JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PH. GILBERT

Sur les composantes des accélérations d'ordre quelconque suivant trois directions rectangulaires variables

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 4 (1888), p. 465-473.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1888_4_4__465_0>

Sur les composantes des accélérations d'ordre quelconque suivant trois directions rectangulaires variables;

PAR M. PH. GILBERT.

Ce problème, en ce qui concerne l'accélération du *second* ordre et ses projections sur la tangente, la normale principale et la *binormale* à la trajectoire, a été traité géométriquement par M. Resal (1) et par M. Schell (2); pour les accélérations d'ordre quelconque, analytiquement par Bouquet (3) et par Somoff (4). La méthode facile et sûre que nous proposons ici s'applique à ce problème et à d'autres plus généraux.

1. Considérons un point mobile M, et soit M_n son *index* d'ordre quelconque n par rapport à une origine fixe O, c'est-à-dire que le rayon vecteur OM_n représente en grandeur et en direction l'accélération d'ordre n, j_n, du point M.

(1) *Traité de Cinématique pure*, p. 269.

(2) *Theorie der Bewegung und Kräfte*, t. I, p. 544.

(3) *Annales de l'École Normale*, p. 147; 1874.

(4) *Mémoire sur les accélérations de divers ordres* (*Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, 7e série, t. VIII).

Soient

$Oxyz$ un système d'axes rectangulaires mobile suivant une loi quelconque autour du point O;

p, q, r les composantes de la rotation de ce système suivant les directions Ox, Oy, Oz;

j_{nx}, j_{ny}, j_{nz} les composantes de l'accélération j_n, qui sont en même temps les coordonnées de M_n.

La vitesse absolue du point M_n représente, en grandeur et en direction, l'accélération d'ordre $n+1$ du point M; or, cette vitesse est la résultante de la vitesse *relative* de M_n par rapport aux axes mobiles, et de sa vitesse d'*entraînement* due à la rotation du système $Oxyz$ autour du point O. Il en résulte immédiatement les formules générales

$$(2)\qquad \begin{cases} j_{n+1,x} = \dfrac{dj_{nx}}{dt} + qj_{nz} - rj_{ny}, \\ j_{n+1,y} = \dfrac{dj_{ny}}{dt} + rj_{nx} - pj_{nz}, \\ j_{n+1,z} = \dfrac{dj_{nz}}{dt} + pj_{ny} - qj_{nx}, \end{cases}$$

qui servent de base à tout ce qui suit.

2. Prenons d'abord, pour la direction Ox, celle du rayon vecteur $OM = u$ du point mobile; pour Oz la normale à la surface conique décrite par ce rayon vecteur, élevée du côté du plan tangent vers lequel le cône tourne sa convexité; pour Oy la perpendiculaire au plan xz, menée du côté où la rotation de Oz vers Ox paraît se faire de gauche à droite. Si nous nommons ω la vitesse angulaire du rayon u autour de Oz, prise avec le signe $+$ ou le signe $-$ selon qu'elle est dirigée de gauche à droite ou de droite à gauche par rapport à Oz; R le rayon de courbure de la section du cône normale à OM à la distance 1 du point O, on verra sans peine que l'on a ici

$$p = -\frac{\omega}{R}, \qquad q = 0, \qquad r = \omega.$$

Les formules (1) deviendront

$$(2)\qquad \begin{cases} j_{n+1,x} = \dfrac{dj_{nx}}{dt} - \omega j_{ny}, \\ j_{n+1,y} = \dfrac{dj_{ny}}{dt} + \omega j_{nx} + \dfrac{\omega}{R} j_{nz}, \\ j_{n+1,z} = \dfrac{dj_{nz}}{dt} - \dfrac{\omega}{R} j_{ny}, \end{cases}$$

et permettront de calculer de proche en proche les composantes cherchées. En effet, pour $n = 0$, j_n se confond avec la vitesse du point M; on a, comme on sait,

$$j_{0x} = \frac{du}{dt}, \qquad j_{0y} = \omega u, \qquad j_{0z} = 0;$$

les équations (2) donneront les composantes de l'accélération j_1 ou j du premier ordre, savoir

$$(3)\qquad \begin{cases} j_x = \dfrac{d^2 u}{dt^2} - \omega^2 u, \\ j_y = 2\omega \dfrac{du}{dt} + u \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{1}{u}\dfrac{d.\omega u^2}{dt}, \\ j_z = -\dfrac{\omega^2 u}{R}. \end{cases}$$

On déduirait de celles-ci les composantes j_{2x}, j_{2y}, j_{2z} de la suraccélération, et ainsi de suite. Ces formules sont commodes lorsque le mobile reste sur une surface conique donnée, par exemple, sur un cône de révolution dont le sommet est O et l'angle d'ouverture 2α; on a alors

$$R = \tang\alpha.$$

Si le mouvement a lieu dans un plan, $R = \infty$ et j_z est nul.

2. Comme deuxième application, cherchons les composantes de l'accélération j_{n+1} parallèlement à la vitesse, à la normale principale et à la binormale. Prenant respectivement, dans les équations (1), les directions Ox, Oy et Oz parallèles à ces trois directions, nous remarquerons que l'intersection de deux plans osculateurs infiniment voisins coïncide avec la tangente à la trajectoire, en sorte que, pour amener le trièdre $Oxyz$ dans la position infiniment voisine, on le fera tourner autour de l'arête Ox d'un angle égal à l'angle de torsion $\frac{ds}{\mathrm{T}}$ et autour de l'arête Oz d'un angle égal à l'angle de contingence $\frac{ds}{\mathrm{R}}$ de la trajectoire. On aura donc, v étant la vitesse de M,

$$p = \frac{v}{\mathrm{T}}, \qquad q = 0, \qquad r = \frac{v}{\mathrm{R}},$$

et les formules (1) nous donneront

$$(4) \qquad \begin{cases} j_{n+1,x} = \dfrac{dj_{nx}}{dt} - \dfrac{v}{\mathrm{R}} j_{ny}, \\[2mm] j_{n+1,y} = \dfrac{dj_{ny}}{dt} + \dfrac{v}{\mathrm{R}} j_{nx} - \dfrac{v}{\mathrm{T}} j_{nz}, \\[2mm] j_{n+1,z} = \dfrac{dj_{nz}}{dt} + \dfrac{v}{\mathrm{T}} j_{ny}. \end{cases}$$

Ces formules, que Somoff a obtenues par une voie beaucoup moins simple, serviront à passer des composantes tangentielle, normale et binormale de l'accélération j_n à celles de l'accélération d'ordre $n+1$. Si l'on part de $n = 0$, $j_0 = v$, on a évidemment

$$j_{0x} = v, \qquad j_{0y} = 0, \qquad j_{0z} = 0;$$

d'où, par les formules (4),

$$j_{1x} = \frac{dv}{dt}, \qquad j_{1y} = \frac{v^2}{\mathrm{R}}, \qquad j_{1z} = 0,$$

ce qui donne les composantes connues de l'accélération. De même, on trouvera pour les composantes de la suraccélération

$$\begin{aligned} j_{2x} &= \frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{v^3}{\mathrm{R}^2}, \\ j_{2y} &= \frac{3v}{\mathrm{R}} \frac{dv}{dt} - \frac{v^3}{\mathrm{R}^2} \frac{d\mathrm{R}}{ds}, \\ j_{2z} &= \frac{v^3}{\mathrm{RT}}. \end{aligned}$$

Ce sont les formules dues à M. Resal. On trouve de même, en faisant $n = 2$ dans les formules (4) et observant que $\frac{ds}{dt} = v$,

$$j_{3x} = \frac{d^3 v}{dt^3} - \frac{6v^2}{R^2}\frac{dv}{dt} + \frac{3v^4}{R^3}\frac{dR}{ds},$$

$$j_{3y} = \frac{4v}{R}\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{3}{R}\frac{dv^2}{dt^2} - \frac{6v^2}{R^2}\frac{dv}{dt}\frac{dR}{ds} - \frac{v^4}{R^3}\left(1 + \frac{R^2}{T^2} - \frac{dR^2}{ds^2} + R\frac{d^2 R}{ds^2}\right),$$

$$j_{3z} = \frac{6v^2}{RT}\frac{dv}{dt} - \frac{v^4}{RT}\left(\frac{2}{R}\frac{dR}{ds} + \frac{1}{T}\frac{dT}{ds}\right),$$

et ainsi de suite. Lorsqu'on suppose le mouvement uniforme, ce qu'on peut toujours faire lorsqu'on a en vue les applications géométriques, $\frac{dv}{dt}, \frac{d^2 v}{dt^2}, \cdots$ s'annulent, ce qui simplifie beaucoup ces formules.

5. Comme dernière application des équations (1), supposons le point M déterminé par un système de coordonnées curvilignes composé de trois groupes de surfaces orthogonales, caractérisés par les paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, et cherchons les composantes de j_{n+1} parallèlement aux normales Mn_1, Mn_2, Mn_3 aux trois surfaces qui se coupent en M, menées dans le sens où les paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ vont en croissant.

Nous désignerons par R_{ik} le rayon de courbure de la section principale de la surface λ_i qui est tangente à la direction Mn_k, pris avec le signe *positif* ou *négatif*, selon qu'il est dirigé dans le sens où λ_i va en *décroissant* ou en *croissant*.

Le trièdre O123 ayant ses arêtes respectives parallèles aux normales Mn_1, Mn_2, Mn_3, pour trouver les composantes p, q, r de sa rotation suivant O1, O2, O3, il suffira d'observer : 1° que le déplacement infiniment petit du point M dans le temps dt peut être regardé comme résultant de trois déplacements simultanés ds_1, ds_2, ds_3 suivant les directions Mn_1, Mn_2, Mn_3; 2° que, dans chacun d'eux, par exemple dans le déplacement ds_1, en vertu du théorème de Dupin, la normale à la surface λ_2 reste dans le plan tangent à la surface λ_3, et la normale à la surface λ_3 dans le plan tangent à la surface λ_2. Il en résulte que le déplacement angulaire du trièdre $Mn_1n_2n_3$ résulte d'une rotation autour de Mn_3, égale à $-\frac{ds_1}{R_{21}}$, et d'une rotation autour de Mn_2 égale à

$\frac{ds_1}{R_{31}}$, eu égard à la convention sur le signe de R_{ik} et à la disposition des arêtes Mn_1, Mn_2, Mn_3. En opérant de la même manière sur les deux autres mouvements ds_2, ds_3 du point M, désignant par v_1, v_2, v_3 les vitesses du point M parallèles aux directions O1, O2, O3, on aura évidemment, pour les valeurs cherchées de p, q, r,

$$p = -\frac{v_2}{R_{32}} + \frac{v_3}{R_{23}}, \qquad q = -\frac{v_3}{R_{13}} + \frac{v_1}{R_{31}}, \qquad r = -\frac{v_1}{R_{21}} + \frac{v_2}{R_{12}},$$

et les formules (1) nous donneront, pour les composantes cherchées de l'accélération j_{n+1},

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} j_{n+1,1} &= \frac{dj_{n1}}{dt} + \left(\frac{v_1}{R_{31}} - \frac{v_3}{R_{13}}\right) j_{n3} - \left(\frac{v_2}{R_{12}} - \frac{v_1}{R_{21}}\right) j_{n2}, \\ j_{n+1,2} &= \frac{dj_{n2}}{dt} + \left(\frac{v_2}{R_{12}} - \frac{v_1}{R_{21}}\right) j_{n1} - \left(\frac{v_3}{R_{23}} - \frac{v_2}{R_{32}}\right) j_{n3}, \\ j_{n+1,3} &= \frac{dj_{n3}}{dt} + \left(\frac{v_3}{R_{23}} - \frac{v_2}{R_{32}}\right) j_{n2} - \left(\frac{v_1}{R_{31}} - \frac{v_3}{R_{13}}\right) j_{n1}. \end{aligned} \right.$$

Pour $n = 0$, j_{n1}, j_{n2}, j_{n3} se réduisent respectivement aux vitesses v_1, v_2, v_3, et l'on obtient les composantes de l'accélération j_1 ou j du premier ordre, données par Lamé, mais par une voie beaucoup plus longue,

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} j_1 &= \frac{dv_1}{dt} + \left(\frac{v_1}{R_{31}} - \frac{v_3}{R_{13}}\right) v_3 - \left(\frac{v_2}{R_{12}} - \frac{v_1}{R_{21}}\right) v_2, \\ j_2 &= \frac{dv_2}{dt} + \left(\frac{v_2}{R_{12}} - \frac{v_1}{R_{21}}\right) v_1 - \left(\frac{v_3}{R_{23}} - \frac{v_2}{R_{32}}\right) v_3, \\ j_3 &= \frac{dv_3}{dt} + \left(\frac{v_3}{R_{23}} - \frac{v_2}{R_{32}}\right) v_2 - \left(\frac{v_1}{R_{31}} - \frac{v_3}{R_{13}}\right) v_1. \end{aligned} \right.$$

On en déduirait, en faisant $n = 1$ dans les équations (5), les composantes de l'accélération du second ordre, et ainsi de suite.

On peut, dans les équations (5), introduire au lieu des vitesses v et des rayons R les paramètres des surfaces orthogonales, en désignant par h_1, h_2, h_3 les *paramètres différentiels* du premier ordre définis par l'équation

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial z}\right)^2}.$$

On a les relations connues (¹)

$$ds_i = \frac{d\lambda_i}{h_i}, \qquad \frac{1}{R_{ik}} = -\frac{h_i}{h_k}\frac{\partial h_k}{\partial\lambda_i},$$

et de simples substitutions donneront

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
\dot{j}_{n+1,1} &= \frac{dj_{n1}}{dt} + \left(\frac{h_1}{h_2^2}\frac{\partial h_2}{\partial\lambda_1}\frac{d\lambda_2}{dt} - \frac{h_2}{h_1^2}\frac{\partial h_1}{\partial\lambda_2}\frac{d\lambda_1}{dt}\right)\dot{j}_{n2} \\
&\quad + \left(\frac{h_1}{h_3^2}\frac{\partial h_3}{\partial\lambda_1}\frac{d\lambda_3}{dt} - \frac{h_3}{h_1^2}\frac{\partial h_1}{\partial\lambda_3}\frac{d\lambda_1}{dt}\right)\dot{j}_{n3}, \\
\dot{j}_{n+1,2} &= \frac{dj_{n2}}{dt} + \left(\frac{h_2}{h_3^2}\frac{\partial h_3}{\partial\lambda_2}\frac{d\lambda_3}{dt} - \frac{h_3}{h_2^2}\frac{\partial h_2}{\partial\lambda_3}\frac{d\lambda_2}{dt}\right)\dot{j}_{n3} \\
&\quad + \left(\frac{h_2}{h_1^2}\frac{\partial h_1}{\partial\lambda_2}\frac{d\lambda_1}{dt} - \frac{h_1}{h_2^2}\frac{\partial h_2}{\partial\lambda_1}\frac{d\lambda_2}{dt}\right)\dot{j}_{n1}, \\
\dot{j}_{n+1,3} &= \frac{dj_{n3}}{dt} + \left(\frac{h_3}{h_1^2}\frac{\partial h_1}{\partial\lambda_3}\frac{d\lambda_1}{dt} - \frac{h_1}{h_3^2}\frac{\partial h_3}{\partial\lambda_1}\frac{d\lambda_3}{dt}\right)\dot{j}_{n1} \\
&\quad + \left(\frac{h_3}{h_2^2}\frac{\partial h_2}{\partial\lambda_3}\frac{d\lambda_2}{dt} - \frac{h_2}{h_3^2}\frac{\partial h_3}{\partial\lambda_2}\frac{d\lambda_3}{dt}\right)\dot{j}_{n2}.
\end{aligned}\right.$$

Pour $n = 0$, on retrouverait les formules de Guiraudet (²) et Lamé (³).

4. Nous appliquerons les formules (6) au système de coordonnées sphériques composé des sphères de rayon r, des cônes de révolution dont l'ouverture est 2θ, et des plans passant par l'axe des cônes et faisant un angle ψ avec un plan fixe. Attribuant l'indice 1 aux sphères, l'indice 2 aux cônes, l'indice 3 aux plans, on trouvera ici, par des con-

(¹) LAMÉ, *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, p. 51.

(²) *Mémoires de la Société des Sciences de Lille*, 1865.

(³) *Leçons sur les coordonnées curvilignes.*

sidérations géométriques directes,

$$ds_1 = dr, \qquad ds_2 = r\,d\theta, \qquad ds_3 = r \sin\theta\, d\psi,$$

ce qui donnera les valeurs de v_1, v_2, v_3; puis

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{r}, \qquad \frac{1}{R_{13}} = \frac{1}{r}, \qquad \frac{1}{R_{21}} = 0,$$
$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{r \operatorname{tang}\theta}, \qquad \frac{1}{R_{31}} = 0, \qquad \frac{1}{R_{32}} = 0.$$

Substituant dans les équations (5), on trouvera

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} j_{n+1,r} &= \frac{dj_{nr}}{dt} - j_{n\theta}\frac{d\theta}{dt} - j_{n\psi}\sin\theta\frac{d\psi}{dt}, \\ j_{n+1,\theta} &= \frac{dj_{n\theta}}{dt} + j_{nr}\frac{d\theta}{dt} - j_{n\psi}\cos\theta\frac{d\psi}{dt}, \\ j_{n+1,\psi} &= \frac{dj_{n\psi}}{dt} + j_{nr}\sin\theta\frac{d\psi}{dt} + j_{n\theta}\cos\theta\frac{d\psi}{dt}. \end{aligned} \right.$$

Pour $n = 0$, on a

$$j_{0r} = v_r = \frac{dr}{dt}, \qquad j_{0\theta} = r\frac{d\theta}{dt}, \qquad j_{0\psi} = r\sin\theta\frac{d\psi}{dt},$$

d'où

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} j_r &= \frac{d^2 r}{dt^2} - r\frac{d\theta^2}{dt^2} - r\sin^2\theta\frac{d\psi^2}{dt^2}, \\ j_\theta &= r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r\sin\theta\cos\theta\frac{d\psi^2}{dt^2}, \\ j_\psi &= r\sin\theta\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2\sin\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\psi}{dt} + 2r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{d\psi}{dt}, \end{aligned} \right.$$

ce qui s'accorde avec les formules de Guiraudet et Lamé. De même, on trouverait, pour les composantes sphériques de la suraccélération, en faisant $n=1$ dans les formules (8) et réduisant,

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}
j_{2r} &= \frac{d^3 r}{dt^3} - 3\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{dt}\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)\\
&\quad - 3\sin\theta\frac{d\psi^2}{dt^2}\frac{d.r\sin\theta}{dt} - 3r\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt}\frac{d^2\psi}{dt^2},\\
j_{2\theta} &= r\frac{d^3\theta}{dt^3} + 3\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\\
&\quad - 3r\sin\theta\cos\theta\frac{d\psi}{dt}\frac{d^2\psi}{dt^2} - r\frac{d\theta^3}{dt^3} - 3\cos\theta\frac{d\psi^2}{dt^2}\frac{d.r\sin\theta}{dt},\\
j_{2\psi} &= r\sin\theta\frac{d^3\psi}{dt^3} + 3\frac{d^2\psi}{dt^2}\frac{d.r\sin\theta}{dt}\\
&\quad + 3\frac{d\psi}{dt}\left(\sin\theta\frac{d^2 r}{dt^2} + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) - r\sin\theta\frac{d\psi^3}{dt^3}\\
&\quad + 6\cos\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\frac{d\psi}{dt} - 3r\sin\theta\frac{d\psi}{dt}\frac{d\theta^2}{dt^2}.
\end{aligned}\right.$$

Les formules se compliquent rapidement. Lorsque, dans les équations (8), on suppose ψ constamment égal à zéro, on obtient les formules données par M. Laisant ([1]). L'application aux coordonnées elliptiques ne souffre aucune difficulté, mais elle ne nous a pas paru conduire à des résultats spécialement intéressants.

([1]) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 496; 1878.