JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PEPIN

Sur quelques formules d'Analyse utiles dans la théorie des nombres

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 4 (1888), p. 83-127.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1888_4_4__83_0>

Sur quelques formules d'Analyse utiles dans la Théorie des nombres;

PAR LE P. PEPIN, S. J.

---

1. Je me propose de démontrer l'ensemble des formules générales de Liouville, qui reposent sur la partition numérique exprimée par les équations suivantes

$$n = p + q, \qquad p = a\alpha, \qquad q = b\beta, \qquad n = d\delta,$$

dans lesquelles tous les nombres considérés sont entiers et positifs, pairs ou impairs. Dans la session du 19 avril 1885 de l'Académie pontificale des *Nuovi Lincei,* je me suis occupé de quelques-unes de ces formules et j'ai montré comment elles découlaient de la démonstration, donnée par Dirichlet, du théorème de Jacobi, relatif à la décomposition du quadruple d'un nombre impair en une somme de quatre carrés impairs. Je renverrai à ce Mémoire le lecteur désireux d'approfondir le sujet qui nous occupe; il y trouvera en même temps de nombreuses applications à la théorie des formes quadratiques quaternaires.

Dans le présent Mémoire, je considérerai successivement les formules qui ne concernent qu'un seul mode de partition, puis celles où l'on compare deux modes différents de partition. Dans un travail subséquent je donnerai de nouvelles applications des formules démontrées.

I. — Formules générales relatives aux équations

$$(1)\qquad n = p + q, \qquad p = a\alpha, \qquad q = b\beta.$$

2. Soit $\varphi(x, y)$ une fonction paire de x et de y, alternée par rapport à ces deux variables, ou du moins une fonction qui, pour toutes les valeurs de x et de y employées dans nos formules, vérifie les conditions

$$(\mathrm{K})\qquad \varphi(x, y) = \varphi(-x, y) = \varphi(x, -y), \qquad \varphi(x, y) = -\varphi(y, x).$$

Au moyen de cette fonction nous formons la somme triple

$$\mathrm{S} = \Sigma[\Sigma\Sigma\varphi(a - b, \alpha + \beta)],$$

dont les termes correspondent à tous les systèmes de solutions des équations (1) en nombres entiers et positifs, soumis ou non à quelques restrictions dont nous parlerons plus loin. On forme cette somme en considérant successivement toutes les partitions du nombre donné n en deux parties entières et positives p, q. Pour chaque partition, on décompose les deux nombres p, q de toutes les manières possibles en deux facteurs $p = a\alpha$, $q = b\beta$; on combine chaque couple a, α avec chaque couple b, β et à chacun des systèmes a, α, b, β ainsi obtenus on fait correspondre un terme $\varphi(a - b, \alpha + \beta)$; la somme de tous ces termes, pour une même solution de l'équation $n = p + q$, forme la somme partielle, indiquée par les deux Σ renfermés entre crochets. L'autre Σ indique la somme de toutes ces sommes partielles, relatives aux diverses solutions de l'équation $n = p + q$.

Pour la démonstration que nous avons à faire, il est plus commode de remplacer le système des équations (1) par l'équation unique

$$(2)\qquad n = a\alpha + b\beta,$$

et de remplacer la triple somme par une somme unique, dont les éléments correspondent aux diverses solutions de l'équation (2).

Nous partagerons la somme S en deux parties, l'une, S_0, relative à l'hypothèse $a = b$, et l'autre, S_1, dont les éléments correspondent aux solutions dans lesquelles a et b sont inégaux. Les termes de cette dernière somme peuvent se grouper deux à deux au moyen des formules

$$(\mathrm{A}) \qquad a_1 = b, \qquad b_1 = a, \qquad \alpha_1 = \beta, \qquad \beta_1 = \alpha.$$

Les deux termes de chaque groupe sont égaux; car, en vertu des formules (A) et (K), on a

$$a_1 - b_1 = -(a - b), \qquad \alpha_1 + \beta_1 = \alpha + \beta,$$
$$\varphi(a_1 - b_1, \alpha_1 + \beta_1) = \varphi(-a + b, \alpha + \beta) = \varphi(a - b, \alpha + \beta).$$

Nous pouvons donc remplacer leur somme par le double de celui des deux termes qui correspond à une valeur positive de la différence $(a - b)$. La somme S est alors exprimée par la formule

$$S = S_0 + 2\Sigma_1 \varphi(a - b, \alpha + \beta),$$

dans laquelle Σ_1 désigne une somme dont les termes correspondent aux divers systèmes de valeurs entières et positives de a, b, α, β propres à vérifier les conditions

$$(3) \qquad n = a\alpha + b\beta, \qquad a > b.$$

3. Nous nous occuperons d'abord de la somme Σ_1 dont nous grouperons les termes deux à deux, en faisant correspondre à chaque solutions a, b, α, β, vérifiant la condition $a > b$, une autre solution a_1, b_1, α_1, β_1, au moyen des deux formules

$$(\mathrm{B}) \qquad a_1 - b_1 = \alpha + \beta, \qquad \alpha_1 + \beta_1 = a - b,$$

autant du moins que cette correspondance sera compatible avec les conditions imposées aux nombres qui figurent dans l'équation (2).

Pour cela, nous écrirons de la manière suivante les deux solutions que nous voulons associer :

$$(4)\qquad n=(a-b)\alpha+(\alpha+\beta)b,\qquad n=(a_1-b_1)\alpha_1+(\alpha_1+\beta_1)b_1.$$

En faisant la substitution (B) dans la dernière formule, on trouve

$$(4')\qquad n=(a-b)b_1+(\alpha+\beta)\alpha_1.$$

La comparaison des deux formules (4) et (4') montre que la dernière se trouve vérifiée lorsqu'on joint aux relations (B) les formules suivantes

$$(\mathrm{C})\qquad b_1=\alpha+\theta(\alpha+\beta),\qquad \alpha_1=b-\theta(a-b),$$

dans lesquelles θ désigne un nombre entier quelconque. On a donc

I.

$$\alpha_1=b-\theta(\alpha-b),\qquad \beta_1=(\theta+1)(a-b)-b,$$
$$a_1=\alpha+(\theta+1)(\alpha+\beta),\qquad b_1=\alpha+\theta(\alpha+\beta).$$

Les deux conditions $\alpha_1>0$, $\beta_1>0$ déterminent le nombre θ au moyen des deux inégalités

$$(5)\qquad \theta<\frac{b}{a-b}<\theta+1,$$

pourvu toutefois que le quotient $b:(a-b)$ ne soit pas un nombre entier; car alors l'une des deux inégalités se changerait en égalité et l'un des deux nombres α_1, β_1 serait nul, contrairement à l'hypothèse. Tant que le quotient $b:(a-b)$ est fractionnaire, on vérifie les deux inégalités (5) en prenant pour valeur de θ la partie entière de ce quotient. La différence $a-b$ étant positive, le nombre θ est nul ou positif, de sorte que les formules I déterminent des valeurs positives pour les quatre nombres a_1, b_1, α_1, β_1, et les deux solutions associées vérifient en même temps la condition $a-b>0$, $a_1-b_1>0$.

4. Puisque le nombre θ a une valeur unique, déterminée par les inégalités (5), les formules I ne font correspondre qu'une seule solu-

tion a_1, b_1, α_1, β_1 à chacune des solutions a, b, α, β, dans lesquelles le quotient $b:(a-b)$ est fractionnaire et positif. De plus, la même solution a_1, b_1, α_1, β_1 ne peut pas correspondre à deux systèmes différents de valeurs des nombres a, b, α, β; car, si l'on avait, conjointement avec les formules I, les formules suivantes

$$\alpha_1 = b' - \theta'(a'-b'), \qquad \beta_1 = (\theta'+1)(a'-b') - b',$$
$$a_1 = \alpha' + (\theta'+1)(\alpha+\beta), \qquad b_1 = \alpha' + \theta'(\alpha'+\beta'),$$

on en déduirait respectivement

$$\alpha = b_1 - \theta\,(a_1 - b_1), \qquad \beta = (\theta+1)(a_1-b_1) - b_1,$$
$$b = \alpha_1 + \theta\,(\alpha_1+\beta_1), \qquad a = \alpha_1 + (\theta+1)(\alpha_1+\beta_1),$$
$$\alpha' = b_1 - \theta'(a_1-b_1), \qquad \beta' = (\theta'+1)(a'_1 - b_1) - b_1,$$
$$b' = \alpha_1 + \theta'(\alpha'_1 + \beta_1), \qquad a' = \alpha_1 + (\theta'+1)(\alpha_1+\beta_1).$$

Les deux conditions $\alpha > 0$, $\beta > 0$ déterminent θ par les deux inégalités

$$\theta < \frac{b_1}{a_1 - b_1} < \theta + 1;$$

de même, les conditions $\alpha' > 0$, $\beta' > 0$ exigent que l'on ait

$$\theta' < \frac{b_1}{a_1 - b_1} < \theta' + 1.$$

On a donc nécessairement $\theta' = \theta$ et par conséquent $a' = a$, $b' = b$, $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$. Il reste à examiner si les solutions ainsi groupées satisfont à toutes les conditions imposées. Cela est évident d'abord lorsque les nombres a, b, α, β ne sont soumis qu'à la seule condition d'être entiers et positifs, car la différence $a - b$ étant positive et le nombre θ étant positif ou nul, les nombres a_1, b_1, α_1, β_1 déterminés par les formules I sont nécessairement positifs et satisfont à la condition $a_1 - b_1 > 0$. Cela est vrai encore lorsque les quatre nombres a, b, α, β sont tous impairs, car alors les nombres a_1, b_1, α_1, β_1 sont aussi impairs. Dans ces deux cas toutes les solutions de l'équation (3) dans lesquelles le quotient $b:(a-b)$ n'est pas un nombre entier sont groupées deux à deux par les formules I, de telle sorte que la même solution ne figure jamais dans deux groupes différents. Mais cela n'aurait plus lieu si les deux nombres a, b devaient être tous deux impairs, tandis que l'un des deux nombres α, β serait pair; dans ce cas la simplification de la somme triple S ne peut plus s'effectuer au moyen des formules I.

Or les deux termes de la somme Σ_1 qui correspondent aux deux solutions d'un même groupe forment une somme nulle; car, en vertu des formules I, on a

$$\alpha_1 + \beta_1 = a - b, \qquad a_1 - b_1 = \alpha + \beta,$$
$$\varphi(a_1 - b_1, \alpha_1 + \beta_1) = \varphi(\alpha + \beta, a - b) = -\varphi(a - b, \alpha + \beta).$$

Par conséquent, les seuls termes qui restent dans la somme Σ_1 sont ceux qui correspondent aux solutions de l'équation (3) dans lesquelles le quotient $b:(a-b)$ est un nombre entier. L'évaluation de Σ_1 dépend donc des conditions auxquelles sont assujettis les nombres a, b, α, β.

1° $\qquad n = 2^\lambda m \qquad (a,\ b,\ \alpha,\ \beta$ impairs).

5. Supposons d'abord n pair et posons $n = 2^\lambda m$, en désignant par m un nombre impair. Les deux nombres a et b étant impairs, le quotient $b:(a-b)$ ne peut pas se réduire à un nombre entier; par conséquent la somme Σ_1 s'évanouit. On a dans ce cas

$$S = S_0 = \Sigma\varphi(0, \alpha + \beta),$$

la somme désignée par Σ s'étendant à toutes les solutions de l'équation (2) dans lesquelles a et b sont égaux. Or la valeur commune des deux nombres impairs a et b doit nécessairement diviser le nombre m; c'est pourquoi nous posons

$$a = b = d, \qquad m = d\delta$$

et l'équation (2) se trouve remplacée par la suivante

$$(2') \qquad 2^\lambda \delta = \alpha + \beta,$$

dans laquelle on doit égaler δ successivement à tous les diviseurs du nombre m. La somme des termes qui correspondent à une même valeur de δ est égale à $\varphi(0, 2^\lambda\delta)$ multiplié par le nombre des solutions de l'équation ($2'$), relativement à cette valeur de δ. Lorsque les nombres α, β doivent être impairs, le nombre de ces solutions est égal à $2^{\lambda-1}\delta$; car on peut égaler α à tous les nombres impairs

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad \ldots, \quad 2^\lambda\delta - 1,$$

dont le nombre est $2^{\lambda-1}\delta$, et, pour chacune de ces valeurs, on obtient β par la formule

$$\beta = 2^\lambda\delta - \alpha.$$

Dans ce cas, on a

$$S = S_0 = 2^{\lambda-1}\Sigma\delta\varphi(0, 2^\lambda\delta),$$

la somme indiquée par Σ s'étendant à toutes les solutions de l'équation $m = d\delta$. En remplaçant S par la triple somme représentée par cette lettre, on obtient la formule suivante

$$(6) \qquad \Sigma[\Sigma\Sigma\varphi(a-b, \alpha+\beta)] = 2^{\lambda-1}\Sigma\delta\varphi(0, 2^\lambda\delta),$$

dans laquelle les trois sommations du premier membre se rapportent aux diverses solutions des trois équations

$$2^\lambda m = m' + m'', \qquad m' = a\alpha, \qquad m'' = b\beta$$

en nombres entiers, positifs et impairs, m', m'', a, b, α, β, tandis que la somme indiquée dans le second membre correspond aux diverses décompositions du nombre m en deux facteurs, $d\delta = m$.

2° $\quad n, \quad a, \quad b, \quad \alpha, \quad \beta$ entiers et positifs quelconques.

6. Lorsque les nombres a, b, α, β peuvent être pairs ou impairs, le quotient $b:(a-b)$ peut être un nombre entier. Soit k la valeur de ce quotient. Les solutions de l'équation (3) auxquelles correspondent les termes qui restent dans Σ_1 sont déterminées par les formules suivantes :

$$n = a\alpha + b\beta, \qquad b = k(a-b), \qquad a > b.$$

Nous ferons $a - b = \delta$ et par conséquent

$$b = k\delta, \qquad a = (k+1)\delta, \qquad n = \delta[k(\alpha+\beta)+\alpha].$$

Le nombre δ étant diviseur de n, posons

$$n = d\delta.$$

Les nombres α, β seront déterminés par la formule

$$(7) \qquad d = k(\alpha+\beta)+\alpha.$$

Comme les nombres k, α, β sont entiers et positifs, la somme $\alpha+\beta$ est au moins égale à 2, et d au moins égal à 3. Ainsi, pour évaluer Σ_1, on prendra successivement pour d tous les diviseurs de n supérieurs à 2; pour chaque valeur de d, on égalera $\alpha+\beta$ à chacun des nombres

$$2, \quad 3, \quad \ldots, \quad d-1,$$

en exceptant celles de ces valeurs qui diviseraient exactement d et auxquelles correspondrait une valeur nulle de α; on divisera d par chacune de ces valeurs et l'on prendra le reste de cette division comme valeur de α. La somme des termes de Σ_1 qui correspondent à un même couple de valeurs de d et de δ vérifiant les conditions $d\delta = n$ et $d > 2$ est

$$\varphi(\delta, 2)+\varphi(\delta, 3)+\varphi(\delta, 4)+\ldots+\varphi(\delta, d-1),$$

avec cette condition de réduire à zéro le terme $\varphi(\delta, \mu)$ lorsque μ est diviseur de d. On a donc

$$\Sigma_1 = \Sigma'[\varphi(\delta, 2)+\varphi(\delta, 3)+\varphi(\delta, 4)+\ldots+\varphi(\delta, d-1)]$$

en désignant par Σ' une somme qui s'étend à toutes les décompositions du nombre n en deux facteurs d, δ, mais avec cette restriction de faire évanouir le terme $\varphi(\delta, \mu)$ lorsque μ est diviseur de d. Les décompositions $d = 1$, $\delta = n$; $d = 2$, $\delta = \frac{n}{2}$ se trouvent exclues, parce que dans la somme partielle, comprise entre parenthèses, le dernier terme

$\varphi(\delta, d-1)$ ne peut jamais présenter une valeur de $d-1$ inférieure à 2, la seconde variable devant croître depuis le premier terme $\varphi(\delta, 2)$ jusqu'au dernier.

7. Il nous reste à évaluer dans la même hypothèse la somme S_0 des termes qui correspondent aux solutions de l'équation (2) dans lesquelles les deux nombres a et b sont égaux. La valeur commune de ces deux nombres étant un diviseur de n, nous posons

$$a = b = \delta, \qquad n = d\delta,$$

et l'équation (2) se réduit à

$$d = \alpha + \beta. \tag{2'}$$

Les termes correspondants de la somme S sont tous égaux à $\varphi(0, d)$, et leur somme est égale au produit de $\varphi(0, d)$ multiplié par le nombre des solutions de l'équation (2'). Ce nombre est égal à $d-1$, car on peut prendre pour α les valeurs

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad d-1,$$

et, pour chacune de ces valeurs, on a

$$\beta = d - \alpha.$$

La somme S_0 est donc égale à la somme de tous les produits

$$(d-1)\varphi(0, d)$$

qui correspondent à tous les diviseurs de n désignés indéfiniment par d. En joignant ce résultat à celui du numéro précédent, on obtient la formule

$$(g)\quad \left\{\begin{aligned} S = \Sigma[\Sigma\Sigma\varphi(a-b, \alpha+\beta)] &= \Sigma(d-1)\varphi(0, d) \\ &+ 2\Sigma'[\varphi(\delta, 2) + \varphi(\delta, 3) + \varphi(\delta, 4) + \ldots + \varphi(\delta, d-1)]. \end{aligned}\right.$$

8. On vérifie les conditions K (n° **2**) imposées à la fonction

$\varphi(x, y)$, en prenant

$$\varphi(x, y) = f(x, y) - f(y, x),$$

pourvu que la fonction $f(x, y)$ soit une fonction paire des deux variables x, y, c'est-à-dire pourvu que l'on ait

$$f(-x, y) = f(x, y) = f(x, -y)$$

pour toutes les valeurs de x et de y qui figurent dans nos formules.

En substituant l'expression précédente de $\varphi(x, y)$ dans la formule (8), on obtient la suivante :

$$(f) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma\{\Sigma\Sigma[f(a-b, \alpha+\beta) - f(\alpha+\beta, a-b)]\} \\ &\quad = \Sigma(d-1)[f(0, d) - f(d, 0)] \\ &\qquad + 2\Sigma'[f(\delta, 2) + f(\delta, 3) + \ldots + f(\delta, d-1)] \\ &\qquad - 2\Sigma'[f(2, \delta) + f(3, \delta) + \ldots + f(d-1, \delta)]. \end{aligned} \right.$$

Les trois sommes indiquées dans les premiers membres des formules (f) et (g) se rapportent aux solutions des trois équations

$$(1) \qquad n = p + q, \qquad p = a\alpha, \qquad q = b\beta$$

en nombres entiers et positifs, comme nous l'avons expliqué plus haut (n° **2**). La première somme du second membre se rapporte aux diverses décompositions du nombre n en deux facteurs d, δ; enfin les sommes indiquées par Σ' se rapportent aux mêmes décompositions du nombre n, mais avec cette restriction de réduire à zéro les termes $\varphi(\delta, \mu)$, $f(\delta, \mu)$, $f(\mu, \delta)$ toutes les fois que μ est diviseur de d.

Les formules (f) et (g) ne diffèrent que par les notations des formules désignées par les mêmes lettres dans le cinquième article de Liouville (*Journal de Mathématiques*, 2ᵉ série, t. III, p. 284). Comme l'équation

$$n = a\alpha + b\beta$$

est symétrique par rapport aux lettres grecques et aux lettres latines, les deux sommes

$$\Sigma f(\alpha+\beta, a-b) \quad \text{et} \quad \Sigma f(a+b, \alpha-\beta)$$

sont égales, de sorte que le premier membre de la formule (f) peut s'écrire de la manière suivante:

$$(f') \qquad \Sigma\{\Sigma\Sigma[f(a-b, \alpha+\beta)-f(a+b, \alpha-\beta)]\}.$$

9. Lorsqu'on réduit la fonction $f(x, y)$ à une fonction de la seule variable x, vérifiant la condition $f(-x)=f(x)$, l'expression (f') devient

$$\Sigma\{\Sigma\Sigma[f(a-b)-f(a+b)]\}.$$

Le premier terme du second membre de la formule (f) devient

$$\Sigma(d-1)[f(0)-f(d)]=f(0)[\zeta_1(n)-\zeta(n)]-\Sigma(d-1)f(d),$$

pourvu que l'on désigne par $\zeta_1(n)$ la somme des diviseurs de n et par $\zeta(n)$ le nombre de ces diviseurs. Dans la somme Σ' qui forme le deuxième terme du second membre de la même formule, tous les termes qui correspondent à un même diviseur δ de n sont égaux à $f(\delta)$; leur nombre est celui des termes $2, 3, 4, \ldots, d-1$ qui ne sont pas diviseurs de d, c'est-à-dire $d-\zeta(d)$. On a donc

$$(\mathrm{H}) \quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma\{\Sigma\Sigma[f(a-b)-f(a+b)]\} \\ &\quad =[\zeta_1(n)-\zeta(n)]f(0)+\Sigma[2d-2\zeta(d)-\delta+1]f(\delta) \\ &\qquad -2\Sigma'[f(2)+f(3)+\ldots+f(d-1)]. \end{aligned}\right.$$

Les sommes qui figurent dans le second membre se rapportent à toutes les décompositions du nombre n en deux facteurs d, δ; mais dans la somme Σ' on doit supprimer le terme $f(\mu)$ de la somme partielle

$$f(2)+f(3)+f(4)+\ldots+f(d-1),$$

qui correspond à l'une de ces décompositions, chaque fois que μ est diviseur de d. Ainsi, pour $d=4$, cette somme se réduit à $f(3)$; pour $d=6$, elle se réduit à $f(4)+f(5)$, et ainsi de suite. La formule (H) a été donnée par Liouville dans son quatrième article (*loc. cit.*, p. 247). Liouville a aussi indiqué dans son cinquième article comment la formule (H) se déduit de la formule (f) (*ibid.*, p. 286).

10. La formule (6), que nous avons obtenue plus haut (n° 5), donne les formules des premiers articles de Liouville, lorsqu'on prend

$$\varphi(x, y) = f(x, y) - f(y, x),$$

en désignant par f une fonction paire des deux variables x, y, c'est-à-dire une fonction qui vérifie les conditions

$$f(x, y) = f(-x, y) = f(x, -y)$$

pour toutes les valeurs des variables x, y employées dans nos formules. On obtient immédiatement la formule

$$(b)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma\{\Sigma\Sigma[f(a-b, \alpha+\beta) - f(\alpha+\beta, a-b)\\ &\quad = 2^{\lambda-1}\Sigma d[f(0, 2^\lambda d) - f(2^\lambda d, 0)], \end{aligned} \right.$$

dans laquelle la somme triple du premier membre se rapporte aux trois équations

$$(1')\qquad 2^\lambda m = m' + m'', \qquad m' = a\alpha, \qquad m'' = b\beta,$$

où les nombres $m, m', m'', a, b, \alpha, \beta$ sont entiers, positifs et impairs. Ces équations étant les mêmes lorsqu'on échange entre elles les lettres latines et les lettres grecques correspondantes, on a

$$\Sigma.\Sigma\Sigma f(\alpha+\beta, a-b) = \Sigma.\Sigma\Sigma f(a+b, \alpha-\beta).$$

En faisant cette substitution dans l'équation (b), on trouve

$$(c)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma\{\Sigma\Sigma[f(a-b, \alpha+\beta) - f(a+b, \alpha-\beta)]\}\\ &\quad = 2^{\lambda-1}\Sigma d[f(0, 2^\lambda d) - f(2^\lambda d, 0)]. \end{aligned} \right.$$

Lorsqu'on réduit la fonction $f(x, y)$ à une fonction de la seule variable x vérifiant la condition $f(x) = f(-x)$, cette formule devient

$$(a)\quad \Sigma\{\Sigma\Sigma[f(a-b) - f(a+b)]\} = 2^{\lambda-1}\Sigma d[f(0) - f(2^\lambda d)].$$

Enfin l'hypothèse $\lambda = 1$ réduit les formules (a), (b), (c) aux trois suivantes

$$\text{(A)}\qquad \Sigma\{\Sigma\Sigma[f(a-b)-f(a+b)]\} = \Sigma d[f(0)-f(2d)],$$

$$\text{(B)}\qquad \left\{\begin{aligned} &\Sigma\{\Sigma\Sigma[f(a-b,\alpha+\beta)-f(\alpha+\beta,a-b)]\}\\ &\quad = \Sigma d[f(0,2d)-f(2d,0)],\end{aligned}\right.$$

$$\text{(C)}\qquad \left\{\begin{aligned} &\Sigma\{\Sigma\Sigma[f(a-b,\alpha+\beta)-f(a+b,\alpha-\beta)]\}\\ &\quad = \Sigma[f(0,2d)-f(2d,0)];\end{aligned}\right.$$

en même temps, les équations (1') auxquelles se rapportent les trois sommations indiquées dans les premiers membres, deviennent

$$2m = m' + m'', \qquad m' = a\alpha, \qquad m'' = b\beta.$$

Dans toutes ces formules, la somme indiquée par Σ dans les seconds membres se rapporte aux diverses décompositions du nombre impair donné m en deux facteurs. Ces formules coïncident, aux notations près, avec les formules générales désignées par les mêmes lettres dans les deux premiers articles de Liouville (*Journal de Mathématiques*, 2e série, t. III, p. 143 et 193).

II. — Formules relatives a la partition

$$m = \mathrm{A}a + \mathrm{B}b,$$

ou les nombres m, a, b sont impairs.

11. Étant donné un nombre m impair, on le partage en deux parties positives p, q et l'on décompose chacun des deux nombres p, q en deux facteurs, dont l'un doit être impair; en un mot, nous posons les trois équations

$$(1)\qquad m = p + q, \qquad p = \mathrm{A}a, \qquad q = \mathrm{B}b,$$

en assujettissant les deux nombres a et b à être impairs. Le nombre donné m étant impair, l'un des deux nombres A, B sera pair, et l'autre, impair. A chaque système de solutions des équations (1) nous faisons correspondre deux termes

$$f(\mathrm{A}-\mathrm{B},\, a+b), \qquad f(\mathrm{A}+\mathrm{B},\, a-b),$$

où l'on désigne par $f(x, y)$ une fonction paire des deux variables x, y, ou encore une fonction qui vérifie les conditions

$$f(x, y) = f(-x, y) = f(x, -y)$$

pour toutes les valeurs de x et de y employées dans nos formules.

Au moyen de tous les termes semblables qui correspondent aux divers systèmes de solutions des équations (1), nous formons la somme triple

$$\mathrm{S} = \Sigma\{\Sigma\Sigma[f(\mathrm{A}-\mathrm{B},\, a+b) - f(\mathrm{A}+\mathrm{B},\, a-b)]\},$$

où nous indiquons par les deux Σ entre crochets les deux sommations relatives aux deux équations $p = \mathrm{A}a$, $q = \mathrm{B}b$; on obtient ainsi une somme partielle qui correspond à une solution unique de l'équation $m = p + q$; puis, en ajoutant toutes les sommes partielles, relatives aux diverses solutions de l'équation $m = p + q$, on trouve la somme S; c'est ce qu'indique le premier Σ du second membre.

Nous allons démontrer que, par la suppression de termes qui se détruisent deux à deux, on peut exprimer la somme triple S au moyen des deux sommes simples

$$\Sigma\, d f(d, 0),$$
$$\Sigma[f(d, 0) + 2f(d, 2) + 2f(d, 4) + \ldots + 2f(d, \delta - 1)],$$

qui correspondent l'une et l'autre aux diverses décompositions du nombre m en deux facteurs d, δ.

12. Pour rendre la démonstration plus facile, nous remplacerons la somme triple, relative aux trois équations (1), par une somme unique correspondant aux solutions de l'équation

$$(2) \qquad m = \mathrm{A}a + \mathrm{B}b,$$

en nombres entiers et positifs A, B, a, b, dont les deux derniers,

a et b, doivent être impairs. Nous considérerons séparément les deux sommes

$$\Sigma f(\mathrm{A}-\mathrm{B},\, a+b), \qquad \Sigma f(\mathrm{A}'+\mathrm{B}',\, a'-b'),$$

en faisant correspondre la dernière à l'équation

$$(2') \qquad m = \mathrm{A}'a' + \mathrm{B}'b',$$

qui ne diffère de l'équation (2) que par la notation. Les termes

$$f(\mathrm{A}-\mathrm{B},\, a+b), \qquad f(\mathrm{A}'+\mathrm{B}',\, a'-b')$$

des deux sommes sont égaux lorsqu'on a

$$\mathrm{A}'+\mathrm{B}' = \pm(\mathrm{A}-\mathrm{B}), \qquad a+b = \pm(a'-b').$$

Pour éviter le double signe, nous remplacerons les deux sommes considérées par deux autres sommes, vérifiant respectivement les conditions

$$\mathrm{A}-\mathrm{B} > 0, \qquad a'-b' > 0.$$

D'abord, la différence $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ ne s'évanouit jamais, puisqu'elle est un nombre impair; par conséquent les solutions de l'équation (2) peuvent se grouper deux à deux au moyen des formules

$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{B}, \qquad \mathrm{B}_1 = \mathrm{A}, \qquad a_1 = b, \qquad b_1 = a,$$

et la somme des deux termes égaux

$$f(\mathrm{A}-\mathrm{B},\, a+b) + f(\mathrm{A}_1-\mathrm{B}_1,\, a_1+b_1)$$

peut être remplacée par le double de celui des deux termes qui vérifie la condition $\mathrm{A}-\mathrm{B}>0$. On a donc

$$\Sigma f(\mathrm{A}-\mathrm{B},\, a+b) = 2\Sigma_1 f(\mathrm{A}-\mathrm{B},\, a+b),$$

en désignant par Σ_1 une somme dont les termes satisfont à la condition $\mathrm{A}-\mathrm{B}>0$. On peut de même grouper deux à deux les termes de la somme $\Sigma f(A'+b', a'-b')$ dans lesquels la différence $a'-b'$ ne s'évanouit pas; mais il reste à ajouter les termes dans lesquels $a'=b'$. En vertu de l'équation (2'), la valeur commune de a' et de b' est un diviseur δ de m; posant donc $m=d\delta$, on a

$$d=A'+B', \qquad f(A'+B', a'-b')=f(d, o).$$

Les termes de ce genre, qui correspondent à une même décomposition du nombre m en deux facteurs d, δ, sont égaux à $f(d, o)$, et leur nombre est celui des solutions de l'équation $d=A'+B'$, c'est-à-dire $d-1$, puisque l'on doit donner à A' les valeurs $1, 2, 3, \ldots, d-1$. La somme des termes égaux à $f(d, o)$ est donc égale au produit

$$(d-1)f(d, o),$$

et la somme de tous les termes

$$f(A'+B', a'-b'),$$

dans lesquels on a

$$a'=b',$$

est égale à

$$\Sigma(d-1)f(d, o),$$

la somme Σ s'étendant à toutes les solutions de l'équation $m=d\delta$. A considérer l'équation $d=A'+B'$, on voit que d doit être >1; par conséquent, on devrait exclure la décomposition $d=1$, $\delta=m$. Mais, comme le terme correspondant $(d-1)f(d, o)$ s'évanouit, rien n'empêche d'ajouter ce terme, comme nous le faisons. On a donc

$$\Sigma f(A'+B', a'-b')=\Sigma(d-1)f(d, o)+2\Sigma_2 f(A'+B', a'-b'),$$

en désignant par Σ_2 une somme restreinte par la condition $a'-b'>0$.

13. La somme S est donc exprimée par la formule

$$(3)\qquad \begin{cases} S=+2\Sigma_1 f(A-B, a+b) \\ \qquad -2\Sigma_2 f(A'+B', a'-b')-\Sigma(d-1)f(d, o). \end{cases}$$

Or tous les termes de Σ_2 sont détruits un à un, par des termes égaux de Σ_1, et il ne reste de cette dernière somme que les termes dans lesquels le quotient $B:(A-B)$ est un nombre entier. D'abord les deux termes

$$f(A'+B', a'-b'), \qquad f(A-B, a+b)$$

sont égaux lorsqu'on a

$$\text{(A)} \qquad A-B=A'+B', \qquad a'-b'=a+b.$$

Or les équations (2), (2'), auxquelles se rapportent respectivement les deux sommes Σ_1, Σ_2, peuvent s'écrire de la manière suivante

$$\text{(2)} \qquad m=(A-B)a+(a+b)B,$$

$$\text{(2')} \qquad m=(A'+B')b'+(a'-b')A',$$

et la dernière, par la substitution (A), devient

$$m=(A-B)b'+(a+b)A'.$$

En comparant cette équation avec l'équation (2), on voit que l'équation (2') sera une conséquence de l'équation (2), si l'on joint aux formules (A) les deux formules suivantes

$$\text{(B)} \qquad b'=a+\theta(a+b), \qquad A'=B-\theta(A-B),$$

en désignant par θ un nombre entier soumis à la condition que les nombres A', B', a', b' soient positifs. Or, suivant que l'on résout les formules (A) et (B) par rapport aux lettres accentuées ou par rapport aux lettres dépourvues d'accent, on obtient les deux systèmes équivalents

I.

$$A'=B-\theta(A-B), \qquad B'=(\theta+1)(A-B)-B,$$

$$a'=a+(\theta+1)(a+b), \qquad b'=a+\theta(a+b);$$

II.

$$a=b'-\theta(a'-b'), \qquad b=(\theta+1)(a'-b')-b',$$

$$A=A'+(\theta+1)(A'+B'), \qquad B=A'+\theta(A'+B').$$

Les conditions $a > 0$, $b > 0$ exigent que le nombre θ vérifie les deux inégalités

$$\theta < \frac{b'}{a'-b'} < \theta + 1; \tag{4}$$

de même, pour que les deux nombres A′, B′ soient positifs, il faut que l'on ait

$$\theta < \frac{B}{A-B} < \theta + 1. \tag{5}$$

Comme la différence $a' - b'$ est paire, tandis que b' est impair, on vérifie les inégalités (4) en prenant pour θ la partie entière du quotient $b' : (a' - b')$; cette valeur étant nulle ou positive, les nombres correspondants a, b, A, B sont positifs et de plus les deux premiers a, b sont impairs. Par conséquent, à un terme quelconque de Σ_2 on fait correspondre par les formules II un terme de Σ_1 et un seul; et, comme la valeur correspondante de θ doit vérifier non seulement les inégalités (4), mais encore les inégalités (5), le quotient $B : (A - B)$ n'est pas un nombre entier. Enfin le même terme de Σ_1 ne correspond dans les formules II qu'à un seul terme de Σ_2; car, en résolvant les équations II par rapport aux nombres A′, B′, a', b', on obtient les équations I, et, comme les nombres A′, B′ sont positifs, les nombres A, B, θ doivent vérifier les inégalités (4), qui déterminent pour θ une valeur unique, égale à la partie entière du quotient $B : (A - B)$; par conséquent les formules II ne peuvent faire correspondre un système A, B, a, b qu'à un seul système A′, B′, a', b'.

14. Il résulte de là que, dans la formule (3), tous les termes de Σ_2 sont détruits par des termes égaux de Σ_1 qui correspondent à des solutions de l'équation (2) dans lesquelles le quotient $B : (A - B)$ est fractionnaire. Il reste donc dans la somme Σ_1 tous les termes qui correspondent à des solutions de l'équation (2) où le quotient $B : (A - B)$ est entier. J'ajoute que ces termes sont les seuls termes de Σ_1 qui, dans la formule (3), ne soient pas détruits par des termes égaux de Σ_2, qui leur correspondent un à un, en vertu des formules (A) et (B); car, si l'on considère une solution de l'équation (2), dans laquelle le quotient $B:(A-B)$ ne soit pas un nombre entier et qui vérifie la condition $A-B>0$ supposée dans la somme Σ_1, on déduira des formules (5) une valeur unique de θ, égale à la partie entière du quotient $B:(A-B)$. Cette valeur de θ étant nulle ou positive, les nombres A', B', a', b' déterminés par les formules I et les inégalités (5), sont positifs; de plus les deux nombres a', b' sont impairs et vérifient la condition $a'-b'>0$; enfin ils forment une solution de l'équation (2'), puisque l'on suppose que les nombres A, B, a, b satisfont à l'équation (2). Par conséquent, ces derniers nombres correspondent, en vertu des formules (A) et (B), à un terme de la somme Σ_2, ainsi que nous l'avons énoncé.

Les termes de la différence $\Sigma_1-\Sigma_2$ qui, dans la formule (3), ne se détruisent pas deux à deux, en vertu des formules (A) et (B), sont donc les termes de Σ_1 qui correspondent aux solutions de l'équation (2), dans lesquelles le quotient $B:(A-B)$ est un nombre entier.

15. Désignons par k la valeur de ce quotient. Nous aurons

$$B=k(A-B),\qquad B=kd,\qquad A=(k+1)d,$$

et l'équation (2) deviendra

$$m=[k(a+b)+a]d.$$

Le nombre $A-B=d$ sera donc un diviseur du nombre m; en désignant par δ le facteur conjugué, on pourra remplacer la dernière équation par le système suivant :

$$(6)\qquad m=d\delta,\qquad \delta=k(a+b)+a.$$

Les trois nombres a, b, k étant positifs, le nombre δ ne peut pas être inférieur à 3, ce qui exclut la décomposition $d=m$, $\delta=1$. Mais, pour toute autre décomposition du nombre m en deux facteurs d, δ, on a dans la somme Σ_1 un groupe de termes $f(d, a+b)$, qui correspondent aux divers systèmes de valeurs des nombres a, b propres à vérifier la deuxième des équations (6). Pour les trouver, on prendra comme valeur de la somme $a+b$ tous les nombres pairs, inférieurs à δ,

$$2,\quad 4,\quad 6,\quad \ldots,\quad \delta-1;$$

on divisera δ successivement par chacune de ces valeurs, ce qui donnera un quotient entier et positif k, et un reste impair et positif que l'on prendra comme valeur de a. On aura ainsi un groupe de termes

$$f(d,2)+f(d,4)+\ldots+f(d,\delta-1),$$

et l'on obtiendra la différence $\Sigma_1-\Sigma_2$ en faisant la somme de tous les groupes semblables, relativement aux diverses solutions de l'équation $m=d\delta$ autres que $d=m$, $\delta=1$. On a donc

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} S &= 2\Sigma[f(d,2)+f(d,4)+\ldots+f(d,\delta-1)]-\Sigma(d-1)f(d,0)\\ &= \Sigma[f(d,0)+2f(d,2)+2f(d,4)+\ldots+2f(d,\delta-1)-df(d,0)].\end{aligned}\right.$$

Dans la première expression de S, la dernière somme s'étend à toutes les décompositions de m en deux facteurs d, δ, tandis que, dans la première somme, on doit exclure la décomposition $d=m$, $\delta=1$. Dans la deuxième expression de S, la somme unique indiquée par Σ s'étend à toutes les décompositions du nombre m en deux facteurs, mais avec cette restriction de réduire à son premier terme la somme

$$f(d,0)+2f(d,2)+\ldots+2f(d,\delta-1),$$

lorsque δ est égal à 1.

16. Dans l'équation (2), un seul des deux termes Aa ou Bb est pair. Par conséquent, à toute solution dans laquelle le second terme est pair, il en correspond une autre dans laquelle il est impair, par le seul échange des deux lettres A, B et des deux lettres a, b. On réduit donc de moitié le nombre des termes de S lorsque, posant $A=\alpha$, $B=2^i\beta$ et désignant par α et β deux nombres impairs, on remplace l'équation (2) par la suivante,

$$(8)\qquad m=a\alpha+2^ib\beta;$$

à chaque solution de cette équation correspondent deux solutions de l'équation (2) par les formules

$$\begin{array}{llll} A = \alpha, & B = 2^i\beta, & a = a, & b = b, \\ A_1 = 2^i\beta, & B_1 = \alpha, & a_1 = b, & b_1 = b, \end{array}$$

et, conséquemment, deux termes égaux de S, savoir :

$$\begin{gathered} [f(\alpha - 2^i\beta,\ a + b) - f(\alpha + 2^i\beta,\ a - b)], \\ [f(2^i\beta - \alpha,\ a + b) - f(2^i\beta + \alpha,\ b - a)]. \end{gathered}$$

A la somme de ces deux termes, nous substituons le double du premier, et nous écrivons

$$(9)\qquad S = 2\Sigma[f(\alpha - 2^i\beta,\ a + b) - f(\alpha + 2^i\beta,\ a - b)],$$

en désignant par Σ une somme dont les éléments correspondent aux diverses solutions de l'équation (8) en nombres impairs et positifs a, b, α, β, l'exposant i n'étant soumis qu'à la condition d'être entier et positif. Il est avantageux, dans les applications, de remplacer la somme simple relative à l'équation (8) par une somme triple relative au système des trois équations

$$(10)\qquad m = m' + 2^i m'',\qquad m' = a\alpha,\qquad m'' = b\beta,$$

dans lesquelles on désigne par m', m'', a, b, α, β des nombres impairs et positifs, et par i un exposant pair ou impair: En substituant dans la formule (6) cette expression de S, on obtient, à la notation près, la formule (d) que Liouville a donnée dans son *cinquième article* (*Journal de Mathématiques*, 2e série, t. III, p. 274), savoir :

$$(d)\ \left\{\begin{aligned} &2\Sigma\{\Sigma\Sigma[f(\alpha - 2^i\beta,\ a + b) - f(\alpha + 2^i\beta,\ a - b)]\} \\ &\quad = \Sigma[f(d, 0) + 2f(d, 2) + 2f(d, 4) + \ldots + 2f(d, \delta - 1)] - \Sigma\, d f(d, 0). \end{aligned}\right.$$

17. Lorsqu'on réduit la fonction $f(x, y)$ à une fonction paire de la seule variable x, c'est-à-dire à une fonction $f(x)$ vérifiant la condition $f(-x) = f(x)$ pour toutes les valeurs de x employées dans notre formule, le premier membre de la formule (d) devient

$$2\Sigma\{\Sigma\Sigma[f(\alpha-2^i\beta)-f(\alpha+2^i\beta)]\}.$$

Dans la première somme du second membre, tous les termes de la somme partielle qui correspond à une solution de l'équation $m=d\delta$ sont égaux à $f(d)$, et leur nombre est

$$1+2\frac{\delta-1}{2}=\delta;$$

cette première somme est donc égale à $\Sigma\,\delta f(d)$, et l'on a

$$\text{(F)}\quad 2\Sigma\{\Sigma\Sigma[f(\alpha-2^i\beta)-f(\alpha+2^i\beta)]\}=\Sigma(\delta-d)f(d).$$

Si l'on suppose, au contraire, que la fonction $f(x,y)$ est une fonction paire de y, indépendante de x, le premier membre de la formule (d) devient

$$2\Sigma\{\Sigma\Sigma[f(a+b)-f(a-b)]\}.$$

La première somme du second membre est égale à

$$\Sigma[f(0)+2f(2)+2f(4)+..+2f(\delta-1)],$$

avec la restriction de réduire à son premier terme $f(0)$ la somme partielle relative au diviseur δ, lorsque $\delta=1$. Quant à la deuxième somme, elle se réduit à

$$\Sigma\,df(0)=f(0)\,\zeta_1(m),$$

$\zeta_1(m)$ désignant la somme des diviseurs de m. En changeant les signes des deux membres, on obtient la formule (D), donnée par Liouville dans son troisième article (*loc. cit.*, p. 201), savoir :

$$\text{(D)}\left\{\begin{aligned}&\Sigma\{\Sigma\Sigma[f(a-b)-f(a+b)]\}\\&\quad=f(0)\zeta_1(m)-\Sigma[f(0)+2f(2)+2f(4)+\ldots+2f(d-1)];\end{aligned}\right.$$

la somme partielle renfermée entre crochets doit être réduite à son premier terme $f(0)$ lorsque $d = 1$.

On obtient encore une formule remarquable en prenant dans la formule (D)

$$f(x) = F(x+1) - F(x-1),$$

$F(x)$ désignant une fonction impaire de x. On vérifie d'abord que la condition $f(x) = f(-x)$ se trouve remplie, car on a

$$f(-x) = F(-x+1) - F(-x-1) = -F(x-1) + F(x+1).$$

Pour trouver ce que devient alors le second membre de la formule (D), il faut remarquer que l'on a

$$\begin{gathered} f(0) = 2F(1), \qquad 2f(2) = 2F(3) - 2F(1), \\ 2f(4) = 2F(5) - 2F(3), \qquad \ldots, \\ 2f(d-1) = 2F(d) - 2F(d-2). \end{gathered}$$

En faisant la somme de ces expressions, on trouve

$$f(0) + 2f(2) + 2f(4) + \ldots + 2f(d-1) = 2F(d).$$

Ainsi, en divisant par 2 la formule (D) et en changeant les signes, on obtient la formule (E) de Liouville (*loc. cit.*, p. 206)

$$\text{(E)} \left\{ \begin{aligned} &\Sigma\{\Sigma\Sigma[F(a-b+1) - F(a-b-1) \\ &\qquad - F(a+b+1) + F(a+b-1)]\} = F(1)\zeta_1(m) - \Sigma F(d). \end{aligned} \right.$$

18. Liouville a donné, dans son cinquième article (*loc. cit.*, p. 281), une autre formule générale que l'on peut obtenir par la combinaison des deux formules (b) et (d) (n$^{\text{os}}$ 10 et 16). Si, dans la formule (b), on remplace $f(x, y)$ par $f(2^e x, y)$, elle devient

$$(b') \quad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma[f(2^e\alpha - 2^e\beta, a+b) - f(2^e\alpha + 2^e\beta, a-b)] \\ &\quad = 2^{\lambda-1}\Sigma d[f(0, 2^\lambda d) - f(2^{\lambda+e} d, 0)], \end{aligned} \right.$$

la somme indiquée dans le second membre s'étendant à toutes les décompositions du nombre m en deux facteurs d, δ, tandis que la somme du premier membre correspond aux différentes solutions de l'équation

$$2^{\lambda} m = a\alpha + b\beta,$$

ou, ce qui revient au même, de l'équation

$$(11) \qquad 2^{\lambda+e} m = 2^{e} a\alpha + 2^{e} b\beta$$

en nombres impairs et positifs a, b, α, β.

De même, si l'on remplace $f(x, y)$ par $f(2^{l}x, y)$ dans la formule (d), on a

$$(d') \quad \begin{cases} 2\Sigma[f(2^{l}\alpha - 2^{l+i}\beta,\, a+b) - f(2^{l}\alpha + 2^{l+i}\beta,\, a-b)] \\ \quad = \Sigma[f(2^{l}d, 0) + 2f(2^{l}d, 2) + 2f(2^{l}d, 4) + \ldots + 2f(2^{l}d, \delta - 1)] \\ \quad - \Sigma\, d\, f(2^{l}d, 0), \end{cases}$$

la somme indiquée dans le premier membre s'étendant aux diverses solutions de l'équation

$$(12) \qquad 2^{l} m = 2^{l} a\alpha + 2^{l+i} b\beta$$

en nombres impairs et positifs a, b, α, β; l'exposant i se trouve déterminé dans chaque solution, par la condition de donner une valeur impaire au quotient $(m - a\alpha) : 2^{i}$.

19. Considérons maintenant l'équation

$$(13) \qquad 2^{l} m = 2^{p} a\alpha + 2^{q} b\beta,$$

dans laquelle les nombres m, a, b, α, β sont impairs et positifs, tandis que les exposants p, q peuvent être positifs ou nuls. Le nombre m et l'exposant l sont donnés, et l'on détermine de toutes les manières possibles les nombres a, b, α, β, p et q, de manière à vérifier l'équation (13); puis, à chaque solution, on fait correspondre un terme

$$[f(2^{p}\alpha - 2^{q}\beta,\, a+b) - f(2^{p}\alpha + 2^{q}\beta,\, a-b)];$$

enfin on fait la somme de tous les termes semblables qui correspondent aux diverses solutions de l'équation (13), et l'on désigne cette somme par S. On a ainsi

$$S = \Sigma[f(2^p\alpha - 2^q\beta,\ a+b) - f(2^p\alpha + 2^q\beta,\ a-b)].$$

Les solutions de l'équation (13) peuvent se partager en divers groupes, suivant les valeurs des exposants p, q. Tant que l'un de ces exposants est inférieur à l, ces exposants sont égaux; on a

$$p = q = e, \qquad 2^{l-e}m = a\alpha + b\beta.$$

La somme S_e des termes de S qui correspondent à la valeur e des exposants p, q se déduit de la formule (b') en y faisant $\lambda = l - e$. On trouve ainsi

$$(14) \qquad S_e = 2^{l-e-1}\Sigma d[f(0,\ 2^{l-e}d) - f(2^l d,\ 0)].$$

Lorsque le plus petit des deux exposants p, q est égal à l, l'autre doit être plus grand. Nous désignerons par S_l la partie de la somme S qui correspond à cette hypothèse, et nous poserons

$$2^p\alpha = 2^l A, \qquad 2^q\beta = 2^l B.$$

L'un des deux nombres A, B sera pair et l'autre impair, et l'on aura

$$\begin{aligned} S_l &= \Sigma[f(2^l A - 2^l B,\ a+b) - f(2^l A + 2^l B,\ a-b)] \\ &= 2\Sigma[f(2^l\alpha - 2^{l+i}\beta,\ a+b) - f(2^l\alpha + 2^{l+i}\beta,\ a-b)]. \end{aligned}$$

La somme indiquée dans la première expression correspond aux diverses solutions de l'équation

$$m = Aa + Bb,$$

en nombres entiers et positifs A, B, a, b, dont les deux derniers doivent être impairs, tandis que les termes de la deuxième expression correspondent aux diverses solutions de l'équation

$$(12) \qquad m = a\alpha + 2^i b\beta$$

en nombres impairs et positifs a, b, α, β. Nous avons montré (n° **16**) que la première somme est double de la seconde.

La somme S, relative à l'équation (13), s'obtient en ajoutant à la somme S_l, que nous venons de définir, la somme des termes qui correspondent aux solutions où les deux exposants p, q ont une valeur commune e, inférieure à l; en un mot, on a

$$S = S_0 + S_1 + \ldots + S_{l-1} + S_l.$$

Or on déduit de la formule (14)

$$\begin{aligned}\sum_0^{l-1} S_e = {} & \Sigma d[f(0, 2d) + 2f(0, 4d) + 4f(0, 8d) + \ldots + 2^{l-1} f(0, 2^l d)] \\ & - (2^l - 1)\Sigma d f(2^l d, 0).\end{aligned}$$

D'un autre côté, la formule (d' donne

$$\begin{aligned}S_l = {} & \Sigma[f(2^l d, 0) + 2f(2^l d, 2) + \ldots + 2f(2^l d, \delta - 1)] \\ & - \Sigma d f(2^l d, 0).\end{aligned}$$

En ajoutant ces formules membre à membre, on trouve

$$(e)\quad \left\{\begin{aligned} S = {} & \Sigma\{\Sigma\Sigma[f(2^p\alpha - 2^q\beta, a + b) - f(2^p\alpha + 2^q\beta, a - b)]\} \\ = {} & \Sigma d[f(0, 2d) + 2f(0, 4d) + 4f(0, 8d) + \ldots + 2^{l-1} f(0, 2^l d)] \\ & + \Sigma[f(2^l d, 0) + 2f(2^l d, 2) + \ldots + 2f(2^l d, \delta - 1)] \\ & - 2^l \Sigma d f(2^l d, 0).\end{aligned}\right.$$

Si l'on réduit la fonction $f(x, y)$ successivement à une fonction paire de x et à une fonction paire de y, on déduit de la formule (e) les deux formules suivantes :

$$(\mathrm{G})\quad \left\{\begin{aligned} & \Sigma\{\Sigma\Sigma[f(2^p\alpha - 2^q\beta) - f(2^p\alpha + 2^q\beta)]\} \\ & \quad = (2^l - 1) f(0)\zeta_1(m) + \Sigma(\delta - 2^l d) f(2^l d),\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{J})\quad \left\{\begin{aligned} & \Sigma\{\Sigma\Sigma[f(a + b) - f(a - b)]\} \\ & \quad = \Sigma d[f(2d) + 2f(4d) + \ldots + 2^{l-1} f(2^l d)] \\ & \qquad + \Sigma[f(0) + 2f(2) + 2f(4) + \ldots + 2f(\delta - 1)] \\ & \qquad - 2^l f(0)\zeta_1(m).\end{aligned}\right.$$

Dans ces trois formules, nous avons remplacé la somme simple relative aux diverses solutions de l'équation (13) par une somme triple qui correspond aux divers systèmes de solutions des trois équations

$$(15) \qquad 2^l m = 2^p m' + 2^q m'', \qquad m' = a\alpha, \qquad m'' = b\beta.$$

Les sommes indiquées dans les seconds membres se rapportent aux diverses décompositions du nombre m en deux facteurs d, δ, mais avec cette restriction que la deuxième somme, dans la formule (e) et, dans la formule (J), que la somme partielle renfermée entre crochets doit être réduite à son premier terme, lorsque $\delta = 1$.

Liouville a encore donné quelques autres formules dans les articles cités; mais, comme il indique suffisamment la manière dont elles se déduisent des formules que nous venons de démontrer, nous n'avons pas à nous en occuper.

III. — Formules relatives aux deux équations

$$2m = a\alpha + b\beta, \qquad m = d_1\delta_1 + 2^i d_2\delta_2.$$

20. Nous partageons d'abord le double d'un nombre impair m de toutes les manières possibles, en deux parties impaires et positives m', m''; puis nous cherchons toutes les décompositions de chacun de ces nombres en deux facteurs. En un mot, nous calculons les différents systèmes de solutions des trois équations

$$(1) \qquad 2m = m' + m'', \qquad m' = a\alpha, \qquad m'' = b\beta$$

en nombres impairs et positifs. A chacune de ces solutions nous faisons correspondre une expression de la forme suivante

$$(-1)^{\frac{l-1}{2}}[\mathcal{F}(a+b, \alpha-\beta) + \mathcal{F}(a-b, \alpha+\beta)],$$

où l'on désigne par $\mathcal{F}(x, y)$ une fonction des deux variables x et y, impaire par rapport à x et paire par rapport à y; c'est-à-dire une fonction vérifiant les conditions

$$\mathcal{F}(x, -y) = \mathcal{F}(x, y), \qquad \mathcal{F}(-x, y) = -\mathcal{F}(x, y), \qquad \mathcal{F}(0, y) = 0,$$

pour toutes les valeurs de x et de y employées dans nos formules. Enfin nous formons la somme S de toutes les expressions semblables qui correspondent aux différents systèmes de solutions des équations (1). C'est ce que nous exprimons par la formule

$$S = \Sigma \{ \Sigma\Sigma(-1)^{\frac{b-1}{2}} [\mathfrak{F}(a+b, \alpha-\beta) + \mathfrak{F}(a-b, \alpha+\beta)] \},$$

où nous indiquons entre parenthèses les deux intégrations relatives aux deux équations $m' = a\alpha$, $m'' = b\beta$.

Comme les équations (1) ne changent pas lorsqu'on permute entre elles les lettres grecques et les lettres latines correspondantes, on a

$$\Sigma^3(-1)^{\frac{b-1}{2}} \mathfrak{F}(a-b, \alpha+\beta) = \Sigma^3(-1)^{\frac{\beta-1}{2}} \mathfrak{F}(\alpha-\beta, a+b);$$

de plus, le système des équations (1) peut être remplacé par l'équation

$$2m = a\alpha + b\beta. \tag{2}$$

La somme S peut donc s'exprimer par la formule

$$S = \Sigma \left[(-1)^{\frac{b-1}{2}} \mathfrak{F}(a+b, \alpha-\beta) + (-1)^{\frac{\beta-1}{2}} \mathfrak{F}(\alpha-\beta, a+b) \right],$$

dans laquelle le signe sommatoire se rapporte aux diverses solutions de l'équation (2) en nombres impairs et positifs.

21. Désignons par S_0 la partie de la somme S qui correspond à l'hypothèse $\alpha = \beta$. La valeur commune des deux nombres α, β est un diviseur de m; nous le désignerons par δ et nous remplacerons l'équation (2) par les deux suivantes

$$m = d\delta, \qquad 2d = a + b. \tag{3}$$

Comme la fonction $\mathfrak{F}(x, y)$ vérifie la condition $\mathfrak{F}(0, a+b) = 0$, la somme partielle S_0 est exprimée par la formule

$$S_0 = \Sigma(-1)^{\frac{b-1}{2}} \mathfrak{F}(2d, 0),$$

dans laquelle le signe Σ s'étend à tous les systèmes de valeurs de d et de b propres à vérifier les équations (3). Or, pour chaque diviseur d de m, le nombre b reçoit les valeurs $1, 3, 5, \ldots, 2d-1$. La somme des facteurs $(-1)^{\frac{b-1}{2}}$ qui correspondent à une même valeur de d est donc

$$1-1+1+\ldots+(-1)^{d-1}=1;$$

par conséquent, on a

$$S_0 = \Sigma \mathfrak{F}(2d, 0),$$

le signe Σ se rapportant aux diverses solutions de l'équation $m = d\delta$.

Les autres termes de S peuvent se grouper deux à deux, au moyen des formules

$$a' = b, \qquad b' = a, \qquad \alpha' = \beta, \qquad \beta' = \alpha,$$

qui correspondent à la permutation des deux termes $a\alpha$, $b\beta$, et en vertu desquelles on aura

$$\begin{aligned} a' + b' &= a + b, \\ \alpha' - \beta' &= -(\alpha - \beta), \\ \mathfrak{F}(a'+b', \alpha'-\beta') &= \mathfrak{F}(a+b, \alpha-\beta), \\ \mathfrak{F}(\alpha'-\beta', a'+b') &= -\mathfrak{F}(\alpha-\beta, a+b). \end{aligned}$$

De plus, nous pouvons supposer que celle des deux solutions par laquelle nous exprimons la somme des deux termes d'un même groupe satisfait à l'inégalité $\alpha - \beta > 0$, puisque les deux différences $\alpha' - \beta'$, $\alpha - \beta$ sont de signes contraires. On peut donc exprimer la somme S par la formule

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} S = \Sigma F(2d, 0) &+ \Sigma_1 \left[(-1)^{\frac{a-1}{2}} + (-1)^{\frac{b-1}{2}}\right] \mathfrak{F}(a+b, \alpha-\beta) \\ &+ \Sigma_2 \left[(-1)^{\frac{\beta_1-1}{2}} - (-1)^{\frac{\alpha_1-1}{2}}\right] \mathfrak{F}(\alpha_1-\beta_1, a_1+b_1), \end{aligned} \right.$$

en désignant par Σ_1 une somme dont les éléments correspondent à celles des solutions de l'équation (2) dans lesquelles la différence

$\alpha - \beta$ est positive, et par Σ_2 une somme relative à l'équation

$$(2') \qquad 2m = a_1\alpha_1 + b_1\beta_1,$$

et soumise à la restriction $\alpha_1 - \beta_1 > 0$.

22. Nous distinguons les deux équations (2) et (2'), quoiqu'elles ne diffèrent que par les notations, afin de grouper chaque terme de Σ_1 avec un terme de Σ_2 vérifiant les relations

$$(\text{A}) \qquad \alpha_1 - \beta_1 = a + b, \qquad a_1 + b_1 = \alpha - \beta.$$

Pour démontrer que cela est toujours possible, nous écrirons les équations (2) et (2') de la manière suivante

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} 2m &= (a+b)\beta + (\alpha - \beta)a, \\ 2m &= (\alpha_1 - \beta_1)a_1 + (a_1 + b_1)\beta_1. \end{aligned}$$

Au moyen des relations (A), la dernière formule peut s'écrire

$$(\beta) \qquad 2m = (a+b)a_1 + (\alpha - \beta)\beta_1.$$

Or, en comparant les deux formules (α), (β), on voit que la dernière est une conséquence de la première, pourvu que l'on prenne

$$(\text{B}) \qquad a_1 = \beta - \theta(\alpha - \beta), \qquad \beta_1 = a + \theta(a+b)$$

en désignant par θ un nombre entier quelconque. De plus, nous montrerons que l'on peut déterminer le nombre θ de manière que la solution a_1, b_1, α_1, β_1 de l'équation (2') vérifie toutes les conditions supposées dans la somme Σ_2. En effet, en résolvant les équations (A) et (B), on trouve

I.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a + (\theta + 1)(a+b), & \beta_1 &= a + \theta(a+b), \\ a_1 &= \beta - \theta(\alpha - \beta), & b_1 &= (\theta + 1)(\alpha - \beta) - \beta. \end{aligned}$$

Les quatre nombres a, b, α, β étant impairs, les quatre nombres déterminés par ces formules sont aussi impairs, quel que soit le nombre θ; mais, pour que les deux nombres a_1, b_1 soient positifs, il faut que θ vérifie les deux inégalités

$$(5) \qquad \theta < \frac{\beta}{\alpha-\beta} < \theta + 1.$$

La différence $\alpha - \beta$ étant paire et positive, tandis que β est impair, le rapport $\beta:(\alpha-\beta)$ est une fraction positive, dont la partie entière est nulle ou positive. On satisfait aux inégalités (5) en égalant θ à cette partie entière, et on ne peut le faire que de cette manière.

De plus, la valeur de θ étant positive, les nombres α_1, β_1 sont aussi positifs et l'on voit qu'ils satisfont à la condition $\alpha_1 - \beta_1 > 0$ supposée dans la somme Σ_2.

Par conséquent, à chacun des termes de Σ_1, les formules I font correspondre un terme de Σ_2, et un seul.

23. Je dis en outre que le même terme de Σ_2 ne correspond jamais, dans les formules I, à deux termes de Σ_1. Car, si cela avait lieu, on aurait en même temps les formules I et les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a' + (\theta'+1)(a'+b'), & \beta_1 &= a' + \theta'(a'+b'), \\ a_1 &= \beta' - \theta'(\alpha'+\beta', & b_1 &= (\theta'+1)(\alpha'-\beta') - \beta'. \end{aligned}$$

On en déduirait respectivement les deux systèmes suivants :

II.

$$\begin{aligned} \alpha &= (\theta+1)(a_1+b_1) + a_1, & \beta &= \theta(a_1+b_1) + a_1, \\ a &= \beta_1 - \theta(\alpha_1 - \beta_1), & b &= (\theta+1)(\alpha_1+\beta_1) - \beta_1; \\ \alpha' &= (\theta'+1)(a_1+b_1) + a_1, & \beta' &= \theta'(a_1+b_1) + a_1, \\ a' &= \beta_1 - \theta'(\alpha_1 - \beta_1), & b' &= (\theta'+1)(\alpha_1 - \beta_1) - \beta_1. \end{aligned}$$

Or les conditions $a > 0$, $b > 0$ déterminent θ par les inégalités

$$\theta < \frac{\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} < \theta + 1;$$

de même les conditions $a' > 0$, $b' > 0$ exigent que l'on ait

$$\theta' < \frac{\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} < \theta' + 1;$$

on a donc

$$\theta' = \theta = \mathrm{E}\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1}\right),$$

en désignant par $\mathrm{E}(x)$ la partie entière du nombre x. Les deux nombres θ, θ' étant égaux, on a

$$a' = a, \qquad b' = b, \qquad \alpha' = \alpha, \qquad \beta' = \beta;$$

c'est-à-dire que les formules I ne font jamais correspondre la même solution de l'équation $(2')$ à deux solutions différentes de l'équation (2).

Ainsi les formules (A) et (B) jointes aux inégalités (5) groupent chacun des termes de Σ_1 avec un des termes de Σ_2, et inversement, de telle manière que le même terme ne se trouve jamais répété. Comme, en vertu des formules (A), on a

$$\mathcal{F}(\alpha_1 - \beta_1, a_1 + b_1) = \mathcal{F}(a + b, \alpha - \beta),$$

la somme des deux termes d'un même groupe est

$$\left[(-1)^{\frac{a-1}{2}} + (-1)^{\frac{b-1}{2}} + (-1)^{\frac{\beta_1-1}{2}} - (-1)^{\frac{\alpha_1-1}{2}}\right] \mathcal{F}(a + b, \alpha - \beta),$$

et la somme proposée est exprimée par la formule

$$(6)\quad \begin{cases} \mathrm{S} = \Sigma \mathcal{F}(2d, 0) \\ \qquad + \Sigma_1 \left[(-1)^{\frac{a-1}{2}} + (-1)^{\frac{b-1}{2}} + (-1)^{\frac{\beta_1-1}{2}} - (-1)^{\frac{\alpha_1-1}{2}}\right] \mathcal{F}(a + b, \alpha - \beta), \end{cases}$$

dans laquelle Σ_1 indique une somme dont les éléments correspondent à celles des solutions de l'équation

$$(2) \qquad 2m = a\alpha + b\beta$$

qui vérifient la condition $\alpha > \beta$, et les deux exposants α_1, β_1 sont déterminés par les équations

$$(7)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = a + (\theta + 1)(a + b), \\ \beta_1 = a + \theta(a + b), \\ \theta = \mathrm{E}\left(\dfrac{\beta}{\alpha - \beta}\right). \end{cases}$$

24. L'expression précédente de la somme S peut se simplifier. D'abord on conclut de l'équation (2), mise sous la forme

$$(\alpha)\qquad 2m = (a + b)\beta + (\alpha - \beta)a,$$

que l'un des deux nombres $(a + b)$, $(\alpha - \beta)$ est de la forme $4l$, et l'autre, de la forme $4l + 2$. Supposons d'abord

$$a + b \equiv 0 \pmod 4, \qquad \alpha - \beta \equiv 2 \pmod 4;$$

on déduit des formules (7)

$$\alpha_1 \equiv \beta_1 \equiv a \pmod 4;$$

par conséquent

$$(-1)^{\frac{\beta_1 - 1}{2}} = (-1)^{\frac{\alpha_1 - 1}{2}}, \qquad (-1)^{\frac{a-1}{2}} + (-1)^{\frac{b-1}{2}} = 0;$$

le terme correspondant de Σ_1 s'évanouit. Il ne reste ainsi dans cette somme que les termes où l'on a

$$a + b = 2d_1, \qquad \alpha - \beta = 2^{i+1} d_2,$$

en désignant par d_1, d_2 deux nombres impairs, et par i un exposant entier et positif. Comme on a dans ce cas

$$\frac{a - 1}{2} \equiv \frac{b - 1}{2}, \qquad \frac{\beta_1 - 1}{2} \equiv \frac{a - 1}{2} + \theta \equiv -\frac{\alpha_1 - 1}{2} \pmod 2$$

le coefficient correspondant de $\mathfrak{F}(a + b, \alpha - \beta)$ dans la formule (6) est égal à

$$2(-1)^{\frac{a-1}{2}}[1 + (-1)^\theta], \qquad \theta = \mathrm{E}\left(\frac{\beta}{\alpha - \beta}\right).$$

Comme ce coefficient se réduit à

$$4(-1)^{\frac{a-1}{2}} \quad \text{ou à} \quad 0,$$

suivant que θ est pair ou impair, on peut remplacer la formule (6) par la suivante

$$(8) \qquad S = \Sigma \mathfrak{F}(2d, 0) + 4\Sigma'(-1)^{\frac{a-1}{2}} \mathfrak{F}(a+b, \alpha - \beta),$$

dans laquelle on désigne par Σ' une somme dont les éléments correspondent à celles des solutions de l'équation (2), qui satisfont aux conditions

$$(\text{C}) \quad \alpha > \beta, \qquad a \equiv b \pmod{4}, \qquad \theta = \text{E}\left(\frac{\beta}{\alpha - \beta}\right) \equiv 0 \pmod{2}.$$

25. Les deux premières conditions sont vérifiées lorsqu'on prend, comme nous l'avons indiqué plus haut,

$$(a) \qquad a + b = 2d_1, \qquad \alpha - \beta = 2^{i+1} d_2$$

en désignant par d_1, d_2 deux nombres positifs, impairs. En substituant ces expressions dans l'équation (2) mise sous la forme (α), on a

$$(9) \qquad m = d_1 \beta + 2^i d_2 a,$$

et l'on peut remplacer la formule (8) par la suivante

$$(8') \qquad S = \Sigma \mathfrak{F}(2d, 0) + 4\Sigma_1(-1)^{\frac{a-1}{2}} \mathfrak{F}(2d_1, 2^{i+1} d_2),$$

en désignant par Σ_1 une somme dont les éléments correspondent à celles des solutions de l'équation (9) en nombres impairs et positifs d_1, d_2, α, β, qui vérifient les conditions

$$a < 2d_1, \qquad \theta = \text{E}\left(\frac{\beta}{2^{i+1} d_2}\right) \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, 2).$$

Mais la somme Σ_1 peut être remplacée par la somme

$$S_1 = \Sigma(-1)^{\frac{\delta_1 - 1}{2}} \mathfrak{F}(2d_1, 2^{i+1} d_2)$$

étendue à toutes les solutions de l'équation

$$(10) \qquad m = d_1\delta_1 + 2^i d_2\delta_2$$

en nombres impairs et positifs d_1, d_2, δ_1, δ_2, l'exposant i pouvant être pair ou impair. En effet, si l'on cherche dans les deux sommes S_1, Σ_1 les termes qui correspondent à un même système de valeurs de d_1 et $2^i d_2$, on trouve que cette somme partielle a la même valeur dans les deux sommes considérées. D'abord toutes les solutions de l'équation (9) s'expriment au moyen de l'une d'elles a_0, β_0 par les formules

$$a = a_0 + kd_1, \qquad \beta = \beta_0 - k\,2^i d_2;$$

mais, pour que le nombre a soit impair, a_0 et β_0 étant supposés impairs, il faut que le nombre k soit pair. Posant donc $k = 2\lambda$, on a

$$a = a_0 + \lambda\, 2 d_2, \qquad \beta = \beta_0 - \lambda\, 2^{i+1} d_2.$$

La première de ces formules montre qu'une seule de ces solutions (a, β) satisfait à la double condition

$$0 < a < 2d_1.$$

Par conséquent, à chaque système de valeurs de d_1 et $2^i d_2$, il ne peut correspondre qu'un seul terme de Σ_1, savoir

$$(-1)^{\frac{a-1}{2}} \mathfrak{F}(2d_1, 2^{i+1} d_2);$$

mais, pour qu'il existe effectivement, il faut que la valeur correspondante de β vérifie la condition

$$\theta = E\left(\frac{\beta}{2^{i+1} d_2}\right) \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, 2).$$

Or il en est de même pour S_1. Car toutes les solutions de l'équation (10) en nombres impairs sont données par les formules

$$\delta_2 = a + \lambda\, 2 d_1, \qquad \delta_1 = \beta - \lambda\, 2^{i+1} d_2.$$

Le nombre a étant $< 2d_1$, δ_2 ne peut être positif qu'autant que λ est nul ou positif; pour que δ_1 soit aussi positif, il faut que λ ne surpasse pas la partie entière θ du quotient $\beta : 2^{i+1} d_2$. Le nombre δ_2 ne peut donc avoir que les $(\theta + 1)$ valeurs qui correspondent aux valeurs $0, 1, 2, \ldots, \theta$ de λ. D'ailleurs, pour chaque valeur de λ, on a

$$\frac{\delta_2 - 1}{2} \equiv \frac{a-1}{2} + \lambda \pmod 2, \qquad (-1)^{\frac{\delta_2 - 1}{2}} = (-1)^{\frac{a-1}{2}} (-1)^{\lambda}.$$

La somme des termes de S_1 qui correspondent à un même système $(d_1, 2^i d_2)$ est donc

$$\mathfrak{F}(2d_1, 2^{i+1} d_2)(-1)^{\frac{a-1}{2}} \Sigma_0^\theta (-1)^\lambda;$$
$$\Sigma(-1)^\lambda = 1 - 1 + 1 - \ldots + (-1)^\theta = 1 \quad \text{ou} \quad 0$$

suivant que θ est pair ou impair. Par conséquent la somme partielle considérée se réduit à

$$(-1)^{\frac{a-1}{2}} \mathfrak{F}(2d_1, 2^{i+1} d_2)$$

si θ est pair, et à zéro si θ est impair. Les deux sommes Σ_1 et S_1 sont donc égales.

26. En remplaçant dans la formule (8′) S par son expression en somme simple, relative à l'équation (2), et Σ_1 par l'expression de la somme équivalente S_1, on obtient la formule suivante

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma(-1)^{\frac{b-1}{2}} [\mathfrak{F}(a+b, \alpha - \beta) + \mathfrak{F}(a-b, \alpha+\beta)] \\ &\quad = \Sigma \mathfrak{F}(2d, 0) + 4\Sigma(-1)^{\frac{\delta_2 - 1}{2}} \mathfrak{F}(2d_1, 2^{i+1} d_2), \end{aligned} \right.$$

que Liouville a donnée dans son dix-huitième article (*Journal de Mathématiques*, 2^e série, t. X, p. 169).

Lorsqu'on réduit la formule $\mathfrak{F}(x, y)$ à une fonction impaire de x, indépendante de y, c'est-à-dire à une fonction $F(x)$ vérifiant les conditions

$$F(-x) = -F(x), \qquad F(0) = 0,$$

pour toutes les valeurs de x employées dans nos formules, on obtient la formule suivante :

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma(-1)^{\frac{b-1}{2}}[F(a+b)+F(a-b)] \\ &\quad = \Sigma F(2d) + 4\Sigma(-1)^{\frac{\delta_1-1}{2}} F(2d_1). \end{aligned} \right.$$

La deuxième somme du second membre peut être remplacée par une somme triple relative aux trois équations

$$(10') \qquad m = m_1 + 2^i m_2, \qquad m_1 = d_1\delta_1, \qquad m_2 = d_2\delta_2.$$

Les sommations relatives aux deux dernières équations se trouvant séparées, on peut effectuer celle qui correspond à l'équation $m_2 = d_2\delta_2$; posant donc

$$\Sigma(-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}} = \rho(m_2),$$

et remplaçant la somme simple du premier membre par une somme triple, relative aux trois équations (1), on obtient la formule (L) donnée par Liouville, dans son sixième article (*Journal de Mathématiques*, t. III, p. 327), savoir

$$(\mathrm{L}) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma\left\{\Sigma\Sigma(-1)^{\frac{b-1}{2}}[F(a+b)+F(a-b)]\right\} \\ &\quad = \Sigma F(2d) + 4\Sigma[\rho(m_2)\Sigma F(2d_1)]. \end{aligned} \right.$$

27. On démontre d'une manière semblable une autre formule donnée par Liouville dans son dix-septième article (*Journal de Mathématiques*, 2e série, t. X, p. 135) et qui se rapporte, comme la précédente, aux deux équations

$$2m = a\alpha + b\beta, \qquad m = d_1\delta_1 + 2^i d_2\delta_2.$$

Mais on y considère une fonction $\psi(x, y)$ symétrique par rapport aux deux variables x, y, et paire relativement à chacune de ces variables.

On forme d'abord la somme

$$S' = \Sigma(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}+\frac{b-1}{2}}\psi(a-b, \alpha+\beta)$$

relative à toutes les solutions de l'équation (2)

$$2m = a\alpha + b\beta$$

en nombres impairs et positifs a, b, α, β; puis une seconde somme

$$S_1 = \Sigma(-1)^{\frac{\delta_1-1}{2}+\frac{\delta_2-1}{2}}\psi(2d_1, 2^{i+1}d_2)$$

relative à l'équation

$$(10) \qquad m = d_1\delta_1 + 2^i d_2\delta_2.$$

Nous démontrerons qu'il existe entre ces deux sommes la relation

$$S' = S + 4S_1,$$

où l'on désigne par S la somme

$$S = \Sigma(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\psi(0, 2d),$$

relative aux décompositions du nombre m en deux facteurs d, δ.

Cherchons d'abord la partie de S' qui correspond à l'hypothèse $a = b$.

La valeur commune de a et de b étant un diviseur du nombre m, désignons-la par δ et posons

$$m = d\delta.$$

La partie cherchée de S' correspond aux deux équations

$$m = d\delta, \qquad 2d = \alpha + \beta,$$

et la somme des termes qui correspondent à une même valeur de δ est égale à

$$(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\psi(0, 2d)\Sigma(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}},$$

la sommation indiquée par Σ s'étendant à toutes les valeurs de α impaires et inférieures à $2d$; on a donc

$$\Sigma(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} = 1 - 1 + 1 - \ldots + (-1)^{d-1} = 1.$$

La somme des termes de S' qui correspondent à l'hypothèse

$$a = b = \delta$$

se réduit donc au terme unique

$$(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \psi(0, 2d),$$

et la somme de tous les termes de S' qui correspondent aux solutions de l'équation (2), dans lesquelles a et b sont égaux, est égale à la somme S, de sorte que l'on peut poser

$$S' = S + S'',$$

en désignant par S'' la somme des termes de S' dans lesquels les deux nombres a et b sont inégaux.

28. Or la somme S'' est égale au quadruple de la somme S_1. D'abord on peut grouper deux à deux les termes de S'' au moyen des formules

$$a' = b, \qquad b' = a, \qquad \alpha' = \beta, \qquad \beta' = \alpha.$$

La fonction $\psi(x, y)$ étant paire par rapport à x, on a

$$\psi(a' - b', \alpha' + \beta') = \psi(a - b, \alpha + \beta),$$

et la somme des deux termes devient

$$\left[(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}+\frac{b-1}{2}} + (-1)^{\frac{\beta-1}{2}+\frac{a-1}{2}}\right] \psi(a - b, \alpha + \beta),$$

et nous pouvons supposer que la solution a, b, α, β au moyen de laquelle nous exprimons la somme des deux termes est celle des deux solutions du groupe considéré, qui vérifie la condition $a > b$. Or, en écrivant l'équation (2) sous la forme

$$2m = (a - b)\alpha + (\alpha - \beta)b + 2b\beta,$$

on voit que l'on a

$$\frac{a-b}{2} \equiv \frac{\alpha-\beta}{2} \quad (\text{mod}\, 2),$$

et, par conséquent,

$$\frac{\alpha-1}{2} + \frac{b-1}{2} \equiv \frac{\beta-1}{2} + \frac{a-1}{2} \quad (\text{mod}\, 2),$$

$$(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}+\frac{b-1}{2}} = (-1)^{\frac{\beta-1}{2}+\frac{a-1}{2}}.$$

On a donc

$$S'' = 2\Sigma_1 (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}+\frac{b-1}{2}} \psi(a-b, \alpha+\beta),$$

en désignant par Σ_1 une somme dont les termes correspondent à celles des solutions de l'équation (2) en nombres impairs et positifs, qui satisfont à la condition $a - b > 0$.

29. Afin de profiter d'une partie de la démonstration de la formule (11), nous échangerons entre elles les lettres grecques et les lettres latines correspondantes, et nous écrirons

$$S'' = 2\Sigma_1 (-1)^{\frac{\beta-1}{2}+\frac{a-1}{2}} \psi(\alpha-\beta, a+b),$$

en désignant par Σ_1 une somme relative à celles des solutions de l'équation (2) qui vérifient la condition $\alpha - \beta > 0$.

Nous avons vu (n^{os} **22** et **23**) que toutes ces solutions peuvent se grouper deux à deux au moyen des formules

$$\text{(A)} \qquad \alpha_1 - \beta_1 = a + b, \qquad a_1 + b_1 = \alpha - \beta,$$

$$\text{(B)} \qquad a_1 = \beta - \theta(\alpha - \beta), \qquad \beta_1 = a + \theta(a + b),$$

dans lesquelles le nombre θ, en vertu des conditions $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, est déterminé par les inégalités

$$(5) \qquad \theta < \frac{\beta}{\alpha-\beta} < \theta + 1, \qquad \theta = \mathrm{E}\left(\frac{\beta}{\alpha-\beta}\right).$$

La somme des deux termes d'un même groupe est

$$[1+(-1)^0](-1)^{\frac{\beta-1}{2}+\frac{a-1}{2}}\psi(\alpha-\beta,\, a+b).$$

D'abord, des formules (A) et de ce que $\psi(x, y)$ est une fonction symétrique des deux variables x, y, on déduit

$$\psi(\alpha_1-\beta_1,\, a_1+b_1) = \psi(a+b,\, \alpha-\beta) = \psi(\alpha-\beta,\, a+b),$$

et, par conséquent, la somme des deux termes de Σ_1 qui correspondent aux deux solutions considérées est

$$\left[(-1)^{\frac{\beta-1}{2}+\frac{a-1}{2}}+(-1)^{\frac{\beta_1-1}{2}+\frac{\alpha_1-1}{2}}\right]\psi(\alpha-\beta,\, a+b).$$

D'ailleurs on déduit de l'équation (2) mise sous la forme (α), n° **24**,

$$m \equiv \frac{a+b}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2} \equiv 1 \pmod 2,$$

et des formules I du n° **22**

$$\frac{\beta_1+a_1}{2} = \frac{\beta+a}{2}+\theta\left(\frac{a+b}{2l}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \equiv \frac{\beta+a}{2}+\theta \pmod 2.$$

On a donc

$$(-1)^{\frac{\beta_1-1}{2}+\frac{a_1-1}{2}} = (-1)^\theta(-1)^{\frac{\beta-1}{2}+\frac{a-1}{2}},$$

ce qui justifie l'expression énoncée ci-dessus.

De plus, comme l'un des deux nombres $(a+b)$ ou (a_1+b_1) est de la forme $4l+2$, nous supposerons que celle des deux solutions au moyen de laquelle on exprime la somme des deux termes vérifie la condition $a+b=4l+2$.

La somme S″ peut donc s'exprimer par la formule suivante

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} S'' &= 2\Sigma_2[1+(-1)^\theta](-1)^{\frac{\beta-1}{2}+\frac{a-1}{2}}\psi(\alpha-\beta,\, a+b),\\ \theta &= E\left(\frac{\beta}{\alpha-\beta}\right),\end{aligned}\right.$$

où l'on désigne par Σ_2 une somme dont les termes correspondent à celles des solutions de l'équation (2) dans lesquelles on a

$$\alpha > \beta \qquad \text{et} \qquad a + b \equiv 2 \pmod{4}.$$

30. L'expression cherchée de la somme S'' au moyen de la somme S_1 se déduit de la dernière formule en posant, comme au n° **25**,

$$\text{(C)} \qquad a + b = 2d_1, \qquad \alpha - \beta = 2^{i+1} d_2,$$

ce qui réduit l'équation (2) à la suivante :

$$\text{(9)} \qquad m = d_1 \beta + 2^i d_2 a.$$

Au lieu de la formule (13), on aura

$$\text{(14)} \quad \left\{ \begin{aligned} S'' &= 2\Sigma'[1 + (-1)^\theta](-1)^{\frac{\beta-1}{2}+\frac{a-1}{2}} \psi(2^{i+1} d_2, 2d_1), \\ \theta &= E\left(\frac{\beta}{2^{i+1} d_2}\right), \end{aligned} \right.$$

en désignant par Σ' une somme dont les termes correspondent à celles des solutions de l'équation (9) en nombres impairs et positifs d_1, d_2, α, β, qui vérifient la condition $a < 2d_1$.

Nous avons vu plus haut (n° **25**) que, pour chaque système de valeurs des nombres d_1, $2^i d_2$ propres à vérifier l'équation

$$\text{(10)} \qquad m = d_1 \delta_1 + 2^i d_2 \delta_2,$$

l'équation (9) n'admet qu'une seule solution qui vérifie la condition $a < 2d_1$, tandis que l'équation (10) admet toutes les solutions qui se déduisent des formules

$$\delta_2 = a + \lambda\, 2d_1, \qquad \delta_1 = \beta - \lambda\, 2^{i+1} d_2,$$

en donnant à λ les valeurs $0, 1, 2, \ldots, \theta$. La somme des termes de S_1 qui correspondent à un même système de valeurs de d_1 et $2^i d_2$ est donc

$$\psi(2^{i+1} d_2, 2d_1) \Sigma(-1)^{\frac{\delta_1-1}{2}+\frac{\delta_2-1}{2}}.$$

Or on déduit des deux dernières formules

$$\frac{\delta_1 - 1}{2} + \frac{\delta_2 - 1}{2} \equiv \frac{\beta - 1}{2} + \frac{a - 1}{2} + \lambda.$$

On a donc

$$\Sigma(-1)^{\frac{\delta_1-1}{2}+\frac{\delta_2-1}{2}} = (-1)^{\frac{\beta_1-1}{2}+\frac{a-1}{2}}[1 - 1 + 1 - \ldots + (-1)^\theta].$$

La somme renfermée entre parenthèses se réduit à 1 ou à 0 suivant que θ est pair ou impair; elle est égale dans tous les cas à

$$\tfrac{1}{2}[1 + (-1)^\theta].$$

La somme S_1 peut donc s'exprimer par la formule

$$S_1 = \tfrac{1}{2}\Sigma'[1 + (-1)^\theta](-1)^{\frac{\beta-1}{2}-\frac{a-1}{2}}\psi(2^{i+1}d_2, 2d_1),$$

dans laquelle Σ' désigne une somme dont les termes correspondent, comme dans la formule (14), aux solutions de l'équation (9), sous la condition $a < 2d_1$; ce qui justifie la relation énoncée

$$S'' = 4S_1.$$

On a donc, entre les trois sommes considérées, la relation

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}+\frac{b-1}{2}}\psi(a - b, \alpha + \beta) \\ &\quad = \Sigma(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\psi(0, 2d) + 4\Sigma(-1)^{\frac{\delta_1-1}{2}+\frac{\delta_2-1}{2}}\psi(2^{i+1}d_2, 2d_1). \end{aligned}\right.$$

31. On remplit les conditions imposées à la fonction $\psi(x, y)$ en prenant

$$\psi(x, y) = f(x) + f(y),$$

pourvu que l'on désigne par $f(x)$ une fonction paire de x. Le premier membre de la formule (15) devient alors

$$\Sigma(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}+\frac{b-1}{2}}f(a - b) + \Sigma(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}+\frac{b-1}{2}}f(\alpha + \beta).$$

Mais chacune de ces sommes reste invariable lorsqu'on y échange entre elles les lettres grecques et les lettres latines correspondantes. En faisant cet échange dans la dernière somme et en ayant égard à la relation

$$(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}+\frac{b-1}{2}}=(-1)^{\frac{\beta-1}{2}+\frac{a-1}{2}},$$

on peut remplacer cette seconde somme par la suivante

$$\Sigma(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}+\frac{b-1}{2}} f(a+b),$$

de sorte que la formule (15) devient

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Sigma(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}+\frac{b-1}{2}}[f(a+b)+f(a-b)]\\ &\quad=\Sigma(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}[f(2d)+f(0)]\\ &\quad\quad+4\Sigma(-1)^{\frac{\delta_1-1}{2}+\frac{\delta_2-1}{2}}[f(2d_1)+f(2^{i+1}d_2|.\end{aligned}\right.$$

On peut prendre $f(x)=\cos tx$; on obtient ainsi la formule

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} &2\Sigma\left[\Sigma(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}\cos at\,\Sigma(-1)^{\frac{b-1}{2}}\cos bt\right]\\ &\quad=\Sigma(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}(1+\cos 2dt)\\ &\quad\quad+4\Sigma\left[\Sigma(-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}}\Sigma(-1)^{\frac{\delta_1-1}{2}}\cos 2d_1 t\right]\\ &\quad\quad+4\Sigma\left[\Sigma(-1)^{\frac{\delta_1-1}{2}}\Sigma(-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}}\cos(2^{i+1}d_2 t\right].\end{aligned}\right.$$

La triple somme du premier membre se rapporte aux trois équations

$$2m=m'+m'',\qquad m'=a\alpha,\qquad m''=b\beta;$$

les deux sommes triples du second membre correspondent aux trois équations

$$m=m_1+2^i m_2,\qquad m_1=d_1\delta_1,\qquad m_2=d_2\delta_2.$$

Les sommations relatives à ces équations étant séparées, on pourra les effectuer pour chaque valeur de t. Ainsi, pour $t=0$, on a la relation

$$\Sigma\rho(m')\rho(m'')=\Sigma\rho(m)+4\Sigma\rho(m_1)\rho(m_2),$$

où l'on désigne par $\rho(m)$ le nombre des décompositions de $2m$ en sommes de deux carrés impairs.

Les formules établies dans ce Mémoire sont susceptibles d'un grand nombre d'applications. Je donnerai dans un prochain Mémoire la suite des applications aux formes quadratiques, par lesquelles j'ai terminé le Mémoire cité du 19 avril 1885 (*Atti dell' Accademia de' Nuovi Lincei*).