lambda(x+\alpha, y+\beta) - \lambda(x,y) \\ \qquad = g_1(x,y) - ax - by - \dfrac{n\alpha}{2i\pi}y - A_{0,0} = \sum' A_{p,q}\, e^{px+qy}, \\ \lambda(x+\alpha', y+\beta') - \lambda(x,y) \\ \qquad = h_1(x,y) - a'x - b'y - \dfrac{n\alpha'}{2i\pi}y - B_{0,0} = \sum' B_{p,q}\, e^{px+qy}, \end{cases}$$

le signe $\sum'$ signifiant que la sommation est étendue aux valeurs entières de p et q, de $-\infty$ à $+\infty$, la combinaison $p=q=0$ étant exceptée.

La fonction $\lambda(x, y)$ devant admettre la période $2i\pi$, par rapport à x et à y, est donnée par une série de la forme

$$\lambda(x,y) = \sum_{p,q=-\infty}^{p,q=+\infty} C_{p,q}\, e^{px+qy}.$$

En écrivant que cette fonction vérifie les relations (30), on détermine tous les coefficients $C_{p,q}$, sauf $C_{0,0}$, par les formules

$$(31)\qquad C_{p,q} = \frac{A_{p,q}}{e^{p\alpha+q\beta}-1} = \frac{B_{p,q}}{e^{p\alpha'+q\beta'}-1},$$

qui sont *compatibles* en vertu de la relation (28) établie précédemment,

$$(28)\qquad A_{p,q}(e^{p\alpha'+q\beta'}-1) = B_{p,q}(e^{p\alpha+q\beta}-1).$$

Il nous reste à démontrer qu'en prenant ces valeurs (31) pour les coefficients $C_{p,q}$, autres que $C_{0,0}$, la série qui définit $\lambda(x, y)$ est *convergente quels que soient x et y*.

La démonstration repose sur les deux faits suivants qui sont connus et sur lesquels nous reviendrons plus loin (n° **14**).

1° Les quantités

$$e^{p\alpha+q\beta}-1,\quad e^{p\alpha'+q\beta'}-1$$

ne peuvent pas s'annuler pour des valeurs de p et q, non nulles toutes deux, car autrement il y aurait réduction dans les périodes.

2° Quelque petit que soit un nombre positif ε, il existe une infinité de nombres p et q tels que

$$|e^{p\alpha+q\beta}-1| \leqq \varepsilon;$$

mais on peut prendre ε assez petit pour qu'en même temps

$$|e^{p\alpha'+q\beta'}-1| > \varepsilon.$$

En d'autres termes, il est impossible que, quelque petit que soit un nombre positif, il existe des entiers p et q rendant en même temps les modules de

$$e^{p\alpha+q\beta}-1, \quad e^{p\alpha'+q\beta'}-1$$

moindres que ce nombre.

Cela posé, le nombre ε étant choisi, comme nous venons de le dire, partageons la série qui donne $\lambda(x, y)$ en deux parties,

$$\lambda(x,y) = C_{0,0} + \sum\nolimits_1 C_{p,q}\, e^{px+qy} + \sum\nolimits_2 C_{p,q}\, e^{px+qy},$$

la première partie $\sum_1$ comprenant les termes qui correspondent aux valeurs de p et q pour lesquelles

$$|e^{p\alpha+q\beta}-1| > \varepsilon,$$

la deuxième $\sum_2$ comprenant les termes dans lesquels

$$|e^{p\alpha+q\beta}-1| \leqq \varepsilon,$$

et, par suite,

$$|e^{p\alpha'+q\beta'}-1| > \varepsilon.$$

La première partie $\sum_1$ est convergente; car, d'après la valeur

$$C_{p,q} = \frac{A_{p,q}}{e^{p\alpha+q\beta}-1},$$

le module d'un terme de $\sum_1$ est moindre que

$$\frac{1}{\varepsilon}\left| A_{p,q}\, e^{px+qy} \right|,$$

c'est-à-dire moindre que le module d'un terme de la série absolument convergente

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum{}' A_{p,q}\, e^{px+qy}.$$

La deuxième partie $\sum_2$ est également convergente; car, d'après la valeur

$$C_{p,q} = \frac{B_{p,q}}{e^{p\alpha'+q\beta'}-1},$$

le module d'un terme de $\sum_2$ est moindre que

$$\frac{1}{\varepsilon}\left| B_{p,q}\, e^{px+qy} \right|,$$

c'est-à-dire moindre que le module d'un terme de la série absolument convergente

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum{}' B_{p,q}\, e^{px+qy}.$$

15. La fonction entière $\lambda(x,y)$ étant ainsi déterminée, posons

$$\begin{aligned}\Phi(x,y) &= \varphi_1(x,y)\, e^{-\lambda(x,y)},\\ \Psi(x,y) &= \psi_1(x,y)\, e^{-\lambda(x,y)},\end{aligned}$$

on aura

$$f(x,y) = \frac{\varphi_1(x,y)}{\psi_1(x,y)} = \frac{\Phi(x,y)}{\Psi(x,y)},$$

où les fonctions entières $\Phi(x,y)$ et $\Psi(x,y)$ ne s'annulent simultanément qu'aux points d'indétermination, et vérifient les relations suivantes, qui sont une conséquence immédiate des relations (22) et (23) que vérifient φ_1 et ψ_1 et des relations (30) que vérifie $\lambda(x, y)$,

$$(32)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Phi(x+2\pi i, y)}{\Phi(x, y)} &= \frac{\Psi(x+2\pi i, y)}{\Psi(x, y)} = 1, \\ \frac{\Phi(x, y+2\pi i)}{\Phi(x, y)} &= \frac{\Psi(x, y+2\pi i)}{\Psi(x, y)} = e^{nx}, \\ \frac{\Phi(x+\alpha, y+\beta)}{\Phi(x, y)} &= \frac{\Psi(x+\alpha, y+\beta)}{\Psi(x, y)} = e^{ax+by+\frac{n\alpha}{2i\pi}y+c}, \\ \frac{\Phi(x+\alpha', y+\beta')}{\Phi(x, y)} &= \frac{\Psi(x+\alpha', y+\beta')}{\Psi(x, y)} = e^{a'x+b'y+\frac{n\alpha'}{2i\pi}y+c'}, \end{aligned} \right.$$

où c et c' désignent les constantes $A_{0,0}$ et $B_{0,0}$. On voit maintenant avec facilité que ces fonctions entières Φ et Ψ peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions Θ.

Commençons par montrer, comme nous l'avons déjà annoncé, que les entiers

$$a, \quad b, \quad a', \quad b', \quad n$$

ne peuvent pas être tous nuls. Nous allons montrer que les nombres a, b, n ne peuvent pas être nuls en même temps. Si ces trois nombres étaient nuls, la fonction $\Phi(x, y)$ serait une fonction entière admettant les groupes de périodes $(2\pi i, 0)$, $(0, 2\pi i)$ et se reproduisant multipliée par une constante quand on ajoute à x et à y le groupe de périodes (α, β). Or une telle fonction se réduit à une fonction exponentielle. En effet, on aura d'abord

$$\Phi(x, y) = \sum_{p,q=-\infty}^{p,q=+\infty} a_{p,q} e^{px+qy};$$

puis, exprimant que cette fonction vérifie l'équation

$$\Phi(x+\alpha, y+\beta) = e^c \Phi(x, y),$$

on trouve

$$a_{p,q}(e^{p\alpha+q\beta} - e^c) = 0.$$

Donc, tous les coefficients $a_{p,q}$ sont nuls, à moins qu'il n'existe un système de valeurs de p et q,

$$p = \mathrm{P}, \qquad q = \mathrm{Q},$$

telles que

$$e^{\mathrm{P}\alpha + \mathrm{Q}\beta} = e^{c}.$$

Le coefficient $a_{\mathrm{P},\mathrm{Q}}$ est alors arbitraire. Mais ce fait peut se présenter au plus pour un système de valeurs de p et q, car, si l'on avait aussi

$$e^{p\alpha+q\beta} = e^{c},$$

on en conclurait

$$(\mathrm{P}-p)\alpha + (\mathrm{Q}-q)\beta = 2k\pi i \qquad (k \text{ entier}),$$

et il y aurait réduction dans les périodes (n° **14**). La fonction Φ se réduit donc à un seul terme

$$\Phi(x,y) = \mathrm{A}e^{\mathrm{P}x+\mathrm{Q}y};$$

on trouve de même

$$\Psi = \mathrm{B}e^{\mathrm{P}x+\mathrm{Q}y}$$

et, par suite, la fonction $f(x,y)$ serait *constante*.

Revenons donc aux relations (32),

$$(32)\qquad \begin{cases} \Phi(x+2\pi i,y) = \Phi(x,y), \\ \Phi(x,y+2\pi i) = e^{nx}\Phi(x,y), \\ \Phi(x+\alpha,y+\beta) = e^{ax+by+\frac{n\alpha}{2\pi i}y+c}\,\Phi(x,y), \\ \Phi(x+\alpha',y+\beta') = e^{a'x+b'y+\frac{n\alpha'}{2\pi i}y+c'}\,\Phi(x,y), \end{cases}$$

où n, a, b, a', b' sont des entiers, les périodes étant liées par la relation (29),

$$(29)\qquad a\alpha' + b\beta' + \frac{n\alpha\beta'}{2\pi i} = a'\alpha + b'\beta + \frac{n\beta\alpha'}{2\pi i} + 2\mathrm{N}i\pi.$$

Nous distinguerons deux cas, suivant que l'entier n est nul ou non, et nous montrerons que le second cas se ramène au premier.

Premier cas $n=0$. — La fonction Φ admet alors les paires de périodes $(2\pi i, 0)$ et $(0, 2\pi i)$. Les entiers a et b ne sont pas nuls tous deux, ni les entiers a' et b', comme nous venons de le voir. Soit δ le déterminant

$$\delta = ab' - ba'.$$

Il résulte des relations (32) que l'on a

$$\begin{aligned}
\Phi(x + a'\alpha - a\alpha', y + a'\beta - a\beta') &= e^{-\delta y + \varepsilon'}\Phi(x, y),\\
\Phi(x - b'\alpha + b\alpha', y - b'\beta + b\beta') &= e^{-\delta x + \varepsilon}\Phi(x, y),
\end{aligned}$$

ε et ε' désignant des constantes. Ces relations montrent que δ ne peut pas être nul; car, autrement, $\Phi(x, y)$ serait une fonction entière admettant les groupes de périodes $(2\pi i, 0)$, $(0, 2\pi i)$ et se reproduisant multipliée par une constante quand on ajoute à x et y le groupe de périodes

$$a'\alpha - a\alpha', \quad a'\beta - a\beta',$$

distinct des deux premiers, ce qui est impossible, comme nous l'avons vu ci-dessus (p. 195). Le déterminant δ n'étant pas nul, prenons pour nouvelles périodes les quantités

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= b\alpha' - b'\alpha, & \mathrm{B} &= b\beta' - b'\beta,\\
\mathrm{A}' &= a'\alpha - a\alpha' + 2\mathrm{N}i\pi, & \mathrm{B}' &= a'\beta - a\beta',
\end{aligned}$$

qui sont distinctes comme les périodes primitives, et nous aurons

$$\begin{aligned}
\Phi(x + 2\pi i, y) &= \Phi(x, y),\\
\Phi(x, y + 2\pi i) &= \Phi(x, y),\\
\Phi(x + \mathrm{A}, y + \mathrm{B}) &= e^{-\delta x + \varepsilon}\Phi(x, y),\\
\Phi(x + \mathrm{A}', y + \mathrm{B}') &= e^{-\delta y + \varepsilon'}\Phi(x, y);
\end{aligned}$$

la relation (29) donnera, en outre,

$$\mathrm{B} = \mathrm{A}',$$

ce qui montre que la fonction Φ s'exprime à l'aide des fonctions Θ.

Deuxième cas, n différent de zéro. — On ramène ce cas au précédent de la façon suivante. Les trois premières relations (32) donnent

$$\Phi(x+2\pi i, y) = \Phi(x, y),$$
$$\Phi(x, y+2\pi i) = e^{nx}\Phi(x, y),$$
$$\Phi(x+\alpha, y+\beta) = e^{ax+by+\frac{n\alpha}{2\pi i}y+c}\Phi(x, y).$$

Donc, puisque n, a, b sont des entiers,

$$\Phi(x+n\alpha+2b\pi i, y+n\beta-2a\pi i) = e^{ly+k}\Phi(x, y),$$

où l et k désignent deux constantes dont la première a pour valeur

$$l = bn + \frac{n^2\alpha}{2i\pi}.$$

On trouve de même

$$\Phi(x+n\alpha'+2b'\pi i, y+n\beta'-2a'\pi i) = e^{l'y+k'}\Phi(x, y),$$

où

$$l' = b'n + \frac{n^2\alpha'}{2i\pi}.$$

Nous pouvons dire que la fonction $f(x, y)$, qui admet les quatre groupes de périodes

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (\alpha, \beta), \quad (\alpha', \beta'),$$

admet aussi les groupes de périodes

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (\alpha_1, \beta_1), \quad (\alpha'_1, \beta'_1),$$

en posant

$$\alpha_1 = n\alpha + 2b\pi i, \qquad \beta_1 = n\beta - 2a\pi i,$$
$$\alpha'_1 = n\alpha' + 2b'\pi i, \qquad \beta'_1 = n\beta' - 2a'\pi i.$$

Ces nouvelles paires de périodes sont indépendantes comme les premières. Les relations (32) deviennent alors

$$\begin{aligned}
&\Phi(x + 2\pi i, y) = \Phi(x, y),\\
&\Phi(x, y + 2\pi i) = e^{nx}\Phi(x, y),\\
&\Phi(x + \alpha_1, y + \beta_1) = e^{ly+k}\Phi(x, y),\\
&\Phi(x + \alpha'_1, y + \beta'_1) = e^{l'y+k'}\Phi(x, y)
\end{aligned}$$

et la relation (29) entre les périodes devient, si l'on y remplace α, β, α', β' par leurs expressions en fonction de α_1, β_1, α'_1, β'_1,

$$\begin{aligned}
n\alpha &= \alpha_1 - 2b\pi i, & n\alpha' &= \alpha'_1 - 2b'\pi i,\\
n\beta &= \beta_1 + 2a\pi i, & n\beta' &= \beta'_1 + 2a'\pi i,
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi i}(\beta_1\alpha'_1 - \alpha_1\beta'_1) = 2Mi\pi, \tag{33}$$

M désignant un entier.

Il est évident que la période β_1 n'est pas nulle, car, si l'on avait $\beta_1 = 0$, il y aurait réduction pour les périodes : la fonction $f(x, y)$ serait doublement périodique par rapport à x seul. Si nous posons

$$\Phi_1(x, y) = e^{\lambda y^2 + \mu y}\Phi(x, y),$$

nous pourrons déterminer les constantes λ et μ de façon que $\Phi_1(x, y)$ admette le groupe de périodes α_1, β_1. Nous aurons

$$\lambda = -\frac{l}{2\beta_1} = -\frac{n}{4i\pi}\frac{\alpha_1}{\beta_1},$$

puisque

$$l = bn + \frac{n^2\alpha}{2i\pi} = \frac{n\alpha_1}{2i\pi}.$$

La fonction Φ_1 vérifie alors les relations suivantes

$$\begin{aligned}
&\Phi_1(x + 2\pi i, y) = \Phi_1(x, y),\\
&\Phi_1(x, y + 2\pi i) = e^{nx + 4\pi i\lambda y + c_1}\Phi_1(x, y),\\
&\Phi_1(x + \alpha_1, y + \beta_1) = \Phi_1(x, y),\\
&\Phi_1(x + \alpha'_1, y + \beta'_1) = e^{(l' + 2\lambda\beta'_1)y + c'_1}\Phi_1(x, y),
\end{aligned}$$

c_1 et c'_1 désignant des constantes. Dans ces relations, on a

$$4\pi i\lambda = -n\frac{\alpha_1}{\beta_1},$$

$$l' + 2\lambda\beta'_1 = \frac{n\alpha'_1}{2i\pi} - \frac{n\alpha_1\beta'_1}{2i\pi\beta_1} = \frac{2Mni\pi}{\beta_1},$$

en vertu de la relation (33). L'entier M qui figure dans cette relation (33) ne peut pas être nul, sans quoi le déterminant des périodes

$$\beta_1\alpha'_1 - \alpha_1\beta'_1$$

serait nul et il y aurait réduction dans les périodes (*voir* n° **14**). Nous écrirons alors les relations ci-dessus que vérifie la fonction Φ_1 sous la forme définitive suivante, où nous prenons comme deuxième groupe de périodes $(0, 2M\pi i)$ au lieu de $(0, 2\pi i)$,

$$\begin{aligned}
&\Phi_1(x+2\pi i, y) = \Phi_1(x, y),\\
&\Phi_1(x, y+2M\pi i) = e^{Mn\left(x-\frac{\alpha_1}{\beta_1}y\right)+C}\Phi_1(x, y),\\
&\Phi_1(x+\alpha_1, y+\beta_1) = \Phi_1(x, y),\\
&\Phi_1(x+\alpha'_1, y+\beta'_1) = e^{2Mni\pi\frac{y}{\beta_1}+C'}\Phi_1(x, y),
\end{aligned}$$

C et C' étant des constantes.

Faisons enfin un changement linéaire de variables, en posant

$$X = x - \frac{\alpha_1}{\beta_1}y, \qquad Y = \frac{2\pi i}{\beta_1}y,$$

$$\Phi_1(x, y) = \Phi_2(X, Y).$$

Les paires de périodes de X et Y correspondant aux paires de périodes de x et y seront données par le Tableau suivant :

Périodes de x et y.	Périodes de X et Y.
$(2\pi i, 0)$	$(2\pi i, 0)$
$(0, 2M\pi i)$	(A, B)
(α_1, β_1)	$(0, 2\pi i)$
(α'_1, β'_1)	(A', B')

où l'on a posé

$$A = -2M\pi i\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \qquad B = -\frac{4\pi^2 M}{\beta_1},$$
$$A' = \frac{\beta_1\alpha'_1 - \alpha_1\beta'_1}{\beta_1}, \qquad B' = \frac{2\pi i\beta'_1}{\beta_1}.$$

On aura alors

$$\begin{aligned}
&\Phi_2(X + 2\pi i, Y) = \Phi_2(X, Y),\\
&\Phi_2(X, Y + 2\pi i) = \Phi_2(X, Y),\\
&\Phi_2(X + A, Y + B) = e^{MnX+C}\Phi_2(X, Y),\\
&\Phi_2(X + A', Y + B') = e^{MnY+C'}\Phi_2(X, Y),
\end{aligned}$$

et la relation (33) donne

$$B = A' \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On retrouve donc, dans les deux cas, $n = 0$ ou $n \gtrless 0$, les équations caractéristiques des fonctions Θ, fournissant immédiatement ces fonctions par la méthode des coefficients indéterminés. La fonction $\Psi(x, y)$ pouvant s'exprimer de la même façon, on arrive à ce théorème que la fonction $f(x, y)$ est le quotient de deux fonctions entières composées avec des fonctions Θ de deux variables.

14. *Remarques sur les périodes* (¹). — Soit $f(x, y)$ une fonction uniforme admettant les quatre paires de périodes indépendantes

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (\alpha, \beta), \quad (\alpha', \beta'),$$

de telle façon que l'on ait

$$f(x + 2h\pi i + m\alpha + m'\alpha', y + 2k\pi i + m\beta + m'\beta') = f(x, y),$$

quels que soient les nombres entiers h, k, m et m'.

1° Il est impossible qu'il y ait une relation de la forme

$$(34) \qquad 2k\pi i + m\beta + m'\beta' = 0,$$

(¹) *Voir* les recherches de M. Kronecker, *Sur les systèmes de périodes.*

k, m, m' désignant des entiers. En effet, dans cette hypothèse, la quantité

$$\omega = 2h\pi i + m\alpha + m'\alpha'$$

n'est pas nulle en même temps pour une détermination convenable de l'entier h, et l'on ne peut pas avoir, d'une façon plus générale,

$$(35) \qquad 2M\pi i + N\omega = 0,$$

M et N étant des entiers; car, si une telle relation avait lieu, on aurait, d'après la valeur de ω,

$$2Pi\pi + mN\alpha + mN\alpha' = 0 \qquad (\text{P entier})$$

et, d'après (34),

$$2Nki\pi + mN\beta + mN\beta' = 0;$$

les paires de périodes ne seraient donc pas indépendantes, comme on l'a supposé. Puisque $2\pi i$ et ω ne sont liés par aucune relation de la forme (35) et que l'on a évidemment

$$f(x + 2\pi i, y) = f(x, y), \qquad f(x + \omega, y) = f(x, y),$$

on voit que la fonction f admet, par rapport à x *seul*, les deux périodes indépendantes $2\pi i$ et ω; il y a donc réduction et f est une fonction doublement périodique par rapport à x seul : ce qui est un cas que nous écartons.

2° Il est impossible, sauf dans des cas de réduction analogues au précédent, qu'il existe une relation de la forme

$$(36) \qquad 2k'\pi i + p'\alpha + q'\beta = 0,$$

k', p', q' désignant des entiers. En effet, faisons le changement linéaire de variables,

$$X = \frac{px + qy}{d}, \qquad Y = \frac{p'x + q'y}{d},$$

p et q désignant deux entiers et d le déterminant $pq' - qp'$, qui est différent de zéro pour un choix convenable de p et q. On tire de ces formules

$$x = q'X - qY, \qquad y = -p'X + pY;$$

la fonction $f(x, y)$ devient une fonction $F(X, Y)$ de X et Y, et les formules de transformation montrent que $F(X, Y)$ admet les quatre paires de périodes suivantes

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (A, B), \quad (A', B'),$$

où

$$A = \frac{p\alpha + q\beta}{d}, \qquad B = \frac{p'\alpha + q'\beta}{d},$$

$$A' = \frac{p\alpha' + q\beta'}{d}, \qquad B' = \frac{p'\alpha' + q'\beta'}{d},$$

qui sont indépendantes en même temps que les premières. Mais maintenant la relation supposée (36) devient

$$2k' d\pi i + B = 0,$$

cette relation rentre dans la forme (34), où $k = k'd$, $m = 1$, $m' = 0$. Elle est donc impossible si l'on écarte les cas de réduction.

3° Il est impossible que le déterminant

$$\delta = \alpha\beta' - \beta\alpha'$$

soit nul. On le voit en faisant le changement de variables

$$X = x - \frac{\alpha}{\beta} y, \qquad Y = \frac{2\pi i}{\beta} y.$$

Les paires de périodes de X et Y seront

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (A, B), \quad (A', B'),$$

où

$$A = -\frac{\delta}{\beta}, \qquad B = 2\pi i \frac{\beta'}{\beta}, \qquad A' = -2\pi i \frac{\alpha}{\beta}, \qquad B' = -\frac{4\pi^2}{\beta};$$

et si δ était nul, la période A le serait.

4° Enfin, et c'est là un théorème fondamental sur lequel nous nous sommes appuyé (n° **12**), *il est impossible qu'il existe des entiers p et q tels que l'on ait à la fois*

$$|e^{p\alpha+q\beta}-1|<\varepsilon, \qquad |e^{p\alpha'+q\beta'}-1|<\varepsilon,$$

ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut.

D'après ce qui précède, aucune des quantités

$$e^{p\alpha+q\beta}-1, \quad e^{p\alpha'+q\beta'}-1$$

ne peut être nulle si p et q sont des entiers différents de zéro : nous voulons montrer que ces deux quantités ne peuvent pas être simultanément infiniment petites.

Mettons en évidence les parties réelles et les parties imaginaires de α, β, α', β' en posant

$$\alpha = a + ia_1, \qquad \beta = b + ib_1,$$
$$\alpha' = a' + ia'_1, \qquad \beta' = b' + ib'_1.$$

Nous distinguerons deux cas suivant que la quantité $ab' - ba'$ est différente de zéro ou non.

Premier cas : *$ab' - ba'$ différent de zéro.* — Si le module de

$$e^{p\alpha+q\beta}-1$$

diffère infiniment peu de zéro, le module de $e^{p\alpha+q\beta}$, c'est-à-dire

$$e^{pa+qb},$$

diffère infiniment peu de l'unité, et l'on a

$$|pa+qb|<\eta,$$

η étant un nombre positif aussi petit qu'on le veut. Or il est impossible qu'on ait en même temps

$$|pa'+qb'|<\eta,$$

car on déduirait de là, en multipliant par $|b|$ et $|b'|$ et retranchant

$$|p(ab' - ba')| < \eta(|b| + |b'|),$$
$$|ab' - ba'| < \eta \frac{|b| + |b'|}{|p|},$$

car, p et q étant deux entiers non nuls tous deux, nous pouvons supposer p différent de zéro. Cette dernière inégalité est impossible, puisque la constante $ab' - ba'$ n'est pas nulle et que le second membre de l'inégalité peut devenir aussi petit qu'on le veut, à cause du facteur η.

Le théorème est donc démontré pour ce cas.

Deuxième cas : $ab' - ba' = 0$. Dans ce cas, nous commencerons par montrer qu'on peut transformer la fonction quadruplement périodique en une autre dans laquelle les premières périodes de toutes les quatre paires de périodes sont *purement imaginaires*. En effet, si a et a' sont nuls tous deux, il n'y a pas de transformation à faire; les premières périodes des quatre paires

$$(2\pi i, 0), \ (0, 2\pi i), \ (\alpha, \beta), \ (\alpha', \beta')$$

sont purement imaginaires, puisque a et a' sont les parties réelles de α et α'. Si a et a' ne sont pas nuls tous deux, supposons a différent de zéro et faisons :

$$X = ay - bx, \qquad Y = cy - dx,$$

c et d étant des constantes telles que $ad - bc$ soit différent de zéro. Les quatre paires de périodes seront:

$$\text{Pour X} \ldots\ldots\ldots \quad -2b\pi i, \ 2a\pi i, \ a\beta - b\alpha, \ a\beta' - b\alpha',$$
$$\text{Pour Y} \ldots\ldots\ldots \quad -2d\pi i, \ 2c\pi i, \ c\beta - d\alpha, \ c\beta' - d\alpha'.$$

Les périodes relatives à X sont toutes les quatre *purement imaginaires*, puisque

$$a\beta - b\alpha = i(ab_1 - ba_1), \qquad a\beta' - b\alpha' = i(ab'_1 - ba'_1).$$

Ainsi l'on peut ramener la fonction donnée à une fonction de X et Y, de telle façon que les périodes relatives à X soient *purement imaginaires*. Désignons, pour abréger, ces périodes relatives à X par

$$iA_1,\ iA_2,\ iA_3,\ iA_4,$$

et les périodes correspondantes de Y par

$$B_1 + iC_1,\ B_2 + iC_2,\ B_3 + iC_3,\ B_4 + iC_4,$$

en mettant en évidence les parties réelles et les parties imaginaires. La fonction de X et Y ne change pas quand on ajoute respectivement à X et à Y les quantités

$$(37)\qquad \begin{cases} i(m_1 A_1 + m_2 A_2 + m_3 A_3 + m_4 A_4), \\ m_1 B_1 + m_2 B_2 + m_3 B_3 + m_4 B_4 \\ \qquad + i(m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3 + m_4 C_4), \end{cases}$$

m_1, m_2, m_3, m_4 désignant des nombres entiers quelconques. Ces quantités (37) ne peuvent pas être nulles simultanément, sans quoi il y aurait réduction dans le nombre des paires de périodes. Mais on pourra toujours déterminer les entiers m_1, m_2, m_3, m_4 de façon à rendre ces deux quantités infiniment petites. En effet, ε étant un nombre positif donné d'avance, si petit soit-il, on pourra trouver des entiers m_1, m_2, m_3, m_4, tels que

$$(38)\qquad \begin{cases} |m_1 A_1 + m_2 A_2 + m_3 A_3 + m_4 A_4| < \varepsilon, \\ |m_1 B_1 + m_2 B_2 + m_3 B_3 + m_4 B_4| < \varepsilon, \\ |m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3 + m_4 C_4| < \varepsilon. \end{cases}$$

C'est là une proposition bien connue depuis Jacobi, dont nous indiquons sommairement la démonstration d'après Riemann. On en conclut que la fonction de X et Y admettrait une paire de périodes (38) plus petite que toute quantité donnée, ce qui est impossible. Il est donc également impossible que la quantité $(ab' - ba')$ soit nulle. Notre théorème se trouve donc complètement démontré.

15. Pour démontrer que les inégalités (38) ont lieu quelque petit que soit ε, il suffit de reprendre un raisonnement de Riemann dans l'article intitulé : *Beweis des Satzes, dass eine einwerthige mehr als 2n-fach periodische Function von n Veränderlichen unmöglich ist* (*Œuvres complètes*, p. 276, ou *Journal de Crelle*, t. 71).

Prenons un système d'axes Ox, Oy, Oz et considérons le parallélépipède construit sur les trois segments partant de l'origine et ayant pour projections sur Ox, Oy, Oz les quantités (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2), (A_3, B_3, C_3); nous appellerons ce parallélépipède le parallélépipède *élémentaire*. Les coordonnées des points situés à l'intérieur de ce parallélépipède sont définies par les équations

$$\begin{aligned} x &= A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + A_3 \xi_3, \\ y &= B_1 \xi_1 + B_2 \xi_2 + B_3 \xi_3, \\ z &= C_1 \xi_1 + C_2 \xi_2 + C_3 \xi_3, \end{aligned}$$

où ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont des quantités positives, telles que

$$0 \leqq \xi_1 < 1, \qquad 0 \leqq \xi_2 < 1, \qquad 0 \leqq \xi_3 < 1.$$

A tout point pris dans l'intérieur du parallélépipède élémentaire correspond un seul système de valeurs de ξ_1, ξ_2, ξ_3, et réciproquement. Si nous concevons le réseau des parallélépipèdes, égaux au parallélépipède élémentaire, ayant pour sommets les points

$$\left.\begin{aligned} x_\nu &= m_1 A_1 + m_2 A_2 + m_3 A_3, \\ y_\nu &= m_1 B_1 + m_2 B_2 + m_3 B_3, \\ z_\nu &= m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3, \end{aligned}\right\} \quad (m_1, m_2, m_3 \text{ entiers}),$$

ce réseau remplira tout l'espace. Considérons les points ayant pour coordonnées

$$X = m_4 A_4, \qquad Y = m_4 B_4, \qquad Z = m_4 C_4,$$

m_4 étant un entier quelconque. Chacun de ces points appartiendra à un des parallélépipèdes du réseau et, à ce point, correspondra, dans le parallélépipède élémentaire, un point homologue x, y, z caractérisé par les trois nombres ξ_1, ξ_2, ξ_3, de telle façon que l'on ait

$$x - X = x_\nu, \qquad y - Y = y_\nu, \qquad z - Z = z_\nu.$$

Ces points sont tous distincts; car, si deux points x, y, z correspondant à des valeurs différentes m'_4 et m''_4 de l'entier m_4 coïncidaient, on aurait, en appelant également $m'_1, m'_2, m'_3, m''_1, m''_2, m''_3$ les valeurs correspondantes des entiers m_1, m_2, m_3,

$$m'_1 A_1 + m'_2 A_2 + m'_3 A_3 + m'_4 A_4 = m''_1 A_1 + m''_2 A_2 + m''_3 A_3 + m''_4 A_4,$$
. . . .

c'est-à-dire en posant $M_k = m'_k - m''_k$,

$$\sum_1^4 M_k A_k = 0, \qquad \sum_1^4 M_k B_k = 0, \qquad \sum_1^4 M_k C_k = 0;$$

il y aurait alors réduction entre les quatre groupes de périodes

$$(i A_k, B_k + i C_k)$$

qui se réduiraient à trois.

Divisons les arêtes du parallélépipède élémentaire en n parties égales et par les points de division menons des plans parallèles aux faces : nous partagerons ainsi le parallélépipède en n^3 parallélépipèdes; les valeurs de ξ_1, ξ_2, ξ_3 correspondant aux points intérieurs à l'un de ces nouveaux parallélépipèdes sont données par les inégalités

$$(39) \qquad \frac{p_1}{n} \leq \xi_1 < \frac{p_1 + 1}{n}, \qquad \frac{p_2}{n} \leq \xi_2 < \frac{p_2 + 1}{n}, \qquad \frac{p_3}{n} \leq \xi_3 < \frac{p_3 + 1}{n},$$

où p_1, p_2, p_3 sont des entiers positifs ou nuls, inférieurs à n.

Comme les points x, y, z du parallélépipède élémentaire, homologues des points

$$X = m_4 A_4, \qquad Y = m_4 B_4, \qquad Z = m_4 C_4,$$

sont tous distincts et sont en nombre indéfiniment croissant, on pourra prendre m_1 assez grand pour qu'il y ait au moins deux de ces points x, y, z à l'intérieur d'un des n^3 petits parallélépipèdes définis par les inégalités (39). Appelons ces points x', y', z' et x'', y'', z'', en supposant qu'ils correspondent aux valeurs m'_1, m'_2, m'_3, m'_4 et m''_1, m''_2, m''_3, m''_4 des entiers m_1, m_2, m_3, m_4 et aux valeurs ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3, ξ''_1, ξ''_2, ξ''_3 des paramètres ξ_1, ξ_2, ξ_3. On aura

$$x' - x'' = A_1(\xi'_1 - \xi''_1) + A_2(\xi'_2 - \xi''_2) + A_3(\xi'_3 - \xi''_3),$$

où, d'après les inégalités (39) appliquées à ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3, ξ''_1, ξ''_2, ξ''_3,

$$|\xi'_1 - \xi''_1| < \frac{1}{n}, \qquad |\xi'_2 - \xi''_2| < \frac{1}{n}, \qquad (\xi'_3 - \xi''_3) < \frac{1}{n};$$

on a donc

$$|x' - x''| < \frac{|A_1| + |A_2| + |A_3|}{n}$$

et, en posant $m_k = m'_k - m''_k$,

$$|m_1 A_1 + m_2 A_2 + m_3 A_3 + m_4 A_4| < \frac{|A_1| + |A_2| + |A_3|}{n}.$$

De même

$$|m_1 B_1 + m_2 B_2 + m_3 B_3 + m_4 B_4| < \frac{|B_1| + |B_2| + |B_3|}{n},$$

$$m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3 + m_4 C_4| < \frac{|C_1| + |C_2| + |C_3|}{n}.$$

Comme n peut être pris aussi grand qu'on le veut, les inégalités (38) sont démontrées.

16. Nous allons maintenant établir l'existence d'une relation algébrique entre trois fonctions de deux variables, sans singularités essentielles, admettant quatre paires de périodes

$$(2\pi i, 0), \ (0, 2\pi i), \ (\alpha, \beta), (\alpha', \beta').$$

Soient

$$f_1(x,y) = \frac{\varphi_1(x,y)}{\psi_1(x,y)}, \qquad f_2(x,y) = \frac{\varphi_2(x,y)}{\psi_2(x,y)}, \qquad f_3(x,y) = \frac{\varphi_3(x,y)}{\psi_3(x,y)}$$

les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ étant des fonctions entières vérifiant des relations de la forme (32), ce qu'on peut toujours supposer, comme nous l'avons montré. On aura

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi_k(x+2\pi i, y)}{\varphi_k(x, y)} &= \frac{\psi_k(x+2\pi i, y)}{\psi_k(x, y)} = 1, \\
\frac{\varphi_k(x, y+2\pi i)}{\varphi_k(x, y)} &= \frac{\psi_k(x, y+2\pi i)}{\psi_k(x, y)} = e^{n_k x}, \\
\frac{\varphi_k(x+\alpha, y+\beta)}{\varphi_k(x, y)} &= \frac{\psi_k(x+\alpha, y+\beta)}{\psi_k(x, y)} = e^{a_k x + b_k y + n_k \frac{\alpha y}{2\pi i} + c_k}. \\
\frac{\varphi_k(x+\alpha', y+\beta')}{\varphi_k(x, y)} &= \frac{\psi_k(x+\alpha', y+\beta')}{\psi_k(x, y)} = e^{a'_k x + b'_k y + n_k \frac{\alpha' y}{2\pi i} + c'_k},
\end{aligned}$$

où l'on fait successivement

$$k = 1, 2, 3,$$

les lettres a_k, b_k, a'_k, b'_k désignant des entiers.

Si donc nous posons

$$\begin{aligned}
\Phi_1(x, y) &= \varphi_1\psi_2\psi_3, & \Phi_2(x, y) &= \varphi_2\psi_3\psi_1, \\
\Phi_3(x, y) &= \varphi_3\psi_1\psi_2, & \Psi(x, y) &= \psi_1\psi_2\psi_3,
\end{aligned}$$

nous aurons, en ramenant les expressions f_1, f_2, f_3 à avoir le même dénominateur,

$$f_1(x, y) = \frac{\Phi_1(x, y)}{\Psi(x, y)}, \qquad f_2(x, y) = \frac{\Phi_2(x, y)}{\Psi(x, y)}, \qquad f_3(x, y) = \frac{\Phi_3(x, y)}{\Psi(x, y)},$$

les quatre fonctions Φ_1, Φ_2, Φ_3, Ψ vérifiant *les mêmes relations*

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi_k(x+2\pi i, y)}{\Phi_k(x, y)} &= \frac{\Psi(x+2\pi i, y)}{\Psi(x, y)} = 1, \\
\frac{\Phi_k(x, y+2\pi i)}{\Phi_k(x, y)} &= \frac{\Psi(x, y+2\pi i)}{\Psi(x, y)} = e^{nx}, \\
\frac{\Phi_k(x+\alpha, y+\beta)}{\Phi_k(x, y)} &= \frac{\Psi(x+\alpha, y+\beta)}{\Psi(x, y)} = e^{ax + by + \frac{n\alpha y}{2\pi i} y + c}, \\
\frac{\Phi_k(x+\alpha', y+\beta')}{\Phi_k(x, y)} &= \frac{\Psi(x+\alpha', y+\beta')}{\Psi(x, y)} = e^{a'x + b'y + \frac{n\alpha' y}{2\pi i} y + c'},
\end{aligned}$$

où $k = 1, 2, 3$,

$$n = n_1 + n_2 + n_3, \qquad a = a_1 + a_2 + a_3, \qquad b = b_1 + b_2 + b_3,$$
$$a' = a'_1 + a'_2 + a'_3, \qquad b' = b'_1 + b'_2 + b'_3,$$
$$c = c_1 + c_2 + c_3, \qquad c' = c'_1 + c'_2 + c'_3.$$

Si, dans la troisième de ces relations, on change x et y en $x + \alpha'$ et $y + \beta'$, et si, dans la quatrième, on change x et y en $x + \alpha$, $y + \beta$, on a de plus la relation

$$a\alpha' + b\beta' + \frac{n\alpha\beta'}{2\pi i} = a'\alpha + b'\beta + \frac{n\beta\alpha'}{2\pi i} + 2 N i\pi \qquad (N \text{ entier}),$$

identique à la relation (29).

Appliquant alors la suite des transformations que nous avons faites aux pages 195 et suivantes, on ramènera les fonctions f_1, f_2, f_3 à dépendre de deux nouvelles variables X et Y liées linéairement à X et Y, de telle façon que l'on ait

$$f_1(X, Y) = \frac{\Theta_1(X, Y)}{\Theta_0(X, Y)}, \qquad f_2(X, Y) = \frac{\Theta_2(X, Y)}{\Theta_0(X, Y)},$$
$$f_3(X, Y) = \frac{\Theta_3(X, Y)}{\Theta_0(X, Y)},$$

les fonctions Θ_0, Θ_1, Θ_2, Θ_3 vérifiant les relations

$$\Theta_k(X + 2\pi i, Y) = \Theta_k(X, Y + 2\pi i) = \Theta_k(X, Y),$$
$$\Theta_k(X + A, Y + B) = e^{-pX+C}\Theta_k(X, Y),$$
$$\Theta_k(X + A', Y + B') = e^{-pY+C'}\Theta_k(X, Y),$$

où $k = 0, 1, 2, 3$; p désignant un entier, C et C' des constantes, et les périodes vérifiant la condition de Riemann,

$$A' = B.$$

Le déterminant

$$AB' - BA' = AB' - B^2$$

ne peut pas être nul, comme nous l'avons vu dans le n° **14**. En employant la méthode des coefficients indéterminés pour développer la fonction Θ_k par la formule de Fourier en séries ordonnées suivant les puissances positives et négatives de e^X et e^Y, on reconnaît immédiatement que, pour la convergence, la partie réelle de

$$AB' - B^2$$

doit être *positive*. Quant à l'entier p, il sera positif ou négatif suivant que la partie réelle de A est négative ou positive. On voit, de plus, que la fonction entière la plus générale, vérifiant les mêmes relations que les quatre fonctions Θ_0, Θ_1, Θ_2, Θ_3, est donnée par une expression linéaire à coefficients constants de p^2 fonctions spéciales vérifiant séparément ces mêmes relations.

Cela posé, formons toutes les combinaisons homogènes d'un même degré positif q des fonctions Θ_0, Θ_1, Θ_2, Θ_3, c'est-à-dire les expressions de la forme

$$\Theta_0^{\alpha_0}\Theta_1^{\alpha_1}\Theta_2^{\alpha_2}\Theta_3^{\alpha_3},$$

α_0, α_1, α_2, α_3 étant des entiers positifs ou nuls tels que

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = q.$$

Ces combinaisons sont au nombre de

$$\frac{(q+1)(q+2)(q+3)}{6};$$

elles vérifient des relations identiques à celles que vérifient les fonctions Θ_k, avec cette seule différence que p, C et C' sont remplacés par qp, qC et qC'. Chacune des

$$\frac{(q+1)(q+2)(q+3)}{6}$$

combinaisons homogènes considérées s'exprime donc linéairement à l'aide de

$$q^2 p^2$$

fonctions spéciales. Choisissons q assez grand pour que

$$\frac{(q+1)(q+2)(q+3)}{6} > q^2p^2.$$

On pourra alors éliminer les q^2p^2 fonctions spéciales entre les

$$\frac{(q+1)(q+2)(q+3)}{6}$$

relations donnant les combinaisons homogènes

$$\Theta_0^{\alpha_0}\Theta_1^{\alpha_1}\Theta_2^{\alpha_2}\Theta_3^{\alpha_3},$$

et l'on obtiendra ainsi, entre ces combinaisons, au moins une relation linéaire à coefficients constants, qui, divisée par le facteur Θ_0^q, donnera *une relation algébrique* entre les fonctions considérées f_1, f_2, f_3. Il pourra se faire que l'on obtienne ainsi plusieurs relations entre ces fonctions : il est évident que deux d'entre elles *au plus* pourront être distinctes.

17. *Sur les fonctions de deux variables à deux paires de périodes.* — Nous avons vu (n° **10**) qu'une fonction $f(x, y)$ de deux variables admettant les deux paires de périodes $(2\pi i, 0)$ et $(0, 2\pi i)$ et n'ayant pas de singularités essentielles à distance finie peut toujours être mise sous la forme

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)},$$

φ et ψ désignant deux fonctions entières ne s'annulant simultanément qu'aux points d'indétermination de $f(x, y)$ et vérifiant les deux relations

$$(40)\quad \begin{cases} \varphi(x+2\pi i, y) = \varphi(x, y), & \varphi(x, y+2\pi i) = e^{nx}\varphi(x, y), \\ \psi(x+2\pi i, y) = \psi(x, y), & \psi(x, y+2\pi i) = e^{nx}\psi(x, y), \end{cases}$$

où n désigne un entier.

Si cet entier n est nul, les fonctions entières φ et ψ admettant séparément la période $2\pi i$ par rapport à x et y sont données par des séries convergentes de la forme

$$\varphi(x, y) = \sum_{p,q=-\infty}^{p,q=+\infty} A_{p,q} e^{px+qy}.$$

$$\psi(x, y) = \sum_{p,q=-\infty}^{p,q=+\infty} B_{p,q} e^{px+qy}.$$

dont les coefficients $A_{p,q}$ et $B_{p,q}$ sont indépendants de x et y.

Si n est différent de zéro, il est aisé d'obtenir l'expression générale des fonctions φ et ψ. Tout d'abord la fonction φ, admettant la période $2i\pi$ par rapport à x, sera donnée par la formule de Fourier

$$\varphi(x, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} g_\nu(y) e^{\nu x}.$$

les coefficients $g_\nu(y)$ étant des fonctions entières de y. En exprimant que

$$\varphi(x, y + 2\pi i) = e^{nx}\varphi(x, y).$$

on trouve

$$g_\nu(y + 2\pi i) = g_{\nu+n}(y).$$

d'où, k désignant un entier quelconque,

$$g_{\nu+nk}(y) = g_\nu(y + 2k\pi i).$$

Cette relation permet d'exprimer toutes les fonctions $g_\nu(y)$ à l'aide de $\pm n$ d'entre elles, par exemple, si n est positif, de

$$g_0(y), \quad g_1(y), \quad g_2(y), \quad \ldots, \quad g_{n-1}(y),$$

et, si n est négatif, de

$$g_0(y), \quad g_1(y), \quad g_2(y), \quad \ldots, \quad g_{-n-1}(y).$$

En posant

$$\varphi_\mu(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} g_\mu(y + 2k\pi i)\, e^{(\mu+nk)x},$$

où μ est un des nombres $0, 1, 2, \ldots, \pm n - 1$, on aura

$$\varphi(x, y) = \varphi_0(x, y) + \varphi_1(x, y) + \ldots + \varphi_{\pm n-1}(x, y)$$

avec $\pm n$ fonctions entières arbitraires. On aura une expression analogue pour $\psi(x, y)$.

Remarquons maintenant que, si l'on fait

$$\varphi_1(x, y) = e^{-\frac{n\,xy}{2\pi i}} \varphi(x, y),$$

$$\psi_1(x, y) = e^{-\frac{n\,xy}{2\pi i}} \psi(x, y),$$

on aura

$$f(x, y) = \frac{\varphi_1(x, y)}{\psi_1(x, y)},$$

les fonctions φ_1 et ψ_1 vérifiant les deux relations

$$(41)\quad \begin{cases} \varphi_1(x + 2\pi i, y) = e^{-ny} \varphi_1(x, y), & \varphi_1(x, y + 2\pi i) = \varphi_1(x, y), \\ \psi_1(x + 2\pi i, y) = e^{-ny} \psi_1(x, y), & \psi_1(x, y + 2\pi i) = \psi_1(x, y). \end{cases}$$

Ces nouvelles fonctions φ_1 et ψ_1 s'expriment donc par des séries analogues aux précédentes, mais dans lesquelles x joue le rôle de y et y celui de x.

Supposons, pour traiter un cas particulier précis, $n = 1$, et désignons par $\mathrm{P}(y)$ et $\mathrm{Q}(y)$ deux polynômes de degrés pairs,

$$\mathrm{P}(y) = a_0 y^{2p} + a_1 y^{2p-1} + \ldots + a_{2p},$$

$$\mathrm{Q}(y) = b_0 y^{2q} + b_1 y^{2q-1} + \ldots + b_{2q},$$

dans lesquels les parties réelles des produits

$$a_0 i^{2p}, \quad b_0 i^{2q}$$

sont *négatives*. Les fonctions entières

$$\varphi(x,y)=\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{P(y+2\nu\pi i)-\nu x},$$

$$\psi(x,y)=\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{Q(y+2\nu\pi i)-\nu x}$$

vérifient les relations (40) avec $n=1$.

Les fonctions

$$\varphi_1(x,y)=e^{-\frac{xy}{2\pi i}}\varphi(x,y),\qquad \psi_1(x,y)=e^{-\frac{xy}{2\pi i}}\psi(x,y)$$

vérifient alors les relations (41), où $n=1$. Elles sont données, l'une et l'autre, par des séries de la forme

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} h(x+2\nu\pi i)e^{\nu y},$$

$h(x)$ étant une fonction entière. Pour $\varphi_1(x,y)$, on a

$$h(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi i} e^{-\frac{xy}{2i\pi}}\varphi(x,y)\,dy$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_0^{2\pi i} e^{P(y+2\nu\pi i)-\frac{x}{2\pi i}(y+2\nu\pi i)}\,dy$$

ou, enfin,

$$h(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{P(y)-\frac{x}{2\pi i}y}\,dy,$$

l'intégration étant faite par des valeurs purement imaginaires de y. Pour les coefficients du développement de $\psi_1(x,y)$, on trouve une expression analogue, où $P(y)$ est remplacé par $Q(y)$.

Si les polynômes $P(y)$ et $Q(y)$ sont du second degré, on retrouve des fonctions θ d'une variable. Supposons, par exemple,

$$P(y)=\alpha y^2,\qquad Q(y)=\beta y^2,$$

α et β désignant des constantes réelles positives. Nous aurons alors

$$\varphi(x,y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{\alpha(y+2\nu\pi i)^2 - \nu x};$$

si donc nous posons

$$\theta_3(z \mid \omega, \omega') = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}(2\nu z + \nu^2 \omega')},$$

(Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*), nous aurons

$$\varphi(x,y) = e^{\alpha y^2} \theta_3\left(2\alpha y - \frac{x}{2\pi i} \,\Big|\, 1, 4\pi\alpha i\right);$$

$\psi(x,y)$ sera donné par la même formule où l'on change α en β. En outre, si l'on fait

$$\varphi_1(x,y) = e^{-\frac{xy}{2\pi i}} \varphi(x,y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} h(x + 2\nu\pi i) e^{\nu y},$$

on a, d'après les formules générales ci-dessus,

$$h(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\alpha y^2 - \frac{xy}{2i\pi}} dy,$$

ou, en changeant y en ui, u réel,

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{x^2}{16\alpha\pi^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\left(u + \frac{x}{4\alpha\pi}\right)^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} e^{\frac{x^2}{16\alpha\pi^2}}.$$

On a ainsi

$$\varphi_1(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{\frac{(x+2\nu\pi i)^2}{16\alpha\pi^2} + \nu y},$$

ce qui est de nouveau une fonction θ. On aura de même $\psi_1(x,y)$ en changeant α en β. On réalise ainsi, comme nous l'avons démontré, *a priori*, sous deux formes différentes,

$$f(x,y) = \frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)} = \frac{\varphi_1(x,y)}{\psi_1(x,y)},$$

l'expression d'une fonction de x et y avec les deux paires de périodes $(2\pi i, 0)$, $(0, 2\pi i)$. Dans cet exemple, les formules permettant de passer de la fonction φ à la fonction φ_1 et de ψ à ψ_1 sont les formules bien connues permettant d'exprimer en fonction l'une de l'autre les deux fonctions

$$\theta_3(x \mid \omega, \omega'), \qquad \theta_3(x \mid -\omega', \omega)$$

(*voir* Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 264 et suivantes).

Pour terminer, revenons un instant au cas général. Nous avons démontré qu'une fonction $f(x,y)$, sans singularités essentielles à distance finie, avec les paires de périodes $(2\pi i, 0)$, $(0, 2\pi i)$, peut s'écrire

$$f(x,y) = \frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)},$$

les fonctions φ et ψ ne s'annulant en même temps qu'aux points où $f(x,y)$ est indéterminée et vérifiant les relations

$$\begin{aligned} \varphi(x + 2\pi i, y) &= \varphi(x,y), \qquad & \varphi(x, y + 2\pi i) &= e^{nx}\varphi(x,y), \\ \psi(x + 2\pi i, y) &= \psi(x,y), \qquad & \psi(x, y + 2\pi i) &= e^{nx}\psi(x,y). \end{aligned}$$

Or nous venons de voir, dans le dernier exemple traité, que la fonction

$$\theta(x,y) = e^{\alpha y^2}\theta_3\left(2\alpha y - \frac{x}{2\pi i} \,\middle|\, 1, 4\pi\alpha i\right) \qquad (\alpha > 0)$$

vérifie les deux relations

$$\theta(x + 2\pi i, y) = \theta(x,y), \qquad \theta(x, y + 2\pi i) = e^{x}\theta(x,y).$$

Si donc n est négatif, les fonctions

$$\Phi(x,y) = \varphi(x,y)\theta^{-n}(x,y), \qquad \Psi(x,y) = \psi(x,y)\theta^{-n}(x,y)$$

seront des *fonctions entières* admettant les deux paires de périodes $(2\pi i, 0)$, $(0, 2\pi i)$; si n est positif, il en est de même des deux fonctions

$$\Phi(x,y) = \varphi(x,y)\theta''(-x,y), \qquad \Psi(x,y) = \psi(x,y)\theta''(-x,y).$$

Dans les deux cas, on pourra mettre la fonction $f(x,y)$ sous la forme

$$f(x,y) = \frac{\Phi(x,y)}{\Psi(x,y)}, \tag{42}$$

Φ et Ψ étant des fonctions entières admettant séparément les deux paires de périodes et développables, par conséquent, par la série de Fourier. On arrive ainsi à une expression analogue à celle des fonctions d'une variable avec une période, avec cette différence que l'expression (42) n'est pas irréductible, puisque le numérateur et le dénominateur sont divisibles par une même série entière $\theta^{\pm''}(\pm x,y)$, s'annulant à distance finie.