

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CELLERIER

Lois des chocs moléculaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 4^e série, tome 7 (1891), p. 109-155.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1891_4_7__109_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Lois des chocs moléculaires;

PAR M. CELLERIER.

§ 1. — Valeurs théoriques du nombre des chocs et des changements de force vive de translation.

I. — PROPOSITION PRÉLIMINAIRE DE GÉOMÉTRIE.

Étant donné un élément ω de la surface d'un premier corps m , on déplace par simple translation un second corps m' de façon qu'il reste constamment tangent au premier à l'intérieur de ω ; on demande le lieu décrit par le centre de gravité G' de m' ; ce lieu δ est évidemment une petite surface. Nous supposons m et m' convexes, n'ayant à leur surface ni angle ni arête vive.

Soit O (*fig. 1*) un point du contour de ω , et prenons pour plan de la

Fig. 1.

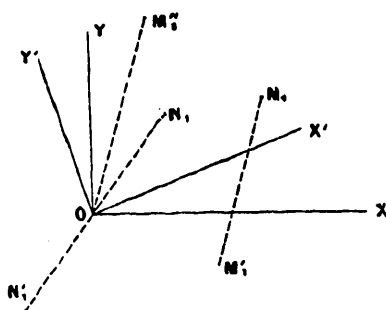


figure le plan tangent en O , m' étant supposé aussi tangent en ce point. Pour simplifier, nous considérerons ce plan comme horizontal, m étant

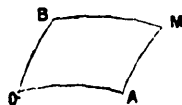
au-dessous, m' au-dessus. Traçons dans ce plan les axes OX , OY suivant les lignes de courbure de m , R étant son rayon de courbure suivant OX et S suivant OY . Soient aussi OX' , OY' les directions principales de la surface de m' ; OX' peut toujours être supposé dirigé comme dans la figure, à l'intérieur de l'angle XOY , faisant avec OX l'angle aigu l ; R' sera le rayon de courbure de m' suivant OX' , et S' le rayon suivant OY' .

Supposons aussi décrites deux surfaces sphériques C , C' de rayon r tangentes en O au plan de la figure, C au-dessous, C' au-dessus.

Nous dirons qu'un point N de C est le correspondant d'un point M de la surface de m , si en ces points les normales intérieures aux deux surfaces sont parallèles et de même sens. Si M parcourt un petit arc OA sur la première ligne de courbure, les normales sont dans un même plan, en négligeant les infiniment petits du second ordre; celles des points N correspondants seront donc dans un même plan, et le point N décrira un petit arc de grand cercle a , tandis qu'on aura $OA = Ra$, R étant le rayon de l'arc OA . Si M parcourt OB sur la seconde ligne de courbure, N parcourra de même un petit arc de grand cercle b perpendiculaire au premier, et l'on aura $OB = Sb$.

Si M est un point quelconque très près de O et MA , MB les lignes de courbure qui y passent, elles formeront, avec celles qui passent en

Fig. 2.



O , un petit rectangle $OAMB$ (*fig. 2*), et les correspondants des points de son contour formeront sur C un petit rectangle; tous deux se projeteront sensiblement en vraie grandeur sur le plan de la première figure, de sorte que si M_1 , N_1 sont les projections de M , N , et que les coordonnées de N_1 , pour les axes OX , OY , soient a , b , celles de M_1 seront Ra , Sb et, pour les axes OX' , OY' , deviendront

$$x = Ra \cos l + Sb \sin l, \quad y = -Ra \sin l + Sb \cos l.$$

De même, tout point M' de la surface de m' aura pour correspondant

sur C' le point N' où les normales aux deux surfaces sont parallèles et de même sens, et si M', N' sont leurs projections sur le plan de la figure, et a', b' les coordonnées de N' , par rapport à OX', OY' , celles de M' seront $x' = R'a', y' = S'b'$.

Enfin nous dirons que M' est le correspondant de M si les normales aux deux surfaces en ces points sont parallèles et de sens contraire; alors il en sera de même pour les normales à C, C' en N, N' ; leur plan contiendra la verticale du point O , et ce point sera le milieu de la droite NN' . Ainsi a', b' seront en signe contraire les coordonnées de N , pour les mêmes axes, lesquelles se déduisent des valeurs ci-dessus de x, y en y remplaçant R et S par 1 ; les coordonnées $R'a', S'b'$ de M' deviendront ainsi

$$x' = + R'(a \cos l + b \sin l), \quad y' = - S'(- a \sin l + b \cos l).$$

Dans tout ce qui précède, a, b peuvent évidemment être positifs ou négatifs; nous avons considéré les rayons R, S, R', S' comme positifs et intérieurs, les corps étant convexes; mais il est aisé de voir que les formules resteraient exactes s'il s'en trouvait d'extérieurs, en les prenant négatifs. Il faudrait toutefois que le contact fût possible, mais les conditions nécessaires pour cela sont inutiles à examiner.

Revenons maintenant à notre recherche principale et supposons que le corps m' se déplaçant par translation devienne tangent à m en un point M de l'élément ω autre que O . Les normales aux deux surfaces en ce point devant être sur le prolongement l'une de l'autre, et celle de m' n'ayant pas changé de direction, c'est le point M' correspondant de M , qui est venu se placer sur ce dernier. La distance de M ou M' au plan de la figure étant infiniment petite du second ordre, la droite MM' est horizontale; toutes les droites joignant l'ancienne et la nouvelle position d'un même point du corps m' sont égales et parallèles à $M'M$; il en est de même pour son centre G' ; toutes étant horizontales quel que soit M , le lieu cherché δ est une aire horizontale ou parallèle au plan de l'élément ω .

Il n'y a pas lieu de chercher sa hauteur qui est celle de G' ; mais, pour trouver sa forme et ses dimensions, il revient au même de chercher le lieu des positions successives d'un autre point quelconque de m' , pour

lequel nous prendrons O' , celui qui d'abord était en contact avec O . Soit M'' sa nouvelle position, qui se confond avec sa projection M'_1 ; OM'_1 est égale et parallèle à M_1M , et de même sens : ainsi, par rapport à OX' , OY' , les coordonnées x'' , y'' de M'' , seront $x - x'$, $y - y'$ ou, d'après les formules précédentes,

$$\begin{aligned} x'' &= (R + R')a \cos I + (S + R')b \sin I, \\ y'' &= -(R + S')a \sin I + (S + S')b \cos I. \end{aligned}$$

Ainsi δ est le lieu occupé par les points M'' , quand on prend tour à tour pour M , tous les points de l'élément ω . Or, si l'on fait décrire à M , tour à tour deux droites parallèles ayant pour équations

$$y = nx + p, \quad y = nx + q,$$

il résulte des valeurs de x , y que a , b varieront à la fois en étant liés par des équations de la forme

$$b = n'a + p', \quad b = n'a + q',$$

où n' est le même, et il en résultera entre x'' et y'' des équations de forme analogue

$$y'' = n''x'' + p'', \quad y'' = n''x'' + q'',$$

de sorte que M''_1 décrira aussi deux droites parallèles.

Prenons maintenant pour ω le rectangle déjà considéré, construit sur $OA = Ra$, $OB = Sb$, placés sur OX , OY ; soit A' la position de M'_1 quand M est en A , et B' cette position quand M est en B .

Il résulte de ce qui précède que, M , parcourant le contour du rectangle, M'_1 parcourra celui du parallélogramme construit sur OA' , OB' ; celui-ci est donc l'aire S . Soient, par rapport à OX' et OY' , X et Y les coordonnées de A' , et X' , Y' celles de B' ; les coordonnées de A par rapport à OX' , OY' se déduisent de x , y en y faisant $b = 0$; X , Y se déduiront de même de x'' , y'' , et, en posant $x = 0$, celles-ci devien-

dront les valeurs de X , Y , d'où

$$\begin{aligned} X &= (R + R') a \cos I, & Y &= -(R + S') a \sin I, \\ X' &= (S + R') b \sin I, & Y' &= (S + S') b \cos I. \end{aligned}$$

L'aire du parallélogramme est au signe près $S = XY' - YX'$, et celle du rectangle ω est $RSab$, d'où résulte

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\delta}{\omega} &= \frac{K}{RS}, \\ &\text{où} \\ K &= (R + R')(S + S') \cos^2 I + (R + S')(S + R') \sin^2 I, \end{aligned} \right.$$

où les rayons de courbure et, par suite, K sont supposés positifs.

En même temps les points de la sphère C correspondant à tous les points de ω forment un rectangle ω'' dont l'aire est évidemment $\frac{\omega}{RS}$.

En outre, les rapports $\frac{\delta}{\omega}$ et $\frac{\omega''}{\omega}$ conservent leurs valeurs $\frac{K}{RS}$, $\frac{1}{RS}$, quelle que soit la forme de l'élément ω , puisqu'on peut toujours le décomposer en rectangles tels que le précédent.

Il est essentiel de remarquer que, parmi les lettres employées dans ce numéro, il n'y a à conserver, avec leur acception, que δ , R , S , R' , S' , I et K donnés par l'équation (1); il ne sera plus question des axes OX , ..., ni des coordonnées qui s'y rapportent, ni des points M_1 , ... de la figure; quant à I , il est indifférent qu'il soit aigu ou obtus; c'est l'angle de deux lignes de courbure auxquelles correspondent les rayons R et R' dans les deux solides, les autres étant S , S' .

II. — EFFETS D'UN CHOC.

Le choc a lieu entre deux corps parfaitement élastiques dont les masses m , m' serviront aussi à les désigner, et qui bientôt représenteront des molécules de forme quelconque. Pour le premier, G sera le centre de gravité; GX , GY , GZ , les axes principaux qui s'y croisent et partagent le mouvement du corps; A , B , C , les moments d'inertie principaux; p , q , r les composantes de la vitesse angulaire suivant

ces axes; v la vitesse de translation, ou celle de G . Les axes $G'X'$, $G'Y'$, $G'Z'$ et les lettres G' , A' , B' , C' , p' , q' , r' , c' auront la même signification pour le corps m' . Le choc, comme dans le cas de deux solides, est supposé trop court pour que, pendant sa durée, il y ait un déplacement appréciable des deux corps.

Nous figurerons le plan tangent commun comme horizontal, O étant le point de contact entre le corps m au-dessous, et m' au-dessus; le sens de rotation de droite à gauche sera considéré comme direct. Le corps m tourne autour de G comme si ce point était fixe, et les équations du mouvement de rotation sont

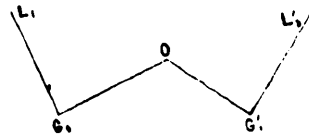
$$A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr = \mu, \quad \dots$$

μ étant, par rapport à GX , le moment de la force, qui se réduit à la pression φ des deux corps, constamment verticale. En intégrant pour la durée du choc, désignant par p_1 l'accroissement fini de p pendant le choc, et remarquant que $\int (C - B) qr dt$ est négligeable, on aura

$$Ap_1 = \mu', \quad p_1 = \frac{\mu'}{A}, \quad \text{où} \quad \mu' = \int \mu dt.$$

En posant $\int \varphi dt = i$, μ' est, par rapport à GX , le moment de l'impulsion verticale i , considérée comme une force. L'axe du moment principal est GL , perpendiculaire au plan mené par G et la force. En prenant le plan tangent pour celui de la figure, l'horizontale GL s'y pro-

Fig. 3.



jette en G_1L_1 (*fig. 3*), perpendiculaire à OG_1 ; son sens dans la figure est tel que la force i agissant de haut en bas tend à faire tourner m dans le sens direct autour de GL ; en désignant OG_1 par h et les angles de GL avec les axes par α , β , γ , le moment principal sera ih , et, par rapport à

GX, le moment sera $\mu' = ih \cos \alpha$, de sorte que le choc augmente p de $\frac{ih \cos \alpha}{A}$; de même $\frac{ih \cos \beta}{B}$, $\frac{ih \cos \gamma}{C}$ sont les accroissements de q et r .

En désignant par x, y, z les coordonnées du point O, et par X, Y, Z les cosinus de la normale intérieure en ce point, direction de la force i , son moment par rapport à GX, déjà exprimé par $ih \cos \alpha$, le sera aussi par $yZi - zYi$, et, la même similitude ayant lieu pour les autres axes, il en résulte

$$(2) \quad \begin{cases} h \cos \alpha = yZ - zY, \\ h \cos \beta = zX - xZ, \\ h \cos \gamma = xY - yX. \end{cases}$$

Les accroissements de p', q', r' seront de même $\frac{ih' \cos \alpha'}{A'}$, $\frac{ih' \cos \beta'}{B'}$, $\frac{ih' \cos \gamma'}{C'}$, α', β', γ' étant les angles que forment $G'X', G'Y', G'Z'$ avec $G'L'$ homologue de GL, perpendiculaire au plan vertical mené par OG' ; en remarquant que l'impulsion agit sur m' de bas en haut, $G'L'$ a le sens indiqué dans la figure par sa projection $G'_1L'_1$; h' désigne OG'_1 .

Voici une conséquence essentielle de la disposition de la figure :

Soient u, u' les projections de v, v' sur la verticale, entendant par là, comme dans ce qui suit, la verticale montante, et, en outre,

$$(3) \quad \begin{cases} p \cos \alpha + q \cos \beta + r \cos \gamma = L, \\ p' \cos \alpha' + q' \cos \beta' + r' \cos \gamma' = L', \\ hL + h'L' = l, \\ u - u' - l = V. \end{cases}$$

Cherchons, avant le choc, la vitesse verticale des points de contact que nous nommerons O pour le corps m et O' pour m' . Pour cela décomposons la vitesse angulaire suivant GL, la verticale de G, et un troisième axe mené par G et se projetant sur OG_1 ; en vertu de la rotation autour des deux derniers axes, la vitesse de O serait horizontale; sa vitesse verticale, due à la rotation, provient uniquement de la vitesse angulaire autour de GL, laquelle a la valeur précédente et produit,

pour O , la vitesse $L \times OG$; celle-ci, si L est positive, fait, avec la verticale descendante, un angle aigu dont le cosinus est $\frac{OG_1}{OG}$; la vitesse angulaire de O , due à la seule rotation, est donc $-hL$; celle de O' est de même $+h'L'$; elles doivent être composées avec les vitesses de translation verticales u, u' des centres et deviennent $u - hL$ pour O , et $u' + h'L'$ pour O' ; leur différence $u - hL - u' - h'L'$ ou V est donc, avant le choc, la vitesse verticale relative des points qui vont être au contact, tendant à les rapprocher si elle est positive, et, par suite, il n'y a de choc qu'en supposant V positive.

D'après la direction de l'impulsion i , il est clair que le choc change u, u' en $u - \frac{i}{m}, u' + \frac{i}{m'}$.

Soient maintenant, pour les deux corps réunis, Δ l'accroissement de la force vive de translation, Δ'' le même pour le seul corps m , et Δ' celui de la force vive de rotation $Ap^2 + \dots$ pour les deux corps, tous trois étant dus au choc. En posant

$$(4) \quad \begin{cases} M = \frac{\cos^2 \alpha}{A} + \frac{\cos^2 \beta}{B} + \frac{\cos^2 \gamma}{C}, \\ M' = \frac{\cos^2 \alpha'}{A'} + \frac{\cos^2 \beta'}{B'} + \frac{\cos^2 \gamma'}{C'}, \\ f = \frac{1}{m} + \frac{1}{m'} + h^2 M + h'^2 M', \end{cases}$$

on aura

$$\begin{aligned} \Delta &= m \left(u - \frac{i}{m} \right)^2 + m' \left(u' + \frac{i}{m'} \right)^2 - mu^2 - m' u'^2 \\ &= \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right) i^2 - 2i(u - u'), \\ \Delta' &= A \left(p + \frac{ih \cos \alpha}{A} \right)^2 - Ap^2 + A' \left(p' + \frac{ih' \cos \alpha'}{A'} \right)^2 - A' p'^2 + \dots \\ &= 2ih + i^2 h^2 M + i^2 h'^2 M'. \end{aligned}$$

Par suite de la parfaite élasticité, le travail total de la force ζ pendant le choc est nul, et la valeur de i est telle que l'on ait

$$\Delta + \Delta' = 0,$$

ou

$$-2Vi + fi^2 = 0, \quad \iota = \frac{2V}{f};$$

il en résulte

$$\Delta = \frac{4V^2}{f^2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right) - \frac{4V}{f} (u - u'),$$

et, en substituant $u - u' = V + l$,

$$(5) \quad \begin{cases} \Delta = -\Delta' = \frac{4V^2}{f^2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} - f \right) - \frac{4V}{f} l, \\ \Delta'' = \frac{i^2}{m} - 2ui = \frac{4V^2}{mf^2} - \frac{4Vu}{f}. \end{cases}$$

III. — EXPOSÉ GÉNÉRAL DE LA QUESTION. NOMBRE DES CHOCs DANS UN PREMIER CAS SIMPLE.

Conventions générales. — Les chocs que nous considérons sont ceux des molécules d'un gaz, en admettant qu'elles n'exercent aucune action mutuelle sauf dans le cas du choc; la masse gazeuse est supposée contenue dans une vaste enceinte et rester à l'état permanent, de sorte que la force vive totale reste invariable; par suite, à chaque choc, la force vive des deux molécules réunies, ne pouvant augmenter, ne doit pas non plus diminuer.

Dans ce numéro et les suivants les molécules seront de deux espèces que nous désignerons par (I) et (II); leur nombre total sera n pour la première et n' pour la seconde. Pour celles d'une même espèce, la forme, la masse sont identiques, du reste quelconques. Leur surface est partagée d'une manière identique en éléments, désignés par ω pour l'espèce (I), ω' pour l'autre.

Les lettres $m, G, A, B, C, p, q, r, v$ et les axes GX, GY, GZ du numéro précédent concernent l'espèce (I), et les lettres accentuées l'espèce (II), et de même, dans le cas d'un choc entre espèces différentes, les formules des numéros précédents sont applicables, les corps m et m' représentant les deux espèces. L'accroissement $\Delta + \Delta' = 0$, comme on l'a supposé.

Le nombre de centres d'une molécule (I) existant en moyenne dans

un espace e est proportionnel à n et à e , et pourra être représenté par ne , ce qui revient à prendre l'enceinte pour unité de volume; ce nombre sera de même $n'e$ pour l'espèce (II).

Notre but est de trouver le nombre μ des chocs entre espèces différentes qui surviennent pendant un temps t . Ce temps sera supposé assez petit pour que le maximum ε des angles décrits pendant sa durée par tout point d'une molécule autour de son centre de gravité soit très petit; en outre, il faut pouvoir négliger les cas où, à la fois, deux molécules (II) seraient placées de façon à produire un choc sur une même molécule (I) pendant le temps t , l'un empêchant l'autre; il faudra donc supposer t tel que le nombre des molécules (I) recevant un choc soit très petit par rapport au nombre total n , parce qu'alors le nombre de celles qui pourraient en recevoir deux sera très petit du second ordre.

Cas particulier. — Nous admettrons qu'au commencement du temps t les vitesses de translation de toutes les molécules de même espèce soient égales et parallèles, et les mouvements de rotation identiques, de sorte qu'à un même instant, pour chaque molécule (I), les axes GX, GY, GZ soient parallèles de même sens, et que p, q, r soient égales. La supposition sera la même pour la seconde espèce ou pour $p', q', r', G'X', \dots$. Cela posé, on demande le nombre μ des chocs pour lesquels le point de contact sera intérieur à un élément déterminé ω des molécules (I), homologue pour toutes.

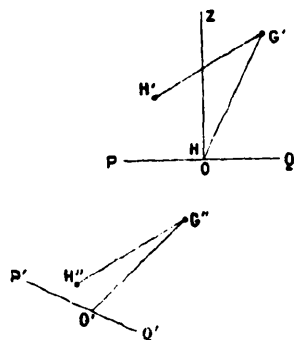
Le nombre μ restera le même si, sans changer les mouvements relatifs intérieurs à l'enceinte, nous attribuons à celle-ci une vitesse de translation égale et opposée à celle des molécules (II), dont les centres deviendront ainsi tous immobiles dans l'espace, l'influence des chocs contre les parois étant négligeable dans ce qui suit, pour une enceinte de grandes dimensions.

Pour qu'une molécule (I) reçoive un choc à l'intérieur de ω au bout d'un temps t' , il faut et il suffit qu'il se trouve un centre G' sur une très petite aire δ déterminée au n^o I; nous avons supposé, pour cela, le corps choquant déplacé par simple translation de façon à toucher tour à tour tous les points ω , et, en effet, les diverses positions de G' produisant le choc, correspondant à un même instant, les axes de la molécule (II) sont parallèles. Quant à la distance de δ au plan de ω , à sa po-

sition exacte, aux valeurs de R' , S' , I dans l'équation (1), ce sont des fonctions connues du temps t' , comme la position du centre G et la direction des axes des deux corps à tout instant. La grandeur et la position de δ pour le temps t' étant ainsi déterminées, il en sera de même du volume E que décrit cette aire quand t' varie de zéro à t , et, comme les points G' ne bougent pas, la condition pour qu'une molécule donnée (I) reçoive un choc sur ω est qu'au commencement du temps t il se trouve un point G' à l'intérieur de E .

Nous négligerons, dans le calcul de E , les termes qui par rapport à E seraient de l'ordre du petit angle ϵ mentionné ci-dessus, ou les erreurs relatives de cet ordre. Quoique cela revienne à peu près à traiter t comme une différentielle, nous devons regarder les dimensions de ω , qui est un élément d'intégrale, et, par suite, celle de δ , comme infiniment petites en comparaison des espaces décrits par les points des molécules pendant ce temps; de la sorte, E a la forme d'un fil courbe très fin, de section variable; pour le mesurer, considérons comme horizontal et représentons par PQ , dans la *fig* 4, le plan de ω au bout du

Fig. 4.



temps t , sa normale extérieure OZ étant la verticale montante; puis partageons le volume E en tranches horizontales de hauteur variable Z au-dessus d'un plan horizontal fixe placé plus bas, de façon à n'avoir que des hauteurs positives. La section horizontale étant σ , on aura

$$E = \int_{Z_0}^{Z_1} \sigma dZ = \sigma(Z_1 - Z_0).$$

σ' étant une valeur moyenne de σ et Z_0, Z_1 les hauteurs des positions extrêmes de σ ou de δ .

Le plan de l'aire δ , parallèle à celui de ω , qui à la fin est horizontal, fait partout avec l'horizontale un angle de l'ordre de ϵ ; ainsi, en remplaçant les sections horizontales par d'autres δ qui le sont à peu près, l'erreur relative est de l'ordre ϵ ou négligeable; le déplacement du point de contact sur la molécule (II) est très petit relativement à ses dimensions, et le changement relatif de R', S' est par suite de l'ordre de ϵ ; il en est de même du changement de I , par suite aussi du changement relatif de K dans l'expression (1), tous ses termes étant positifs. Il est donc indifférent de remplacer σ' par une des valeurs de δ , toutes étant égales.

Soient maintenant

$P'Q'$ le plan de ω au commencement du temps t ;

O et O' les positions de ω qu'on peut maintenant réduire à des points;

m la molécule (I);

m', m'' , des molécules (II) tangentes à la fin et au commencement en O, O' et ayant G', G'' pour centre;

H le point matériel de m' au contact en O ;

H' la position où il était au commencement du temps t , G' n'ayant pas bougé, de sorte que H' n'est plus sur la surface;

$G''H''$ égale et parallèle à $G'H'$.

Les hauteurs Z_0, Z_1 sont celles de δ aux deux époques, ou celles de G', G'' ; mais la différence $Z_1 - Z_0$ restera la même en prenant pour ces hauteurs celles de H', H'' ; Z_1 correspond à H' , car nous verrons qu'alors $Z_1 > Z_0$. Comme, au commencement du temps t , les axes de m et m'' étaient parallèles, et que H' était à la surface de m' , H'' est sur celle de m'' dont la position correspond à cette époque. La distance $O'H''$ de deux points de contact est de l'ordre des déplacements des points des molécules pendant le temps t , ou du même ordre que $Z_1 - Z_0$; mais, en outre, le plan $P'Q'$ étant tangent en O' à une surface sur laquelle est H'' , $O'H''$ fait un petit angle de l'ordre de ϵ avec le plan $P'Q'$, et par suite avec le plan horizontal. Il en résulte que sa projection sur la verticale est de l'ordre de $O'H'' \times \epsilon$ ou négligeable par

rapport à $Z_1 - Z_0$; il est donc indifférent de prendre pour Z_0 la hauteur de O' au lieu de H'' .

De la sorte, $Z_1 - Z_0$ est à la première époque la différence de hauteur d'un point O' de m et d'un point H' de m' , qui tous deux, à la fin du temps t , viennent au contact en O . Ainsi $\frac{Z_1 - Z_0}{t}$ est une valeur moyenne de la vitesse verticale relative de ces deux points. Cette vitesse, à l'instant du contact, est celle qui, au numéro précédent, a été désignée par V . Il est vrai que dans la valeur (3), où entre $u - u'$, on suppose actuellement u' annulée; mais, en même temps, u est remplacé par une vitesse relative qui est précisément $u - u'$; la valeur de V est donc la même et, le petit changement de vitesse pendant le temps t étant relativement négligeable, on aura

$$Z_1 - Z_0 = Vt;$$

il est d'ailleurs évident que, m' étant au-dessus du plan horizontal PQ , le plus élevé des deux points est H' . Il est préférable dans l'expression $E = \delta(Z_1 - Z_0)$ de prendre pour V comme pour δ leurs valeurs correspondant au commencement du temps t , à l'instant où les mouvements ne sont pas encore modifiés par les chocs : en remplaçant δ par sa valeur (1), on aura

$$E = \frac{K}{RS} \omega V t.$$

A chacune des molécules (1) correspond un volume pareil. Le nombre μ des chocs sera donc celui des points G' se trouvant, au commencement du temps t , dans un de ces volumes ou dans l'espace total $e = nE$; nous avons vu d'ailleurs, au commencement de ce numéro, que ce nombre est $n'e$, d'où résulte

$$(6) \quad \mu = \frac{K}{RS} \omega V n n' t.$$

En désignant par μ' l'accroissement de la force vive de translation pendant le temps t pour toute la masse gazeuse, on aura

$$\mu' = \mu \Delta,$$

Δ ayant la valeur (5), puisque les circonstances du choc et par suite Δ sont les mêmes pour toutes les molécules (I). De même

$$\mu'' = \mu\Delta''$$

sera cet accroissement pour la première espèce seule.

Il va sans dire que, quand V est négatif, μ doit être regardé comme nul, tout choc étant impossible sur l'élément ω . Dans tout ce qui précède, nous avons laissé de côté les chocs entre molécules de même espèce; leur nombre est inutile à chercher pour ce qui suivra.

IV. — NOMBRE μ DES CHOCS ENTRE ESPÈCES DIFFÉRENTES, DANS UNE SECONDE HYPOTHÈSE, ACCROISSEMENTS CORRESPONDANTS μ' , μ'' DES FORCES VIVES DE TRANSLATION.

Nous supposons comme précédemment qu'à un même instant, pour une même espèce, les axes des molécules sont parallèles et de même sens, que p, q, r, v sont égales pour toutes, et qu'il en est de même pour p', q', r', v' ; mais les vitesses v, v' sont dirigées indifféremment en tous sens. Les chocs seront encore seulement ceux où le point de contact est intérieur à l'élément ω des molécules (I).

Pour une époque donnée, la direction des axes est connue, de même que p, q, r, p', q', r' ; l'élément ω étant donné, cela détermine le point de contact des molécules (II), par suite h, h', α, \dots ; les valeurs (3), (4), de l, f sont communes à tous les chocs, et celles de V diffèrent seules. Nous pouvons donc de nouveau prendre pour plan horizontal celui des éléments ω à l'époque que l'on considère, ou au commencement du petit temps t , la normale extérieure étant la verticale montante.

Chaque espèce pourra être partagée en groupes, en réunissant dans le même les molécules dont la vitesse est sensiblement parallèle, c'est-à-dire telle qu'un rayon parallèle à chacune dans une même sphère fixe de rayon r aboutisse à l'intérieur d'un même élément σ ou σ' de sa surface. Les vitesses étant dirigées indifféremment en tous sens, le nombre de molécules d'un groupe est proportionnel à σ, σ' et a pour valeur $n \frac{\sigma}{4\pi}$ ou $n' \frac{\sigma'}{4\pi}$, qu'on devra substituer à n, n' dans la va-

leur (6) de μ . En outre, V , étant variable, devra y être remplacée par $VF(V)$, la fonction $F(V)$ ayant pour valeur 1 si V est positive, et 0 si V est négative. La valeur ainsi trouvée pour μ sera le nombre des chocs entre deux groupes d'espèce différente; le nombre que nous désignerons maintenant par μ est la somme de tous ceux-là, correspondant à toutes les associations de deux éléments σ, σ' de la surface sphérique; de même μ', μ'' sont les sommes des valeurs partielles de μ , ou $\mu\Delta$ et $\mu\Delta''$. En substituant la valeur de Δ et remarquant que toutes les lettres, sauf V , sont indépendantes du groupe, on aura

$$(7) \quad \begin{cases} \mu = \frac{nn't K \omega}{4 RS} H_1, \\ \mu' = \frac{nn't K \omega}{RS} \left[\frac{H_2}{f^2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} - f \right) - \frac{H_3}{f} l \right], \\ \mu'' = \frac{nn't K \omega}{RS} \left(\frac{H_3}{mf^2} - \frac{H_4}{f} \right), \end{cases}$$

en posant

$$H_1 = \sum \sum \frac{\sigma\sigma'}{4\pi^2} VF(V),$$

$$H_2 = \sum \sum \frac{\sigma\sigma'}{4\pi^2} V^2 F(V),$$

$$H_3 = \sum \sum \frac{\sigma\sigma'}{4\pi^2} V^3 F(V),$$

$$H_4 = \sum \sum \frac{\sigma\sigma'}{4\pi^2} V^3 u F(V).$$

Les sommes doivent s'étendre à tous les éléments σ de la surface sphérique fixe et de plus à tous ses éléments σ ; on a

$$V = u - u' - l = v \cos i - v' \cos i' - l,$$

i et i' étant les angles de la direction de v ou v' avec la verticale montante, et par suite, la distance angulaire de σ, σ' au point le plus élevé de la sphère; en prenant ces angles pour coordonnées angulaires et rassemblant les éléments σ, σ' où ils sont les mêmes, on devra substituer $\sigma = 2\pi \sin i di$, $\sigma' = 2\pi \sin i' di'$.

En posant alors

$$H = \int_0^\pi H'_n \sin i \, di, \quad H'_n = \int_0^\pi V^{n-1} F(V) \sin i' \, di',$$

il suffira de prendre $n = 2, 3$ ou 4 , pour que H devienne H_1, H_2 ou H_3 .

On trouvera H'_n en prenant pour variable V au lieu de i' ; comme on a

$$V = u - u' - l = v \cos i - v' \cos i' - l,$$

V croîtra de V'' à V' , en posant

$$V' = v \cos i + v' - l, \quad V'' = v \cos i - v' - l;$$

en substituant $\sin i \, di = \frac{dV}{v'}$, on aura

$$H'_n = \frac{1}{v'} \int_{V''}^{V'} V^{n-1} F(V) \, dV.$$

D'après ce que représente $F(V)$, il est clair, soit que V' et V'' soient toutes deux positives, ou que V' seule le soit, ou que toutes deux soient négatives, qu'on aura toujours

$$H'_n = \frac{1}{v'^n} [V'^n F(V') - V''^n F(V'')].$$

Posons ensuite

$$(8) \quad \begin{cases} V_1 = v + v' - l, \\ V_2 = v - v' - l, \\ V_3 = -v + v' - l, \\ V_4 = -v - v' - l. \end{cases}$$

En substituant dans H le premier terme de H'_n seul et prenant pour variable V' au lieu de i , on aura

$$\sin i \, di = - \frac{dV'}{v};$$

et, en renversant les limites, V' croîtra de V_3 à V_1 ; on trouvera ainsi de la même manière, pour le premier terme de H ,

$$\frac{1}{v' n(n+1)} [V_1^{n+1} F(V_1) - V_3^{n+1} F(V_3)].$$

Le second terme de H s'en déduit évidemment en remplaçant V_1 et V_3 par V_2 et V_4 .

Il en résulte

$$(9) \quad \begin{cases} H_1 = \frac{1}{6v'} [V_1^3 F(V_1) - V_2^3 F(V_2) - V_3^3 F(V_3) + V_4^3 F(V_4)], \\ H_2 = \frac{1}{12v'} [V_1^4 F(V_1) - V_2^4 F(V_2) - V_3^4 F(V_3) + V_4^4 F(V_4)], \\ H_3 = \frac{1}{20v'} [V_1^5 F(V_1) - V_2^5 F(V_2) - V_3^5 F(V_3) + V_4^5 F(V_4)], \end{cases}$$

La valeur de H_1 , d'après ce que représente H'_n , peut s'écrire

$$H_1 = \int_0^\pi u H'_3 \sin i \, di = \frac{1}{3v'} \int_0^\pi [u V'^3 F(V') - u V''^3 F(V'')] \sin i \, di.$$

D'après les valeurs de V' , V'' , on peut remplacer u ou $v \cos i$ par $V' - l - v'$ dans le premier terme, et par $V'' + l + v'$ dans le second, d'où

$$\begin{aligned} H_1 = & \frac{1}{3v'} \int_0^\pi [V'^4 F(V') - V''^4 F(V'')] \sin i \, di \\ & + \frac{l}{3v'} \int_0^\pi [V'^3 F(V') - V''^3 F(V'')] \sin i \, di \\ & - \frac{1}{3} \int_0^\pi [V'^3 F(V') - V''^3 F(V'')] \sin i \, di. \end{aligned}$$

Ces trois intégrales s'obtiendront comme ci-dessus, et les deux premières seront $\frac{1}{3} H_3$ et lH_2 . On aura donc

$$(9 \text{ bis}) \quad \begin{cases} H_1 = \frac{1}{3} H_3 + lH_2 - H'_2, \\ \text{où} \\ H'_2 = \frac{1}{12v'} [V_1^4 F(V_1) - V_3^4 F(V_3) + V_2^4 F(V_2) - V_4^4 F(V_4)]. \end{cases}$$

Ces valeurs étant substituées dans les formules (7), elles ne contiendront plus rien d'inconnu, et seront encore sous forme finie.

V. — RECHERCHE DE μ , μ' , μ'' DANS UNE TROISIÈME HYPOTHÈSE.

Le mode de variation de p, q, r et l'orientation des axes des molécules dans l'espace sont deux faits indépendants. Si, par exemple, elles sont des solides de révolution, l'axe de figure décrit dans l'espace un cône autour d'une droite dont la direction est indifférente et le mouvement conique de l'axe peut être à un instant quelconque de sa période. A plus forte raison, dans le cas d'une forme générale des molécules, nous devons, pour une même espèce, regarder comme indifférente la direction des axes pour chacune.

C'est ce que nous allons maintenant supposer et μ sera le nombre de chocs entre espèces différentes, non sur un élément ω , mais quel que soit le point de tangence sur les deux molécules. Toutefois, nous admettrons encore que v et v' aient une seule valeur et qu'au commencement du temps t , p, q, r soient égaux pour l'espèce (I), et p', q', r' pour l'espèce (II). Le résultat ne peut encore se trouver que par des hypothèses successives.

1° Admettons que pour les molécules (I) seulement les axes restent parallèles et qu'il s'agisse seulement des chocs de l'élément ω . — Soient μ_2, μ'_2 le nombre des chocs et l'accroissement de la vitesse de translation pour ce cas, et μ_1, μ'_1 les valeurs (7). Il sera préférable de considérer encore au commencement du temps t la normale extérieure aux éléments ω comme la verticale montante. Cela détermine dans les formules (7) la signification de h, α, β, μ ; quant à $h', \alpha', \beta', \mu'$, elles se rapportaient à une molécule (II) produisant un choc à l'instant que l'on considère; elles dépendent de l'élément ω' qui vient au contact avec ω , et celui-là était connu par la direction de sa normale, celle des axes étant donnée. Mais, dans le cas actuel, nous devons partager l'espèce (II) en groupes.

Pour cela, imaginons dans chaque molécule (II) une surface sphérique de centre G' , de rayon 1, partagée en éléments σ d'une façon qui, pour toutes, soit identique par rapport à leurs axes. Nous grouperons

d'abord ensemble les molécules pour lesquelles la verticale du point G' dirigée vers le bas aboutit à l'intérieur du même élément σ , et comme elle peut aboutir indifféremment à tout point de la surface sphérique, le nombre de molécules d'un de ces groupes provisoires est $n' \frac{\sigma}{4\pi}$; puis nous ferons tourner encore une molécule autour de cette verticale d'un angle variable ψ , par différences égales $d\psi$, et nous aurons ainsi achevé de classer les directions des axes, ou les groupes, de sorte que le nombre de molécules d'un même groupe sera $n' \frac{\sigma}{4\pi} \frac{d\psi}{2\pi}$, et que pour celles-là tous les axes sont parallèles; nous pourrions alors employer pour ce seul groupe les formules (7), ce qui revient à remplacer n' par la valeur précédente, puis nous devons ajouter μ et μ' pour tous les groupes, ce qui donne

$$\mu_2 = \sum \frac{\sigma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mu_1 \frac{d\psi}{2\pi}, \quad \mu'_2 = \sum \frac{\sigma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mu'_1 \frac{d\psi}{2\pi}.$$

Voici comment on simplifie ces expressions: il est préférable de considérer ω comme un point unique O où le plan tangent est horizontal. Cela posé, soit ω' l'élément de la surface de la molécule (II) ou de m' composé de points correspondants de ceux de σ ; comme on a défini ce mot au § I, c'est-à-dire tels que les normales extérieures à m' et à la sphère soient parallèles et de même sens. Nous avons vu que le rapport des deux aires était RS pour le corps m et par suite $R'S'$ pour m' , de sorte que $\omega' = R'S'\sigma$. Or, pour chaque groupe ou chaque terme des sommes μ_2, μ'_2 , on doit évaluer $h', \alpha', \beta', \gamma'$ en plaçant m tangent en O , de sorte que la normale intérieure soit verticale montante; d'autre part, pour les termes de la somme Σ correspondant à σ , la verticale de G' aboutit en un point de σ . Les positions où il en est ainsi sont donc celles où le point de contact en O est intérieur à ω' ; on peut donc substituer $\sigma = \frac{\omega'}{R'S'}$, et étendre la somme Σ aux divers éléments ω' , en faisant correspondre $h', \alpha', \beta', \gamma'$ à chacun d'eux.

Si, ensuite, on fait tourner la molécule d'un angle ψ en la plaçant toujours tangente, c'est autour de la verticale du point O qu'elle tournera; les valeurs de f, l, H_i, R', S' restent alors les mêmes, et la seule

quantité qui varie dans les formules (7) est l'angle I qui entre dans la valeur (7) de K ; celui-là peut servir de mesure à ψ , de sorte qu'on a $\psi = I + \text{const.}$, $d\psi = dI$; l'expression $\int_0^{2\pi} K \frac{d\psi}{2\pi}$ pourra être encore désignée par K et s'en déduit en remplaçant $\cos^2 I$ et $\sin^2 I$ par $\frac{1}{2}$; de la sorte nous devons maintenant supposer

$$(10) \quad \begin{cases} K = \frac{1}{2}(R + R')(S + S') + \frac{1}{2}(R + S')(S + R') \\ = RS + R'S' + \frac{1}{2}(R + S)(R' + S'). \end{cases}$$

Après ces changements on aura

$$\mu_2 = \sum \mu_i \frac{\omega'}{4\pi R'S'}, \quad \mu'_2 = \sum \mu'_i \frac{\omega'}{4\pi R'S'}.$$

2° *Valeurs de μ , μ' et μ'' .* — Les expressions précédentes ne dépendent point de la position horizontale attribuée à ω , et si, en admettant toujours que les axes des molécules (1) sont parallèles, nous voulons étendre les chocs à tous les éléments ω , il n'y a qu'à ajouter les valeurs de μ_2 , μ'_2 qui leur correspondent.

Si, ensuite, en supposant ces axes non parallèles, nous partageons l'espèce (1) en groupes, le résultat précédent reste le même pour chacun, ce qui rend ce classement inutile.

En substituant les valeurs (7) de μ , μ' , et remplaçant f par sa valeur dans l'expression $\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} - f\right)$, on aura ainsi, ce qui précède étant applicable à μ'' ,

$$(11) \quad \begin{cases} \mu = \frac{nn't}{16\pi} \sum \sum \frac{K}{RSR'S'} H_1 \omega \omega', \\ \mu'' = \frac{nn't}{4\pi} \sum \sum \frac{K}{RSR'S'} \left(\frac{H_3}{mf^2} - \frac{H_4}{f} \right) \omega \omega', \\ \mu' = \frac{nn't}{4\pi} \sum \sum \frac{K}{RSR'S'} \left[-\frac{H_2}{f} l - \frac{H_3}{f^2} (h^2 M + h'^2 M') \right] \omega \omega'. \end{cases}$$

les sommes s'étendant aux éléments ω , ω' des deux espèces.

On peut remarquer, quoique nous n'ayons pas à en faire l'applica-

tion, qu'on a toujours

$$\Sigma \Sigma l \omega \omega' = 0.$$

En effet, dans les formules (2), x, y, z sont les coordonnées de ω , et X, Y, Z les cosinus de la normale intérieure. On peut grouper les éléments de façon qu'ils aient deux à deux la même projection sur le plan des xy ; ωZ la représente pour tous les deux en signe contraire; d'ailleurs, y étant le même, il en résulte $\Sigma y Z \omega = 0$; le raisonnement étant tout pareil pour $z Y, z X, \dots$, les équations (2) donnent

$$\Sigma \omega h \cos \alpha = 0, \quad \Sigma \omega h \cos \beta = 0, \quad \Sigma \omega h \cos \gamma = 0,$$

et l'on tirera des formules (3)

$$\Sigma h L \omega = 0, \quad \Sigma h' L' \omega' = 0, \quad \Sigma \Sigma l \omega \omega' = 0.$$

VI. — RECHERCHE DE μ, μ' DANS UNE QUATRIÈME HYPOTHÈSE. CAS OÙ LES MOLÉCULES SONT DES SOLIDES DE RÉVOLUTION. FORME DE LA SOLUTION LA PLUS GÉNÉRALE DU PROBLÈME DES CHOCS.

1^o Recherche de μ, μ' . — Tant qu'une molécule n'éprouve pas de choc et se trouve ainsi soustraite à toute action extérieure, p, q, r varient d'une façon périodique, de sorte que, après la durée T de la période, elles repassent par les mêmes valeurs, bien que l'axe instantané ne revienne point à la même direction dans l'espace.

Dans notre nouvelle hypothèse, les molécules de même espèce auront bien la même loi de rotation, c'est-à-dire le mode de variation de p, q, r sera le même; mais, au lieu de supposer, comme dans la troisième hypothèse, qu'à un même instant p, q, r sont les mêmes pour toutes les molécules, nous admettrons qu'elles peuvent correspondre à divers instants de leur période, et il est clair que ce sera à tous indifféremment. En désignant donc par τ le temps compté à partir de l'instant où p , par exemple, est maxima et faisant croître τ par intervalles égaux $d\tau$, il correspondra à chacune de ces époques un même nombre $n \frac{d\tau}{T}$ de molécules (I), et les molécules (II) se classeront de

même. Les nouvelles valeurs de μ , μ' se déduiront donc des formules (11) en remplaçant nn' par

$$nn' \frac{dz}{T} \frac{dz'}{T'}$$

et ajoutant les résultats pour toutes les valeurs de τ et τ' . En remarquant que cette intégration porte seulement sur p, q, \dots , et, par suite sur l, l', V , on aura

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu = \frac{nn'l}{16\pi} \sum \sum \frac{K}{RSR'S'} \omega \omega' \int_0^T \frac{dz}{T} \int_0^{T'} \frac{dz'}{T'} H_1, \\ \mu' = \frac{nn'l}{4\pi} \sum \sum \frac{K}{RSR'S'} \omega \omega' \int_0^T \frac{dz}{T} \int_0^{T'} \frac{dz'}{T'} \\ \quad \times \left[-\frac{H_2}{f} l - \frac{H_2}{f^2} (h^2 M + h'^2 M') \right]. \end{array} \right.$$

μ'' aurait une forme analogue.

2° *Supposons que les molécules de chaque espèce soient des solides de révolution.* — En prenant pour $GZ, G'Z'$ les axes de figure, on aura $A = B, A' = B'$: la droite à laquelle correspondent α, β, γ est perpendiculaire au plan mené par G et la normale à l'élément ω ; elle est donc perpendiculaire à GZ , et l'on a

$$\cos \gamma = 0;$$

on pourra alors, en regardant α comme un angle polaire, remplacer $\cos \beta$ par $\sin \alpha$, d'où

$$M = \frac{l}{A}.$$

L'axe de figure décrit d'un mouvement uniforme un cône autour d'une droite fixe menée par G ; le plan de ces deux droites renferme l'axe instantané, et son intersection avec celui des xy est la direction de la résultante S de p et de q , laquelle, de même que r , reste constante.

En désignant par ψ l'angle polaire de cette résultante dans le plan

des xy , on aura

$$p = S \cos \psi, \quad q = S \sin \psi, \quad L = S \cos(\psi - \alpha).$$

L'angle ψ varie proportionnellement au temps; il en est de même de $\psi - \alpha$ dans les formules (12), parce que, dans l'intégrale relative à τ , ω et α restent constants. En changeant au besoin le signe de $\psi - \alpha$, on peut supposer cet angle croissant; la période T est révolue quand ψ a augmenté de 2π , et il est indifférent de prendre ψ pour variable au lieu de τ en remplaçant $\frac{d\tau}{T}$ par $\frac{d\psi}{2\pi}$; le résultat ne changera pas non plus en écrivant ψ au lieu de $\psi - \alpha$. En faisant les mêmes transformations pour les molécules (II), on voit qu'on devra prendre dans les formules (12)

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} M = \frac{1}{A}, \quad M' = \frac{1}{A'}, \\ L = S \cos \psi, \quad L' = S' \cos \psi', \\ \int_0^T \frac{d\tau}{T} \int_0^T \frac{d\tau'}{T'} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi d\psi'}{4\pi^2}, \end{array} \right.$$

la dernière égalité indiquant une simple substitution de signes.

On peut aussi simplifier la somme relative à ω en partageant la surface par ses lignes de courbure, c'est-à-dire par des méridiens successifs faisant avec l'un d'eux les angles φ , $\varphi + d\varphi$, et par des parallèles rapprochés, comprenant entre eux un arc $d\sigma$ de la courbe méridienne; on aura ainsi

$$\omega = \varphi d\sigma d\varphi,$$

φ étant le rayon du parallèle. Parmi les lettres entrant dans l'expression qui multiplie ω , d'où ψ a disparu par l'intégration, h , k , R , S sont les seules qui dépendent de la position de ω , mais elles ne dépendent pas de φ ; on peut donc intégrer par rapport à φ en remplaçant $d\varphi$ par 2π . En outre, R est le rayon de courbure de la courbe méridienne, et S la normale terminée à l'axe de figure. En désignant par ε leur angle, pour la normale extérieure, variable de 0 à π , sur une même courbe méridienne, on aura

$$d\sigma = R d\varepsilon, \quad \varphi = S \sin \varepsilon, \quad \omega = 2\pi RS \sin \varepsilon d\varepsilon,$$

et en désignant par des accents les quantités analogues pour les molécules (II) on pourra encore, dans les formules (12), faire la substitution de signes indiquée par l'égalité

$$(14) \quad \sum \sum \frac{K}{RSR'S'} \omega\omega' = 4\pi^2 \int_0^\pi \int_0^\pi K \sin \epsilon \sin \epsilon' d\epsilon d\epsilon'.$$

2^o *Question générale à résoudre.* — En laissant de côté le cas des solides de révolution, nous devons supposer l'ensemble des molécules composé d'espèces données quant à la forme, quant à la masse m, m', m'', \dots , et quant à leur nombre, qui sera n, n', n'', \dots . Toute recherche touchant les effets des chocs, en la considérant rigoureusement, exige que, pour chaque espèce, on connaisse la proportion des molécules ayant les diverses vitesses de translation et les divers modes de rotation. C'est nécessaire même pour pouvoir comparer les forces vives totales de translation et de rotation dans l'état permanent.

Pour toute molécule (I) p, q, r varient de façon qu'on ait

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = K^2, \quad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K^2G,$$

K et G étant constants pendant le mouvement et G étant compris entre le plus grand et le plus petit des nombres A, B, C . Le mode de rotation est identique pour deux molécules si K et G sont les mêmes. Dans les formules (12), cela a été supposé pour toutes les molécules de même espèce; p, q, r étaient des fonctions déterminées de K, G et de la variable τ , qui disparaissait dans l'intégration. La forme des molécules étant donnée, les valeurs (12) de $\frac{\mu}{nn't}, \frac{\mu'}{nn't}$ sont des fonctions connues de K, G, v et de leurs analogues pour la seconde espèce.

Laissons maintenant de côté toutes les hypothèses particulières faites jusqu'ici, et considérons le cas réel des mouvements de forme variable. La totalité des molécules d'une même espèce pourra se distribuer en groupes en faisant rentrer dans le même celles pour lesquelles, au commencement du temps t , les quantités K, G, v qui caractérisent chaque mouvement sont comprises entre les limites

$$(15) \quad K \text{ et } K + dK, \quad G \text{ et } G + dG, \quad v \text{ et } v + dv,$$

pour les molécules (I) et d'analogues pour les autres. Pour les molé-

cules (I), le nombre de celles d'un groupe sera

$$nF(K, G, v) dK dG dv,$$

F étant une fonction inconnue; pour les autres espèces n devra être remplacé par n' , n'' , ..., et F par d'autres fonctions inconnues F' , F'' , Nous ne pouvons plus actuellement, en divisant un groupe composé en d'autres plus simples, connaître les nombres de molécules qui leur correspondent, comme nous l'avons fait précédemment, par une raison d'indifférence; les fonctions F , F' , ... doivent donc, avant tout, être déterminées, et voici d'après quelles conditions.

Appelons H, pour abrégé, un groupe déterminé de première espèce auquel correspondent les limites (15). Dans l'état permanent de l'ensemble des molécules la répartition des vitesses doit rester la même; ainsi le nombre des molécules du groupe H doit rester constant. Soit, pendant la durée t ,

$$N(K, G, v) dK dG dv$$

le nombre de chocs effectués entre ce groupe et tous ceux de toutes les espèces, y compris la première: c'est le nombre des molécules qui sortiront du groupe, ou cesseront d'en faire partie, les chocs changeant K , G , v ; soit aussi

$$N'(K, G, v) dK dG dv,$$

parmi les chocs entre tous les groupes de première espèce d'une part, et d'autre part, tous ceux de toutes les espèces, le nombre de ceux pour lesquels les valeurs de K , G , v , après le choc, sont pour la molécule (I) comprises entre les limites (15); c'est le nombre des molécules (I) qui, par l'effet des chocs, entrent dans le groupe H; il doit être égal au nombre de celles qui en sortent, d'où

$$N(K, G, v) = N'(K, G, v).$$

Pour chaque espèce, il existe une relation semblable, et c'est de là qu'on doit déduire les fonctions F , F' ,

En remplaçant nn' dans la valeur (12) de μ par

$$nn'F(K, G, v)F'(K', G', v')dK dK' dG dG' dv dv',$$

elle devient le nombre de chocs entre le groupe H et un groupe quelconque d'une autre espèce, pour laquelle on peut toutefois prendre la première. En les ajoutant pour tous ces groupes, on trouvera

$$N(K, G, v) dK dG dv.$$

Le calcul analogue pour N' est beaucoup plus compliqué, et il est inutile de le détailler, car, au point de vue général où nous nous plaçons, la solution offre des difficultés insurmontables. Nous verrons plus tard les résultats qui peuvent être obtenus dans certains cas particuliers, à l'aide du principe d'indifférence.

§ 2. — Cas où les molécules sont à peu près sphériques.

VII. — PRÉLIMINAIRES.

Notre but est de déterminer le rapport des forces vives totales de translation et de rotation pour toutes les espèces réunies; cette recherche devient possible quand toutes les molécules sont à peu près sphériques.

1^o *Remarques générales sur la répartition des vitesses.* — En suivant la méthode générale indiquée au n^o VI, pour des molécules exactement sphériques, toutes de même masse et de même rayon, j'ai démontré précédemment qu'en désignant par $n\varphi(x) dx$ le nombre de molécules dont la vitesse est comprise entre x et $x + dx$, on a exactement

$$(16) \quad \varphi(x) = \alpha e^{-\beta x^2} x^2,$$

α et β étant des constantes; en désignant par mu^2 la force vive moyenne des molécules, et remarquant que n est leur nombre total, on doit avoir

$$\Sigma n \varphi(v) dv = n, \quad \Sigma nmv^2 \varphi(v) dv = nm u^2,$$

ou

$$\alpha \int_0^\infty v^2 e^{-\beta v^2} dv = 1, \quad \alpha \int_0^\infty v^4 e^{-\beta v^2} dv = u^2.$$

La formule

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta v} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\beta}},$$

différenciée par rapport à β , donne

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta v^2} v^2 dv = \frac{\sqrt{\pi}}{4\beta^{\frac{3}{2}}}, \quad \int_0^{\infty} e^{-\beta v^2} v^4 dv = \frac{3\sqrt{\pi}}{8\beta^{\frac{5}{2}}},$$

d'où

$$(17) \quad \alpha = \frac{4\beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}}, \quad \beta = \frac{3}{2\alpha^2}.$$

De la sorte α et β sont complètement déterminés au moyen de la force vive totale du milieu.

La valeur de $\zeta(v)$ devient maxima quand $\beta v^2 = 1$ ou $v = u\sqrt{\frac{2}{3}}$; elle décroît rapidement quand v s'écarte de cette valeur.

Sans examiner pour le moment si la formule (16) est applicable quand les molécules sont à peu près sphériques et qu'il y en a plusieurs espèces, il est clair que, dans l'état permanent, le même fait sera toujours vrai, c'est-à-dire que, si l'on partage, comme au n° VI, les nombres n, n' en groupes de nombres

$$nF(K, G, v) dK dG dv, \quad n'F'(K', G', v') dK' dG' dv',$$

ils deviendront très peu nombreux si v ou v' s'écartent notablement de leurs valeurs moyennes. Il en sera de même et d'une façon plus prononcée si les forces vives de rotation K^2, K'^2 s'écartent de leurs moyennes. En effet, les vitesses de translation changent notablement à chaque choc, un seul pouvant suffire pour réduire l'une d'elles à zéro. Au contraire, les forces vives de rotation restent invariables si les molécules sont sphériques; si elles le sont à peu près, elles n'éprouvent qu'un faible changement, et il faudrait une combinaison improbable de chocs pour leur faire acquérir des valeurs sensiblement différentes de la moyenne.

2° *Grandeur relative des quantités qui entrent dans les formules (12).* — Les molécules étant à peu près sphériques, les rapports des nombres A, B, C entre eux diffèrent peu de l'unité. Ensuite

$\sqrt{\frac{A}{m}}$ est une ligne dont la valeur, pour une sphère homogène de rayon ρ , est $\rho\sqrt{\frac{2}{5}}$; en même temps, h est la projection de la droite joignant le centre à un point de la surface sur le plan tangent en ce point. Ainsi le rapport de h à $\sqrt{\frac{A}{m}}$ et son carré $\frac{mh^2}{A}$ sont des nombres abstraits très petits; il en sera donc ainsi de mh^2M et de même de mh'^2M' ; de la sorte, dans la valeur (4) de f , la seconde partie $h^2M+h'^2M'$ sera très petite par rapport à la première $\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}$.

Par suite de la petitesse de h , le rapport $\frac{hL}{v}$ sera aussi très petit quand on donne aux deux forces vives leurs valeurs moyennes. Ce serait même une conséquence de ce qui précède si l'on admettait *a priori* que le nombre que nous cherchons, ou le rapport de la force vive de rotation à l'autre, ne fût pas très grand, car il en serait de même de $\frac{Ap^2}{mv^2}$ et son produit par $\frac{mh^2}{A}$ ou $\frac{h^2p^2}{v^2}$ serait très petit; il en serait alors de même, d'après les formules (3), pour $\frac{hp}{v}$, $\frac{hL}{v}$, et aussi pour $\frac{h'L'}{v'}$ en faisant la même hypothèse pour la seconde espèce. Par conséquent, nous devons considérer $\frac{l}{v+v'}$ comme très petit quand on emploie les valeurs moyennes.

Il n'en sera plus ainsi si l'on donne à la force vive de rotation une valeur beaucoup plus grande que sa moyenne, ou à v , v' une beaucoup plus petite. Mais alors, comme on l'a vu, le coefficient du groupe, c'est-à-dire $F(K, G, v)$ et son analogue sont très petits, et comme nous cherchons à déterminer avec une faible erreur relative les divers termes des formules (11) et (12), après qu'on les aura ajoutées pour tous les groupes, nous devons dans celles-là regarder constamment l comme très petit numériquement par rapport à $v + v'$.

VIII. — RÉDUCTION DES EXPRESSIONS H_3 , H_2 , H_1 .

1° *Valeurs des coefficients* $F(V_n)$. — Dans les formules (9) et (9 bis), chacun d'eux désigne l'unité si V_n est positif, et zéro s'il est

négalif. D'après ce qui précède, V_1 ou $v + v' - l$ doit être supposé toujours positif et V_2 négatif; ainsi $F(V_1) = 1$, $F(V_2) = 0$. On devra de même supposer $F(V_2) = 1$ quand $v > v'$. En effet, si l'on avait à la fois $v - v' > 0$ et V_2 ou $v - v' - l < 0$, V_2 serait numériquement inférieur à l , $v - v'$ très petit par rapport à $v + v'$. Ainsi, dans les numérateurs des valeurs (9) et (9 bis) de H_2 , H_3 , H'_2 , le premier terme serait très supérieur aux autres; plus tard, nous aurons à tenir compte dans ce terme de la portion en l ou l^2 , en négligeant les suivantes. Vis-à-vis de ceux-là le terme en V_2 , inférieur à l^4 ou l^5 , serait à plus forte raison négligeable. Il en serait de même pour H_1 , mais il est inutile de le mentionner, car nous n'aurons plus à faire usage de sa valeur.

On voit de même qu'on devra supposer $F(V_2) = 0$ si $v < v'$, et $F(V_3) = 1$ ou 0 suivant que $v' >$ ou $<$ v .

De la sorte H_2 , H_3 , H'_2 deviendront des fonctions entières de l dont les coefficients sont bien connus dans les deux cas ou $v' >$ ou $<$ v .

2° *Les termes contenant l à une puissance impaire doivent être supprimés.* — En effet, les intégrales du mouvement de rotation employées au n° VI, c'est-à-dire

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = K^2, \quad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K^2G,$$

donnent

$$A(A - G)p^2 + B(B - G)q^2 + C(C - G)r^2 = 0.$$

équation du cône du second degré que l'axe instantané décrit à l'intérieur du corps; K et G restant les mêmes, ce mouvement peut avoir lieu en deux sens opposés, et l'on sait par la théorie de la rotation que dans les deux cas, pour des positions identiques de l'axe, celui-ci se déplace avec la même vitesse, et la vitesse angulaire est la même en sens contraire.

De la sorte, p , q , r sont les mêmes en signe contraire et varient de la même manière en fonction du temps t en prenant celui-ci en sens inverse. Cela résulte, d'ailleurs, des équations du mouvement

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr = 0, \quad \dots,$$

qui restent les mêmes en remplaçant t , p , q , r par $-t$, $-p$, $-q$, $-r$.

Par conséquent, dans les formules (12), K , G et v restant les mêmes comme K' , G' , v' , on doit ajouter les valeurs de μ , μ' , μ'' correspondant aux mouvements dans les deux sens, lesquels, pour raison d'indifférence, doivent être considérés comme également fréquents, et, pour ceux-là, la somme $\int_0^T \frac{dx}{T}$ affectant des termes de degré impair par rapport à p , q , r réunis à des valeurs égales et de signes contraires. La même remarque s'applique aux variables p' , q' , r' de la seconde espèce.

Dans les formules (11) et (12), les termes contenant l comme ceux qui contiennent f seront ainsi de degré pair par rapport à h , h' réunis, et nous négligerons le quatrième degré par rapport à ces petits nombres et, par suite, les termes en l^4 . D'après les formules (12) et (9 bis), H_2 est partout multiplié par l et, par conséquent, doit être réduit à son terme en l , tandis que, dans H_3 , H_2 , on doit conserver seulement les termes de degré pair. Dans les valeurs (9) et (9 bis), on doit employer le terme en V_2 quand $v > v'$, le terme en V_3 quand $v < v'$; en affectant les signes supérieurs au premier cas, les inférieurs au second, on aura

$$(18) \quad lH_2 = -\frac{2}{3} g l^2, \quad H_3 = \frac{g'}{10} + g l^2, \quad H_2 = \frac{g''}{6} + g'' l^2,$$

en posant

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} g = \frac{(v+v')^2 \mp (v-v')^2}{2vv'}, \quad g' = \frac{(v+v')^2 \mp (v-v')^2}{2vv'}, \\ g'' = \frac{(v+v')^2 \pm (v-v')^2}{2v}, \quad g'' = \frac{(v+v')^2 \pm (v-v')^2}{2v}. \end{array} \right.$$

IX. — SOMMATION RELATIVE AU NOMBRE G .

Si toutes les molécules sont des solides de révolution, on a, comme on l'a vu, $\cos \gamma = \cos \gamma' = 0$, et, d'après les formules du n° II, la composante r ou r' de la vitesse angulaire reste constante malgré les chocs; la seule portion variable de la force vive de rotation est $A\rho^2 + Aq^2$; c'est entre celle-ci seulement et la force vive de transla-

tion qu'il s'établit dans l'état permanent un rapport invariable, et il sera préférable de la désigner par K^2 , tandis que la force vive de rotation tout entière sera $K^2 + Cr^2$ ou $K^2 + \text{const.}$ Nous poserons donc dans ce cas

$$A(p^2 + q^2) = K^2, \quad A'(p'^2 + q'^2) = K'^2.$$

En même temps, d'après les formules (13), on aura

$$l = hs \cos \psi + h' s' \cos \psi'$$

et, dans les formules (12), les intégrations relatives à τ, τ' sont remplacées par le signe

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi d\psi'}{4\pi^2},$$

dans lequel ψ, ψ' varient seules, s, s' et toutes les autres lettres restant constantes. Cela seul suffirait évidemment pour faire disparaître toutes les puissances impaires de l , et, quant à l^2 , elle sera remplacée par $\frac{1}{2}h^2s^2 + \frac{1}{2}h'^2s'^2$; d'ailleurs, s^2, s'^2 désignant $p^2 + q^2, p'^2 + q'^2$ ou $\frac{K^2}{A}, \frac{K'^2}{A'}$ ou K^2M, K'^2M' , d'après les formules (13). Les intégrations étant ainsi effectuées, c'est dans les formules (11) qu'on devra substituer la valeur de l^2 ou

$$(20) \quad l^2 = \frac{1}{2}h^2MK^2 + \frac{1}{2}h'^2M'K'^2.$$

Dans le cas général, l^2 ou $(hL + h'L')^2$ doit être réduite à $h^2L^2 + h'^2L'^2$, les termes du premier degré en p, q, r disparaissant. En outre, les équations du mouvement donnent

$$\int pq dt = \frac{C}{A-B} r + \text{const.}, \quad \text{d'où} \quad \int_0^T pq d\tau = 0,$$

le second membre reprenant la même valeur au bout de la période T : il en serait de même pour $pr, qr, p'q', \dots$, de sorte que l^2 se réduit à

$$l^2 = h^2(p^2 \cos^2 \alpha + q^2 \cos^2 \beta + r^2 \cos^2 \gamma) \\ + h'^2(p'^2 \cos^2 \alpha' + q'^2 \cos^2 \beta' + r'^2 \cos^2 \gamma').$$

Nous ne pouvons point effectuer les intégrations relatives à τ, τ' sous une forme simple ni savoir quelle est la fréquence plus ou moins grande des valeurs de G, G' . Mais il faut remarquer que, dans le cas des surfaces de révolution, où l'on avait $Ap^2 + Aq^2 = K^2$, on a été amené à remplacer Ap^2, Aq^2 par une valeur moyenne $\frac{1}{2}K^2$; or, il est évident que, dans le cas général où $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = K^2$, si l'on veut, dans les formules (11), grouper ensemble les termes où K^2 est le même, ce qui revient à remplacer séparément Ap^2, Bq^2, Cr^2 par une valeur moyenne, on devra prendre pour celle-là $\frac{1}{3}K^2$; en effet, il en serait ainsi en supposant les molécules sphériques et les mouvements de rotation indifférents en tous sens. Si les molécules sont à très peu près sphériques, il en sera de même, sauf une erreur de l'ordre de l'écart de sphéricité ou négligeable dans des termes déjà du deuxième degré par rapport à h et h' . La première partie de l^2 pouvant s'écrire

$$h^2 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{A} Ap^2 + \frac{\cos^2 \beta}{B} Bq^2 + \frac{\cos^2 \gamma}{C} Cr^2 \right)$$

sera ainsi remplacée par

$$\frac{1}{3} h^2 K^2 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{A} + \frac{\cos^2 \beta}{B} + \frac{\cos^2 \gamma}{C} \right) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{3} h^2 K^2 M.$$

et l'autre partie de même par $\frac{1}{3} h'^2 K'^2 M'$. Après cela, les intégrations relatives à τ, τ' sont superflues, de même que les formules (12), et l'on devra substituer dans les formules (11)

$$(21) \quad l^2 = \frac{\theta}{3} (h^2 MK^2 + h'^2 M' K'^2),$$

θ étant égal à l'unité dans le cas général et devant être remplacé par $\frac{3}{2}$ quand les molécules sont des solides de révolution.

En substituant les valeurs (18) de lH_2, H_3, H'_2 dans les équations (11), on devra négliger le quatrième degré et, par suite, dans l'expression de μ' , réduire H_3 à $\frac{G'}{10}$. En remarquant que, d'après les formules (9 bis), on a

$$\frac{H_3}{m} - fH_4 = \left(\frac{1}{m} - \frac{4f}{3} \right) H_3 - flH_2 + fH'_2,$$

on trouvera

$$(22) \left\{ \begin{aligned} \mu' &= \frac{nn'\ell}{4\pi} \sum \sum \frac{K_{\omega\omega'}}{RSR'S'f^2} \left[\frac{2}{3} fgl^2 - (h^2M + h'^2M') \frac{g'}{10} \right], \\ \mu'' &= \frac{nn'\ell}{4\pi} \sum \sum \frac{K_{\omega\omega'}}{RSR'S'f^2} \left[\left(\frac{1}{m} - \frac{4f}{3} \right) \frac{g'}{10} \right. \\ &\quad \left. + \frac{fg''}{6} + \left(\frac{1}{m} - \frac{2f}{3} \right) gl^2 + fg''l^2 \right], \end{aligned} \right.$$

où l'on doit substituer la valeur (21) de l^2 . Ainsi ces expressions ne dépendent plus que de K^2 , K'^2 , ν , ν' , et non de G , G' .

X. — PREMIÈRE APPROXIMATION DE LA VALEUR DE $\frac{C}{c}$.

En supposant les espèces en nombre quelconque, désignons par η , η' , η'' , ... la force vive moyenne de rotation correspondant à chacune d'elles et par ζ , ζ' , ... la force vive moyenne de translation; par ρ le rapport de la force vive totale de rotation pour tout le système à celle de translation, quand les molécules sont des solides de révolution; par ρ' le même rapport quand cela n'a pas lieu.

En général, dans un gaz tout agent extérieur amenant un changement de force vive influence directement celle de translation, puis, quand l'état permanent s'est rétabli, celle-ci se transforme partiellement en force vive de rotation. Si les molécules sont des solides de révolution, cette transformation n'affecte que la portion de la force vive de rotation qui a été désignée au n° IX par K^2 , K'^2 ; aussi, quand nous parlons de la force vive totale ou moyenne de rotation, il ne doit s'agir que de celle-là.

La transformation s'opère de telle sorte que, $\frac{C}{c}$ étant le rapport des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant, $\frac{3}{2} \left(\frac{C}{c} - 1 \right)$ exprime le rapport de la force vive totale de translation du milieu à celles de translation et de rotation réunies; ce rapport est le même que $\frac{1}{1+\rho}$ ou $\frac{1}{1+\rho'}$, et en remplaçant $\frac{C}{c}$ dans le second cas par $\frac{C'}{c'}$,

il en résulte

$$(23) \quad \frac{C}{c} = 1 + \frac{2}{3(1+\rho)}, \quad \frac{C'}{c'} = 1 + \frac{2}{3(1+\rho')}.$$

Pour avoir une évaluation approximative de ces expressions dans le cas d'une espèce unique, nous supposons égales toutes les vitesses de translation et, à plus forte raison, les forces vives de rotation qui varient moins. Les formules (19) donnent $g = 4v$, $g' = 16v^3$; on a aussi $K^2 = K'^2 = \eta$; la formule (21) se réduit à $l^2 = \frac{1}{3}\theta\eta(h^2M + h'^2M')$, et, dans la valeur (22) de μ' ,

$$\frac{2}{3}fgl^2 - (h^2M + h'^2M')\frac{g'}{10} = (h^2M + h'^2M')\left(\frac{8}{9}f\theta\eta - \frac{8}{5}v^2\right).$$

Cette expression étant du second degré, on doit y remplacer f par la seule partie $\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}$ ou $\frac{2}{m}$; elle devient ainsi

$$\frac{16v^6}{9m}(h^2M + h'^2M')\left(\eta - \frac{9}{100}mv^2\right)$$

et μ' est le produit d'une constante par $\eta - \frac{9}{100}mv^2$ ou $\eta - \frac{9}{100}\zeta$; μ' est ici l'accroissement de force vive de translation pour tout le milieu, puisqu'on n'a plus à le partager en groupes de vitesses variables. Il doit être nul dans l'état permanent, de sorte qu'on a $\frac{\eta}{\zeta} = \frac{9}{100}$; c'est le rapport des forces vives totales, de sorte qu'en posant $\theta = \frac{3}{2}$ ou 1 on aura

$$(24) \quad \rho = \frac{3}{5}, \quad \rho' = \frac{9}{10}, \quad \frac{C}{c} = 1 + \frac{5}{12} = 1,417, \quad \frac{C'}{c'} = 1 + \frac{20}{57} = 1,351.$$

XI. — APPROXIMATION ULTÉRIEURE.

Il n'est point assez exact de supposer toutes les vitesses égales et, toutefois, en tenant compte de leur répartition, les nombres que nous venons de trouver, comme on le verra, changeront très peu.

D'après ce qui a été dit au n° VII, il y aurait une erreur moindre à considérer les forces vives de rotation comme égales pour une même espèce; toutefois, nous partirons d'un principe plus rationnel et nous admettrons que la fonction $F(K, G, v)$, définie au n° VII, et qui déjà ne contient plus G , soit simplement le produit $F(K)\varphi(v)$ d'une fonction de K seul par une de v seul. Cela revient à admettre, bien que les forces vives de translation et de rotation se transforment l'une dans l'autre, que la répartition de l'une d'elles dans l'état permanent est indépendante de celle de l'autre. Voici les raisons de ce fait :

1° Le changement des vitesses de translation provient de leur direction par rapport au plan du choc; celui de la force vive de rotation dépend surtout soit de la vitesse et du sens de la rotation antérieure, soit des lignes h, h' , c'est-à-dire d'éléments n'ayant aucune connexité avec les directions de v et v' ; aussi n'y a-t-il pas de raison pour que les écarts de la moyenne de la force vive de rotation correspondent à telle ou telle vitesse de translation.

2° Si l'on suppose connue, pour toutes les espèces, la loi de répartition des vitesses en supposant les molécules sphériques, cette loi, quand elles sont à peu près sphériques, ne pourrait changer que de quantités de l'ordre de l'écart de sphéricité. Ce changement est négligeable, puisqu'en supposant, comme nous l'avons fait au numéro précédent, toutes les vitesses égales, ce qui est bien plus éloigné de la réalité, le rapport φ ou φ' n'éprouve qu'un faible changement.

Désignons maintenant, pour la première espèce, par $n\varphi(x)dx$ le nombre de molécules dont la vitesse est comprise entre x et $x + dx$; ce nombre sera de même $n'\varphi'(x)dx$ pour la seconde espèce. On doit encore partager ces groupes en d'autres correspondant aux diverses valeurs de K et K' , après quoi on ajoutera les expressions (22) de μ' et μ'' pour tous les groupes. Mais, d'après ce qu'on vient de voir, les fonctions de K ou K' introduites par le second classement étant indépendantes de v et v' , les deux sommations peuvent s'effectuer successivement. Ainsi nous remplacerons d'abord nn' par $nn'\varphi(v)\varphi'(v')dv dv'$ et nous ajouterons tous les résultats. Cela revient simplement à remplacer, dans les formules (22), g, g', g'', g''' par G, G', G'', G''' , en po-

sant

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} G = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g \varphi(v) \varphi'(v') dv dv', \\ G' = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g' \varphi(v) \varphi'(v') dv dv', \\ G'' = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g'' \varphi(v) \varphi'(v') dv dv', \\ G''' = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g''' \varphi(v) \varphi'(v') dv dv'. \end{array} \right.$$

Ces lettres G, G' ne peuvent se confondre avec celles qui ont été employées au n° VI et ont maintenant disparu.

Quant à la sommation relative à K, K' , il faut remarquer que G, G', \dots étant maintenant des constantes, il n'y a à faire aucun partage de n, n' en groupes dans les termes indépendants de K^2, K'^2 , mais seulement dans ceux qui ont l^2 en facteur; quant à ceux-là, cette sommation consiste à les ajouter pour toutes les valeurs de K^2, K'^2 , forces vives de rotation, et, comme celles-ci n'y entrent qu'au premier degré, cela revient à les remplacer par leurs moyennes η, η' , ou simplement à substituer

$$(26) \quad l^2 = \frac{\theta}{3} (h^2 M \eta + h'^2 M' \eta').$$

On aura ainsi

$$(27) \quad \mu' = \frac{nn't}{4\pi} \sum \sum \frac{K\omega\omega'}{RSR'S'f^2} U, \quad \mu'' = \frac{nn't}{4\pi} \sum \sum \frac{K\omega\omega'}{RSR'S'f^2} U'$$

U, U' étant les expressions comprises dans les signes [] des formules (22); on doit y substituer

$$f = \frac{m+m'}{mm'} + (h^2 M + h'^2 M'),$$

en négligeant la seconde partie dans les termes déjà multipliés par l^2 .

On aura ainsi

$$(28) \quad \begin{cases} U = \frac{2(m+m')}{3mm'} G l^2 - \frac{G'}{10} (h^2 M + h'^2 M'), \\ U' = \frac{G'}{10m} + \frac{m+m'}{mm'} P + P(h^2 M + h'^2 M') + Q l^2, \end{cases}$$

en posant

$$(29) \quad P = \frac{G'}{6} - \frac{2G'}{15}, \quad Q = \frac{G}{m} + \frac{m+m'}{mm'} (G'' - \frac{2}{3} G).$$

D'après ce qui a été dit plus haut, la répartition des vitesses indiquée par φ et φ' est celle qui convient à des molécules sphériques, en admettant, cela va sans dire, que, pour chaque espèce, on leur attribue la même masse m, m', \dots et le même rayon moyen ou le même volume que pour les molécules non sphériques, et, en outre, que la force vive totale de translation pour le milieu ne soit pas non plus changée.

Soit, dans ce cas, μ'' l'accroissement total de force vive de la première espèce, dû uniquement aux chocs avec la seconde. Ce sera la valeur de μ'' pour le cas particulier où, les molécules étant sphériques, on a $h = h' = 0, l = 0$, et, en désignant par U'' ce que devient alors U' , la formule (27) donnera

$$(30) \quad \mu'' = U'' \frac{nn't}{4\pi} \sum \sum \frac{K_{\omega\omega'}}{RSR'S'f^2}, \quad \text{où} \quad U'' = P \frac{m+m'}{mm'} + \frac{G'}{10m}.$$

Dans le mode de répartition des vitesses qui convient à des molécules sphériques, il est admis qu'un choc entre deux molécules de première espèce ne change pas la somme de leurs forces vives; d'ailleurs, dans l'état permanent, l'accroissement total de la force vive de la première espèce est nul. Il en sera donc ainsi pour celui qui est dû aux chocs avec les autres espèces, quel que soit leur nombre; en supposant qu'elles se réduisent à la seconde, cet accroissement μ'' est donc nul, d'où $U'' = 0$.

En substituant dans U' la valeur de P , tirée de cette équation, on a

$$\frac{m+m'}{m'} U' = \frac{m+m'}{m'} Q l^2 - \frac{G'}{10} (h^2 M + h'^2 M').$$

En substituant la valeur (26) de l^2 dans U' , U , et celles-ci dans les expressions (27), elles se partageront en deux parties correspondant aux deux espèces, de sorte qu'on aura

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu' = \lambda \left(\frac{2\theta r_1}{9} \frac{m+m'}{mm'} G - \frac{G'}{10} \right) + \lambda' \left(\frac{2\theta r_1'}{9} \frac{m+m'}{mm'} G - \frac{G'}{10} \right), \\ \frac{m+m'}{m'} \mu'' = \lambda \left(\frac{\theta r_1}{3} \frac{m+m'}{m'} Q - \frac{G'}{10} \right) + \lambda' \left(\frac{\theta r_1'}{3} \frac{m+m'}{m'} Q - \frac{G'}{10} \right), \end{array} \right.$$

en posant

$$(32) \quad \lambda = \frac{nn't}{4\pi} \sum \sum \frac{K \omega \omega'}{RSR'S'f^2} h^2 M, \quad \lambda' = \frac{nn't}{4\pi} \sum \sum \frac{K \omega \omega'}{RSR'S'f^2} h^2 M',$$

de sorte que λ , λ' sont deux coefficients purement géométriques, dépendant à la fois de la forme des deux espèces.

XII. — VALEURS DE G , G' , G'' , G''' .

Dans le cas d'une espèce unique, on a déjà vu que $\varphi(x)$ a la forme (16); dans le cas où il y a plusieurs espèces, en remplaçant φ par φ'' , φ''' , ... pour la troisième, quatrième, etc., il serait extrêmement difficile, si ce n'est impossible, de déterminer ces fonctions par la méthode rigoureuse indiquée au n° VI; mais nous serons certains de nous éloigner fort peu de la répartition réelle en leur attribuant des formes analogues

$$(33) \quad \varphi'(x) = \alpha' x^2 e^{-\beta' x^2}, \quad \varphi''(x) = \alpha'' x^2 e^{-\beta'' x^2}, \quad \dots,$$

α' , β' , α'' , β'' , ... étant des constantes. En effet :

1° Il arrivera dans ce cas, comme dans celui d'une seule espèce, qu'un choc unique peut diminuer dans un rapport quelconque et même réduire à zéro l'une des deux vitesses, mais ne peut l'augmenter que dans un rapport limité, et, par conséquent, que les groupes deviendront de moins en moins nombreux quand la vitesse s'écarte d'une valeur moyenne, mais cela d'une manière beaucoup plus prononcée quand elle la dépasse que si elle lui est inférieure. Or c'est ce mode de variation que représente la formule (16), et elle se trouverait ainsi

convenable comme formule empirique lors même qu'on ne pourrait la démontrer rigoureusement.

2° Dans le cas où les masses diffèrent très peu entre elles, la forme supposée serait encore beaucoup plus approximative, étant rigoureusement certaine pour des masses égales.

Le premier de ces cas est évidemment celui du mélange de plusieurs gaz, et le second celui d'un gaz unique, dans lequel on suppose quelques variations accidentelles de forme et de masse des molécules.

De toute manière, l'hypothèse que nous faisons donnera des résultats beaucoup plus exacts que celle d'une valeur unique des vitesses.

Pour évaluer les portions de G, G', \dots dans lesquelles $v > v'$, nous aurons besoin de diverses valeurs de l'expression

$$(34) \quad H_{i,i'} = \int_0^\infty dv' \int_v^\infty e^{-\beta v'^2 - \beta' v'^2} v^i v'^{i'} dv.$$

Pour les trouver, on a

$$\int_0^\infty e^{-\beta' v'^2} dv' \int_v^\infty e^{-\beta v'^2} v dv = \frac{1}{2\beta} \int_0^\infty e^{-\beta v'^2 - \beta' v'^2} dv' = \frac{\sqrt{\pi}}{4\beta\sqrt{\beta + \beta'}},$$

ou en posant

$$(35) \quad c = \sqrt{\beta + \beta'}, \quad \frac{8}{\sqrt{\pi}} = \varepsilon,$$

$$\varepsilon \int_0^\infty dv' \int_v^\infty e^{-\beta v'^2 - \beta' v'^2} v dv = \frac{2}{\beta c}.$$

En différentiant trois fois de suite cette relation par rapport à β' , puis les deux premières équations ainsi obtenues par rapport à β , et remarquant qu'on a

$$\frac{dc}{d\beta} = \frac{dc}{d\beta'} = \frac{1}{2c},$$

on trouvera, les limites des intégrales restant les mêmes,

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon H_{1,2} = \frac{2}{\beta c^3}, & \varepsilon H_{1,1} = \frac{3}{2\beta c^3}, \\ \varepsilon H_{1,0} = \frac{15}{4\beta c^7}, & \varepsilon H_{3,2} = \frac{1}{\beta^2 c^3} + \frac{3}{2\beta c^3}, \\ \varepsilon H_{3,1} = \frac{3}{2\beta^2 c^3} + \frac{15}{4\beta c^7}, & \varepsilon H_{3,0} = \frac{2}{\beta^2 c^3} + \frac{3}{\beta^2 c^3} + \frac{15}{4\beta c^7}. \end{array} \right.$$

En substituant les valeurs (16) et (33) de φ , φ' dans les formules (25), on aura

$$G = \alpha x' \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\beta v^2 - \beta' v'^2} g v^2 v'^2 dv dv', \quad \dots,$$

Nous poserons

$$(37) \quad \begin{cases} \frac{G}{\alpha x'} = A + B, & \frac{G'}{\alpha x'} = A' + B', \\ \frac{G''}{\alpha x'} = A'' + B'', & \frac{G'''}{\alpha x'} = A''' + B''', \end{cases}$$

A, A', ... correspondant aux portions $v > v'$, et B, B', ... à celles où $v < v'$, de sorte que

$$A = \int_0^{\infty} dv' \int_{v'}^{\infty} e^{-\beta v^2 - \beta' v'^2} g v^2 v'^2 dv, \quad \dots$$

Les formules (19) donnent pour $v > v'$, en employant les signes supérieurs,

$$\begin{aligned} g &= \frac{3v^2 + v'^2}{v}, & g' &= \frac{5v^4 + 10v^2v'^2 + v'^4}{v}, \\ g'' &= \frac{v^4 + 6v^2v'^2 + v'^4}{v}, & g''' &= \frac{v^2 + v'^2}{v}. \end{aligned}$$

d'où résultent

$$\begin{aligned} \varepsilon A &= 3H_{3,2} + H_{1,1}, & \varepsilon A' &= 5H_{5,2} + 10H_{3,4} + H_{1,6}, \\ \varepsilon A'' &= H_{5,2} + 6H_{3,4} + H_{1,6}, & \varepsilon A''' &= H_{3,2} + H_{1,1}, \end{aligned}$$

ou, d'après les formules (36),

$$\begin{aligned} \varepsilon A &= \frac{3}{\beta^2 c^3} + \frac{6}{\beta c^3}, & \varepsilon A' &= \frac{10}{\beta^3 c^3} + \frac{30}{\beta^2 c^5} + \frac{60}{\beta c^7}, \\ \varepsilon A'' &= \frac{2}{\beta^3 c^3} + \frac{12}{\beta^2 c^5} + \frac{30}{\beta c^7}, & \varepsilon A''' &= \frac{1}{\beta^2 c^3} + \frac{3}{\beta c^5}. \end{aligned}$$

Lorsque $v < v'$, les formules (19) donnent

$$g'' = 4v'(v^2 + v'^2), \quad g''' = 2v'.$$

Mais il sera préférable, pour conserver les mêmes limites aux intégrales, d'échanger les lettres ν et ν' de sorte qu'on ait $\nu > \nu'$: comme ν correspond alors à la seconde espèce, il faudra remplacer $-\beta\nu^2 - \beta'\nu'^2$ par $-\beta'\nu^2 - \beta\nu'^2$, ou simplement employer des expressions $H'_{i,i}$ au lieu de $H_{i,i}$; les premières se déduisent des autres en échangeant β et β' . On aura ainsi

$$\begin{aligned} \frac{g''}{2} &= 2\nu^3 + 2\nu\nu'^2, & g''' &= 2\nu, \\ \frac{B''}{2} &= 2H'_{3,2} + 2H'_{3,1}, & B''' &= 2H'_{3,2}, \end{aligned}$$

ou, d'après les formules (36),

$$\frac{\varepsilon B''}{2} = \frac{4}{\beta'^3 c^3} + \frac{9}{\beta'^2 c^3} + \frac{15}{\beta' c^2}, \quad \varepsilon B''' = \frac{2}{\beta'^2 c^3} + \frac{3}{\beta' c^2}.$$

En remarquant que $\beta + \beta' = c^2$, il en résulte

$$\begin{aligned} \varepsilon(A'' + B''') &= \frac{2\beta^2 + \beta'^2}{\beta^2 \beta'^2 c^3} + \frac{3(\beta + \beta')}{\beta \beta' c^2} \\ &= \frac{2\beta^2 + \beta'^2 + 3\beta\beta'}{\beta^2 \beta'^2 c^3} = \frac{(\beta + \beta')(2\beta + \beta')}{\beta^2 \beta'^2 c^3} = \frac{2\beta + \beta'}{\beta^2 \beta'^2 c}; \\ \frac{1}{2} \varepsilon(A'' + B''') &= \frac{\beta'^3 + 4\beta^3}{\beta^3 \beta'^3 c^3} + \frac{6\beta'^2 + 9\beta^2}{\beta^2 \beta'^2 c^3} + \frac{15(\beta + \beta')}{\beta \beta' c^2}; \end{aligned}$$

les deux derniers termes se réduisent à

$$\frac{3(2\beta'^2 + 3\beta^2 + 5\beta\beta')}{\beta^2 \beta'^2 c^3} = \frac{3(\beta + \beta')(3\beta + 2\beta')}{\beta^2 \beta'^2 c^3},$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varepsilon(A'' + B''') &= \frac{4\beta^3 + \beta'^3 + 3\beta\beta'(3\beta + 2\beta')}{\beta^3 \beta'^3 c^3} \\ &= \frac{(\beta + \beta')^2(4\beta + \beta')}{\beta^3 \beta'^3 c^3} = \frac{(4\beta + \beta')c}{\beta^3 \beta'^3}. \end{aligned}$$

On suivra la même marche pour B, B' ; les valeurs (19) de g, g' , en prenant les signes inférieurs, puis échangeant ν et ν' , deviennent celles qui correspondraient aux signes supérieurs; ainsi B et B' se déduisent

de A, A' en échangeant β et β' . On a donc

$$\begin{aligned} \varepsilon(A + B) &= 3 \left(\frac{1}{\beta^2 c^3} + \frac{1}{\beta'^2 c^3} \right) + \frac{6(\beta + \beta')}{\beta\beta' c^3} = 3 \frac{\beta'^2 + \beta^2 + 2\beta\beta'}{\beta^2\beta'^2 c^3} = \frac{3c}{\beta^2\beta'^2}, \\ \frac{1}{10} \varepsilon(A' + B') &= \frac{\beta^2 + \beta'^2}{\beta^2\beta'^2 c^3} + \frac{3(\beta^2 + \beta'^2)}{\beta^2\beta'^2 c^3} + \frac{6(\beta + \beta')}{\beta\beta' c^3} \\ &= \frac{\beta^2 - \beta\beta' + \beta'^2}{\beta^2\beta'^2 c} + \frac{3(\beta^2 + \beta'^2 + 2\beta\beta')}{\beta^2\beta'^2 c^3} \\ &= \frac{\beta^2 - \beta\beta' + \beta'^2 + 3\beta\beta'}{\beta^2\beta'^2 c} = \frac{c^3}{\beta^2\beta'^2}. \end{aligned}$$

Les valeurs (37) deviennent ainsi

$$(38) \quad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{\alpha\alpha'} G = \frac{3c}{\beta^2\beta'^2}, & \frac{\varepsilon}{\alpha\alpha'} G' = \frac{10c^3}{\beta^2\beta'^2}, \\ \frac{\varepsilon}{\alpha\alpha'} G'' = \frac{2c(4\beta + \beta')}{\beta^2\beta'^2}, & \frac{\varepsilon}{\alpha\alpha'} G''' = \frac{2\beta + \beta'}{\beta^2\beta'^2 c}. \end{cases}$$

XIII. — RAPPORT DES FORCES VIVES TOTALES, LE NOMBRE D'ESPÈCES ÉTANT QUELCONQUE.

En substituant les valeurs de G' , G'' dans les formules (29) et (30), on a

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\alpha\alpha'} P &= \frac{c(4\beta + \beta')}{3\beta^2\beta'^2} - \frac{4c^3}{3\beta^2\beta'^2} = \frac{c(4\beta + \beta' - 4c^2)}{3\beta^2\beta'^2} = -\frac{\beta'c}{\beta^2\beta'^2}, \\ \frac{\varepsilon}{\alpha\alpha'} U'' &= -\left(\frac{m+m'}{mm'}\right) \frac{\beta'c}{\beta^2\beta'^2} + \frac{c^3}{m\beta^2\beta'^2} \\ &= \frac{c[m'(\beta + \beta') - (m+m')\beta']}{mm'\beta^2\beta'^2} = \frac{c}{\beta^2\beta'^2} \left(\frac{\beta}{m} - \frac{\beta'}{m'} \right). \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\mu''' = D \left(\frac{\beta}{m} - \frac{\beta'}{m'} \right),$$

D étant un coefficient positif; μ''' est l'accroissement de force vive de la première espèce due aux seuls chocs avec la seconde. Les accroissements analogues, dus aux chocs avec la troisième, quatrième, etc. sont de même

$$D' \left(\frac{\beta}{m} - \frac{\beta''}{m''} \right), \quad D'' \left(\frac{\beta}{m} - \frac{\beta'''}{m'''} \right), \quad \dots$$

D', D'', \dots , étant positifs. Nous avons vu, au n° XI, que la somme de ces accroissements devait être nulle dans l'état permanent; il faut pour cela que les rapports $\frac{\beta}{m}, \frac{\beta'}{m'}, \dots$ soient tous égaux.

En effet, si cela n'avait pas lieu, $\frac{\beta}{m}$ ne pourrait être le plus grand d'entre eux, ou un des plus grands s'il y en a plusieurs de la valeur maxima, puisque, dans la somme précédente, qui doit être nulle, tous les termes seraient positifs sans être tous nuls. Mais l'accroissement de force vive de chaque espèce doit être séparément nul, et il en résulte pour chacune une condition semblable; il faudrait donc que $\frac{\beta'}{m'}$ ne fût pas le plus grand des rapports $\frac{\beta}{m}, \dots$, que $\frac{\beta''}{m''}$ ne le fût pas non plus, et ainsi de suite jusqu'au dernier, ce qui est absurde.

Dans la formule (17), mu^2 est la force vive moyenne de translation des molécules de première espèce, maintenant désignée par ζ ; on a donc

$$\frac{m}{\beta} = \frac{2}{3} \zeta,$$

et de même

$$\frac{m'}{\beta'} = \frac{2}{3} \zeta', \quad \dots;$$

par conséquent,

$$(39) \quad \zeta = \zeta' = \zeta'' = \dots, \quad \frac{m}{\beta} = \frac{m'}{\beta'} = \frac{m''}{\beta''} = \dots = \frac{2}{3} \zeta,$$

et la force vive de translation moyenne des molécules est la même pour toutes les espèces.

Les formules (29) et (38) donnent

$$\frac{\varepsilon}{2\alpha'} \left(G'' - \frac{2}{3} G \right) = \frac{2\beta + \beta'}{\beta^2 \beta'^2 c} - \frac{2c}{\beta^2 \beta'^2} = - \frac{\beta'}{\beta^2 \beta'^2 c}.$$

D'après les relations (39),

$$\frac{m + m'}{m'} = \frac{c^2}{\beta'},$$

d'où

$$\frac{\varepsilon}{\alpha\alpha'} Q = \frac{3c}{m\beta^2\beta'^2} - \frac{e^2}{m\beta'} \frac{\beta'}{\beta^2\beta'^2c} = \frac{2c}{m\beta^2\beta'^2} \quad \text{ou} \quad Q = \frac{2}{3} \frac{G}{m'}.$$

Il en résulte que les seconds membres des formules (31) sont les mêmes s'ils correspondent aux mêmes espèces. Il devait en être ainsi, car, en désignant par μ' le second membre de la valeur de $\frac{m+m'}{m'} \mu''$ qui reste la même en échangeant la première et la seconde espèce, on a

$$\mu'' = \frac{m'}{m+m'} \mu';$$

d'ailleurs, l'accroissement de la force vive de la seconde espèce dû aux chocs avec la première serait pareillement $\frac{m}{m+m'} \mu'$; leur somme μ' doit donc bien exprimer ces deux accroissements réunis.

Les formules (39) donnent

$$\frac{mm'}{m+m'} = \frac{m\beta'}{c^2} = \frac{2}{3} \frac{\beta\beta'}{c^2} \zeta,$$

d'où

$$\frac{mm'}{m+m'} \frac{\varepsilon}{\alpha\alpha'} \frac{G'}{10} = \frac{2\zeta}{3} \frac{c}{\beta^2\beta'^2},$$

$$\frac{\varepsilon}{\alpha\alpha'} \left(\frac{\theta\eta}{3} \frac{m+m'}{m'} Q - \frac{G'}{10} \right) = \frac{m+m'}{mm'} \left(\frac{\theta\eta}{3} \frac{2c}{\beta^2\beta'^2} - \frac{2\zeta}{3} \frac{c}{\beta^2\beta'^2} \right).$$

Il en résulte

$$\mu'' = \frac{b}{m} [\lambda(\theta\eta - \zeta) + \lambda'(\theta\eta' - \zeta)],$$

où

$$b = \frac{\alpha\alpha'}{\varepsilon} \frac{2c}{3\beta^2\beta'^2}.$$

Si nous supposons que μ' corresponde aux chocs mutuels de la première espèce, on aura

$$\lambda = \lambda', \quad \mu' = a(\theta\eta - \zeta),$$

a étant un coefficient positif.

Posons, pour abrégier, $\theta\eta - \zeta = y$, $\theta\eta' - \zeta = y'$, $\theta\eta'' - \zeta = y''$, ..., et supposons d'abord qu'il n'y ait que deux espèces; l'accroissement de la force vive de première espèce, dû à ses chocs, soit avec elle-même, soit avec la seconde, doit être nul, d'où résulte

$$0 - \mu' + \mu'' = ay + \frac{b}{m} (\lambda y + \lambda' y').$$

D'autre part, l'accroissement de force vive de la seconde espèce dû à ses chocs avec la première est, comme on l'a vu,

$$\frac{m}{m'} \mu'' \quad \text{ou} \quad \frac{b}{m'} (\lambda y + \lambda' y').$$

Pour ses chocs avec elle-même l'accroissement a la forme $a' y'$ analogue à ay , et les deux réunis doivent être nuls. Ainsi a , a' , b sont trois nombres positifs tels qu'on a à la fois

$$\left(a + \frac{b\lambda}{m}\right)y + \frac{b\lambda'}{m}y' = 0, \quad \left(a' + \frac{b\lambda'}{m'}\right)y' + \frac{b\lambda}{m'}y = 0;$$

le déterminant des coefficients est

$$\left(a + \frac{b\lambda}{m}\right)\left(a' + \frac{b\lambda'}{m'}\right) - \frac{b^2\lambda\lambda'}{mm'} = aa' + b\left(\frac{a'\lambda}{m} + \frac{a\lambda'}{m'}\right)$$

et a tous ses termes positifs; les deux équations n'ont donc pas d'autre solution que $y = y' = 0$.

S'il y a un nombre quelconque d'espèces, on aura encore

$$\mu' + \mu'' + \dots = 0,$$

en ajoutant à μ'' les accroissements de la force vive de première espèce provenant de ses chocs avec la troisième, la quatrième, etc. Ce sera une équation de la forme

$$Ey + E'y' + E''y'' + \dots = 0,$$

sans terme indépendant de y, y', \dots . Pour chaque espèce il y aura une condition de cette forme. Dans ce système d'équations, en même nombre que les inconnues, le déterminant de leurs coefficients n'est point nul, en général, puisque, s'il n'y a que deux espèces, comme on vient de le voir, il ne l'est pas. Il n'y aura donc d'autre solution que

$$y = y' = y'' = \dots = 0$$

et, par suite,

$$\eta = \eta' = \eta'' = \dots$$

Ainsi la force vive moyenne de rotation est la même pour toutes les espèces, en supposant toutefois que θ soit le même. Le rapport de la force vive totale de rotation à celle de translation sera $\frac{\eta}{\xi}$ ou $\frac{1}{6}$; d'après le n° X, dans le cas d'une espèce unique, en prenant comme première approximation toutes les vitesses égales, on avait $\frac{\eta}{\xi} = \frac{9}{100}$; le résultat actuel est donc peu différent. Le rapport ρ ou ρ' est le même que $\frac{\eta}{\xi}$, de sorte qu'en posant $\theta = \frac{3}{2}$ ou 1, on aura

$$\rho = \frac{2}{3}, \quad \frac{C}{c} = 1 + \frac{2}{3} = 1,400; \quad \rho' = 1, \quad \frac{C'}{c'} = 1 + \frac{1}{3} = 1,333.$$

Sans entrer dans le détail des valeurs expérimentales attribuées au rapport $\frac{C}{c}$, on sait qu'elles diffèrent très peu de 1,400 pour les gaz simples, entre autres l'hydrogène, tandis que, pour l'acide carbonique et d'autres gaz composés, elles diffèrent peu de 1,33. Les molécules gazeuses joueraient ainsi le rôle de solides peu différents d'une sphère, qui, pour les gaz simples, seraient de révolution, et non pour les autres.

Ce fait est lié à celui que les molécules d'hydrogène sont formées de deux atomes, ce qui doit, en effet, leur donner une forme de révolution, tandis que, dans les gaz composés, elles en ont plus de deux.

Quant à ce que j'ai appelé les chocs entre ces molécules, ce mot semble participer de l'incertitude où nous sommes sur leur nature.

On peut toutefois lui donner le sens précis suivant : deux molécules

sont en contact si la distance des centres est telle qu'il s'exerce entre eux l'énergique résistance à la compression qu'on observe dans les corps solides. De la sorte, les effets mécaniques qui résultent du contact des solides existent aussi pour les molécules.

On a vu que, si le milieu est composé de plusieurs espèces, c'est-à-dire est un mélange de plusieurs gaz, la valeur de $\frac{C}{\rho}$ est la même que pour ces gaz isolés. Ce résultat se réalise pour l'air, dans lequel $\frac{C}{\rho}$ est également d'environ 1,400.