JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MARTIN KRAUSE

Sur les fonctions quadruplement périodiques de deuxième et de troisième espèce

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 3 (1887), p. 87-107.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1887_4_3__87_0>

Sur les fonctions quadruplement périodiques de deuxième et de troisième espèce;

PAR M. MARTIN KRAUSE,
Professeur à l'Université de Rostock (Allemagne).

Extrait d'une Lettre adressée à M. HERMITE.

La lecture de votre Ouvrage, si important et si intéressant : *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, m'a fait naître la pensée de faire des recherches analogues dans la théorie des fonctions de deux variables. Je prends la liberté de vous communiquer quelques-uns des résultats que j'y ai trouvés. Le point de vue d'où je sortais était d'établir des fonctions fondamentales, analogues à celles que vous avez trouvées dans la théorie des fonctions elliptiques; puis de révéler leurs qualités principales et de montrer de quelle manière une multitude infinie de relations fonctionnelles et de systèmes d'équations différentielles dont on connaît les intégrales peut être établie à l'aide de ces fonctions. Il est à espérer que ces systèmes d'équations différentielles pourront être employés aussi dans les Mathématiques appliquées, et qu'ils produiront des fruits abondants. Mais, dans cette occasion, je n'y tiendrai pas, je me réserve plutôt cette recherche pour un autre temps.

La méthode que je vais employer diffère en ce sens de la vôtre qu'elle repose sur la théorie de la transformation des fonctions thêta, tandis que la vôtre se fonde sur des théorèmes connus des fonctions doublement périodiques.

1. Soit $F(v_1, v_2)$ une fonction entière et transcendante des deux variables v_1 et v_2 qui satisfait aux équations

$$
(1)\quad \begin{cases}
F(v_1+1, v_2) = (-1)^{g_1} F(v_1, v_3) e^{l_1 \pi i}, \\
F(v_1, v_2+1) = (-1)^{g_2} F(v_1, v_3) e^{l_2 \pi i}, \\
F(v_1+\tau_{11}, v_2+\tau_{12}) = (-1)^{h_1} F(v_1, v_2) e^{-\pi i n(2v_1+\tau_{11})-(2w_1-l_1\pi_{11}-l_2\tau_{12})\pi i}, \\
F(v_1+\tau_{12}, v_2+\tau_{22}) = (-1)^{h_2} F(v_1, v_2) e^{-\pi i n(2v_2+\tau_{22})-(2w_2-l_1\tau_{12}-l_2\tau_{22})\pi i}.
\end{cases}
$$

Dans ces équations les quantités n, g_1, g_2, h_1, h_2 sont des nombres positifs et entiers, tandis que les quantités l_1, l_2, w_1, w_2 peuvent être choisies arbitrairement.

Désignons l'expression

$$
\begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}
$$

sous le nom de *caractéristique* de la fonction proposée.

Il s'ensuit alors qu'une telle fonction contient n^2 coefficients entièrement indépendants ou aussi qu'entre n^2+1 fonctions qui satisfont aux mêmes équations il peut exister au moins une relation linéaire. Il suffit donc de construire n^2 fonctions du même genre qui sont linéairement indépendantes l'une de l'autre pour épuiser toute l'infinie multitude des fonctions possibles. Il y a dans le choix de ces fonctions une très grande variété.

Introduisons la notation des doubles parenthèses, c'est-à-dire posons, au lieu de $\vartheta_\alpha(v_1, v_2)$, $\vartheta_\alpha((v))$; nous pouvons choisir, par exemple, comme fonctions fondamentales les quantités

$$
\vartheta_\alpha((v))^a \vartheta_\beta((v))^b \vartheta_\gamma((v))^c \vartheta_\delta((v))^d \vartheta_\varepsilon((v+w)) e^{(l_1 v_1 + l_2 v_2)\pi i}.
$$

Ici les nombres a, b, c, d satisfont à l'équation

$$
a+b+c+d = n-1,
$$

tandis que la somme des caractéristiques des facteurs du produit

$$\mathfrak{S}_\alpha((v))^a\,\mathfrak{S}_\beta((v))^b\,\mathfrak{S}_\gamma((v))^c\,\mathfrak{S}_\delta((v))^d$$

et de la fonction $\mathfrak{S}_\varepsilon((v))$ est égale à la caractéristique de la fonction proposée.

Posons ensuite

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{S}_\varepsilon((v+w))}{\mathfrak{S}_\varepsilon((v))}\,e^{(l_1v_1+l_2v_2)\pi i} = \Phi_\varepsilon(v_1, v_2, w_1, w_2, l_1, l_2) \\ \quad\text{ou aussi} \\ \qquad\qquad = \Phi_\varepsilon((v, w, l)). \end{cases}$$

Il est évident que nous pouvons choisir comme grandeurs fondamentales deuxièmement les suivantes :

$$\mathfrak{S}_5((v))^{r+1}\,\mathfrak{S}_\alpha((v))^a\,\mathfrak{S}_\beta((v))^b\,\mathfrak{S}_\gamma((v))^c\,\mathfrak{S}_\delta((v))^d\,\frac{\partial^r\Phi_\varepsilon((v, w, l))}{\partial v_1^s\,\partial v_2^{r-s}},$$

pourvu que les nombres a, b, c, d, r satisfassent à l'équation

$$a+b+c+d=n-r-1$$

et que les caractéristiques aient les mêmes qualités qu'auparavant.

Parmi les fonctions ci-devant définies prenons-en n^2 linéairement indépendantes; toutes les autres du même genre peuvent être exprimées linéairement par celles-ci. Si nous considérons les fonctions thêta primitives comme des quantités connues, il est évident que nous pouvons choisir comme fonctions fondamentales les quantités

$$\Phi_\varepsilon((v, w, l)) = \frac{\mathfrak{S}_\varepsilon((v+w))\,e^{(l_1v_1+l_2v_2)\pi i}}{\mathfrak{S}_\varepsilon((v))}.$$

Ces fonctions fondamentales satisfont aux équations

$$(3)\qquad \begin{cases} \Phi_\varepsilon(v_1+1, v_2, w_1, w_2, l_1, l_2) = (-1)^{g_1}\Phi_\varepsilon((v, w, l))\,e^{l_1\pi i}, \\ \Phi_\varepsilon(v_1, v_2+1, w_1, w_2, l_1, l_2) = (-1)^{g_2}\Phi_\varepsilon((v, w, l))\,e^{l_2\pi i}, \\ \Phi_\varepsilon(v_1+\tau_{11}, v_2+\tau_{12}, w_1, w_2, l_1, l_2) \\ \quad = (-1)^{h_1}\Phi_\varepsilon((v, w, l))\,e^{-\pi i(2w_1-l_1\tau_{11}-l_2\tau_{12})}, \\ \Phi_\varepsilon(v_1+\tau_{12}, v_2+\tau_{22}, w_1, w_2, l_1, l_2) \\ \quad = (-1)^{h_2}\Phi_\varepsilon((v, w, l))\,e^{-\pi i(2w_2-l_1\tau_{12}-l_2\tau_{22})} \end{cases}$$

et deviennent infinies pour toutes les valeurs de v_1 et v_2 pour lesquelles la fonction $\vartheta_5((v))$ devient égale à zéro. Mais ces seize fonctions ne sont pas indépendantes non plus l'une de l'autre, il suffit au contraire d'en connaître une seule pour les connaître toutes, toujours supposé que les fonctions thêta primitives soient données. En effet, cela résulte des formules du théorème d'addition dont nous voulons citer ici au moins les quatre suivantes

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
\vartheta_5\vartheta_5 P_5 Q_5 &= p_5 p_5 q_5 q_5 + p_1 p_1 q_1 q_1 \\
&\quad + p_3 p_3 q_3 q_3 + p_{13} p_{13} q_{13} q_{13}, \\
\vartheta_4\vartheta_{14} P_4 Q_5 &= p_5 p_4 q_4 q_{14} + p_0 p_{01} q_{04} q_{23} \\
&\quad - p_2 p_{12} q_{24} q_{03} - p_{02} p_{34} q_{13} q_3, \\
\vartheta_5\vartheta_{01} P_{01} Q_5 &= p_5 p_{01} q_5 q_{01} - p_1 p_0 q_1 q_0 \\
&\quad + p_3 p_{24} q_3 q_{24} - p_{13} p_{03} q_{13} q_{03}, \\
\vartheta_5\vartheta_0 P_0 Q_5 &= p_5 p_0 q_5 q_0 + p_1 p_{01} q_1 q_{01} \\
&\quad + p_3 p_{03} q_3 q_{03} + p_{13} p_{24} q_{13} q_{24}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ici l'on a posé

$$
\begin{aligned}
P_\alpha &= \vartheta_\alpha((v + w)), & Q_\alpha &= \vartheta_\alpha((v - w)), \\
p_\alpha &= \vartheta_\alpha((v)), & q_\alpha &= \vartheta_\alpha((w)).
\end{aligned}
$$

Ces formules se trouvent dans un travail de Kœnigsberger dans le *Journal de Crelle*, t. 64, et dans l'Ouvrage de l'auteur : *Die Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung;* Leipzig, 1886.

Prenons comme exemple la fonction

$$
(5)\quad F(v_1, v_2) = \vartheta_5(v_1 + a_1, v_2 + a_2)\,\vartheta_5(v_1 + b_1, v_2 + b_2\, e^{(l_1 v_1 + l_2 v_2)\pi i}.
$$

Alors il s'ensuit que nous pouvons poser

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{F(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)} &= c_1 \vartheta_5(v_1, v_2)\Phi_5((v, w, l)) \\
&\quad + c_2 \vartheta_1(v_1, v_2)\Phi_1((v, w, l)) \\
&\quad + c_3 \vartheta_{01}(v_1, v_2)\Phi_{01}((v, w, l)) \\
&\quad + c_4 \vartheta_0(v_1, v_2)\Phi_0((v, w, l)).
\end{aligned}
\right.
$$

Ici l'on a posé

$$w_1 = a_1 + b_1, \qquad w_2 = a_2 + b_2.$$

La détermination des constantes peut être donnée à l'aide de la substitution de demi-périodes en substituant, au lieu de

$$\vartheta_5((v)),\quad \vartheta_1((v)),\quad \vartheta_{01}((v)),\quad \vartheta_0((v)),$$

successivement

$$\begin{array}{llll}
i\vartheta_3((v)), & \vartheta_{13}((v)), & i\vartheta_{24}((v)), & \vartheta_{03}((v)),\\
i\vartheta_{13}((v)), & -i\vartheta_3((v)), & i\vartheta_{03}((v)), & i\vartheta_{24}((v)),\\
i\vartheta_{24}((v)), & i\vartheta_{03}((v)), & i\vartheta_3((v)), & i\vartheta_{13}((v)),\\
\vartheta_{03}((v)), & -i\vartheta_{24}((v)), & \vartheta_{13}((v)), & i\vartheta_3((v)).
\end{array}$$

Alors nous obtiendrons la formule

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\vartheta_{03}\vartheta_{03}((v))\,F(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)} &= \vartheta_{03}((a))\vartheta_{03}((b))\vartheta_5((v))\Phi_5((v, w, l))\\
&+ \vartheta_{24}((a))\vartheta_{24}((b))\vartheta_1((v))\Phi_1((v, w, l))\\
&+ \vartheta_{13}((a))\vartheta_{13}((b))\vartheta_{01}((v))\,\Phi_{01}((v, w, l))\\
&- \vartheta_3((a))\vartheta_3((b))\vartheta_0((v))\Phi_0((v, w, l)),
\end{aligned}\right.$$

ou aussi, en employant les notations usuelles,

$$\begin{aligned}
&\vartheta_{03}\vartheta_{03}((w))\vartheta_5((v+a))\vartheta_5((v+b))\\
&\quad = \vartheta_{03}((a))\vartheta_{03}((b))\vartheta_5((v))\vartheta_5((v+w))\\
&\quad + \vartheta_{24}((a))\vartheta_{24}((b))\vartheta_1((v))\vartheta_1((v+w))\\
&\quad + \vartheta_{13}((a))\vartheta_{13}((b))\vartheta_{01}((v))\vartheta_{01}((v+w))\\
&\quad - \vartheta_3((a))\vartheta_3((b))\vartheta_0((v))\vartheta_0((v+w)).
\end{aligned}$$

Deuxièmement nous pouvons poser

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{F(v_1, v_2)}{\mathfrak{S}_5(v_1, v_2)} &= c_1\, \mathfrak{S}_5(v_1, v_2)\, \Phi_5((v, w, l)) \\
&+ c_2\, \mathfrak{S}_4(v_1, v_2)\, \Phi_4((v, w, l)) \\
&+ c_3\, \mathfrak{S}_{01}(v_1, v_2)\, \Phi_{01}((v, w, l)) \\
&+ c_4\, \mathfrak{S}_5(v_1, v_2)^2\, \frac{\partial\, \Phi_5((v, w, l))}{\partial v_\varepsilon}
\end{aligned}
\right.
$$

$$(\varepsilon = 1, 2).$$

En substituant des demi-périodes, nous obtenons les formules

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
N c_1 &= \mathfrak{S}_{03}((a))\, \mathfrak{S}_{03}((b))\, \mathfrak{S}'_3(v_\varepsilon)_0\, \mathfrak{S}_3((w)) \\
&\quad + \mathfrak{S}_3((a))\, \mathfrak{S}_3((b))\, \mathfrak{S}_{03}\, \mathfrak{S}_{03}((w)) \left[l_\varepsilon \pi i + \frac{\partial \log \mathfrak{S}_{03}((w))}{\partial w} \right], \\
N c_2 &= \mathfrak{S}_{24}((a))\, \mathfrak{S}_{24}((b))\, \mathfrak{S}'_3(v_\varepsilon)_0\, \mathfrak{S}_3((w)) \\
&\quad - \mathfrak{S}_3((a))\, \mathfrak{S}_3((b))\, \mathfrak{S}'_{24}(v_\varepsilon)_0\, \mathfrak{S}_{24}((w)), \\
N c_3 &= \mathfrak{S}_{13}((a))\, \mathfrak{S}_{13}((b))\, \mathfrak{S}'_3(v_\varepsilon)_0\, \mathfrak{S}_3((w)) \\
&\quad - \mathfrak{S}_3((a))\, \mathfrak{S}_3((b))\, \mathfrak{S}'_{13}(v_\varepsilon)_0\, \mathfrak{S}_{13}((w)), \\
N c_4 &= - \mathfrak{S}_3((a))\, \mathfrak{S}_3((b))\, \mathfrak{S}_{03}\, \mathfrak{S}_{03}((w)), \\
N &= \mathfrak{S}_3((w))\, \mathfrak{S}'_3(v_\varepsilon)_0\, \mathfrak{S}_{03}\, \mathfrak{S}_{03}((w)).
\end{aligned}
\right.
$$

Ici l'on a posé

$$\mathfrak{S}'_\alpha(v_\varepsilon)_0 = \left[\frac{\partial \mathfrak{S}_\alpha(v_1, v_2)}{\partial v_\varepsilon} \right]_{v_1 = v_2 = 0}.$$

Enfin nous voulons poser

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{F(v_1, v_2)}{\mathfrak{S}_5(v_1, v_2)} &= c_1\, \mathfrak{S}_5(v_1, v_2)\, \Phi_5((v, w, l)) \\
&+ c_2\, \mathfrak{S}_4(v_1, v_2)\, \Phi_4((v, w, l)) \\
&+ c_3\, \mathfrak{S}_5(v_1, v_2)^2\, \frac{\partial \Phi_5((v, w, l))}{\partial v_1} \\
&+ c_4\, \mathfrak{S}_5(v_1, v_2)^2\, \frac{\partial \Phi_5((v, w, l))}{\partial v_2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Pour les constantes s'obtiennent les valeurs

$$
(11)\quad\left\{
\begin{aligned}
&c_1\vartheta_3((w))\vartheta_{13}((w))(13,3)\\
&\quad=\vartheta_{13}((a))\vartheta_{13}((b))\vartheta_3((w))\vartheta'_3(v_1)_0\\
&\quad-\vartheta_3((a))\vartheta_3((b))\vartheta_{13}((w))\vartheta'_{13}(v_1)_0,\\
&c_3\vartheta_3((w))\vartheta_{13}((w))(13,3)\\
&\quad=\vartheta_3((a))\vartheta_3((b))\vartheta_{13}((w))\vartheta'_{13}(v_2)_0\\
&\quad-\vartheta_{13}((a))\vartheta_{13}((b))\vartheta_3((w))\vartheta'_3(v_2)_0,\\
&c_2\vartheta_{03}\vartheta_{03}((w))\\
&\quad=\vartheta_{24}((a))\vartheta_{24}((b))-\vartheta_{24}((w))[c_3\vartheta'_{24}(v_1)_0+i_1\vartheta'_{24}(v_2)_0],\\
&c_1\vartheta_{03}\vartheta_{03}((w))\\
&\quad=\vartheta_{03}((a))\vartheta_{03}((b))\\
&\quad-\vartheta_{03}\vartheta_{03}((w))\left[c_3\left(l_1\pi i+\frac{\partial\log\vartheta_3((w))}{\partial w_1}\right)\right]\\
&\quad+c_1\left[l_2\pi i+\frac{\partial\log\vartheta_3((w))}{\partial w_2}\right],\\
&\qquad\qquad\qquad[(13,3)=\pi^2\vartheta_3\vartheta_{34}\vartheta_{03}\vartheta_{23}].
\end{aligned}\right.
$$

D'une manière semblable encore d'autres relations peuvent être établies.

En outre, nous pouvons former d'une manière analogue le produit

$$\vartheta_5((v+a))\vartheta_5((v+b))\ldots\vartheta_5((v+m))e^{(l_1v_1+l_2v_2)\pi i}.$$

Il peut être représenté ou comme fonction linéaire des quantités

$$\Phi_\alpha((v,w,l))_{\alpha:5,01,1,0},$$

dont les coefficients sont des fonctions entières des fonctions thêta primitives ou comme fonction entière des quotients différentiels des quantités

$$\Phi_5((v,w,l))\quad\text{et}\quad\Phi_1((v,w,l)),\quad\ldots.$$

Ici l'on a posé

$$w_\varepsilon = a_\varepsilon + b_\varepsilon + \ldots + m_\varepsilon. \qquad (\varepsilon : 1, 2).$$

Les constantes peuvent être déterminées par des développements en séries. Pour simplifier ces développements en séries dans le cas traité et dans le cas général, nous introduirons, comme dans la théorie des fonctions hyperelliptiques, les variables u_1 et u_2, en posant

$$(12) \qquad \begin{cases} u_1 = K_{11} v_1 + K_{12} v_2, \\ u_2 = K_{21} v_1 + K_{22} v_2. \end{cases}$$

Les quantités K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22} sont déterminées par les équations

$$(13) \qquad \begin{cases} \vartheta'_3(v_1)_0 = K_{21} \dfrac{\vartheta_{01}\vartheta_{12}\vartheta_{23}\vartheta_2\vartheta_{03}\vartheta_0\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}^2\vartheta_4^2\vartheta_5^2}, \\ \vartheta'_3(v_2)_0 = K_{22} \dfrac{\vartheta_{01}\vartheta_{12}\vartheta_{23}\vartheta_2\vartheta_{03}\vartheta_0\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}^2\vartheta_4^2\vartheta_5^2}, \\ \vartheta'_{24}(v_1)_0 = -K_{11} \dfrac{\vartheta_{03}\vartheta_{12}\vartheta_0\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}\vartheta_4\vartheta_5}, \\ \vartheta'_{24}(v_2)_0 = -K_{12} \dfrac{\vartheta_{03}\vartheta_{12}\vartheta_0\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}\vartheta_4\vartheta_5}. \end{cases}$$

En même temps nous définissons quatre quantités K'_{11}, K'_{12}, K'_{21}, K'_{22} par les équations

$$(14) \qquad \begin{cases} K_{11}\tau_{11} + K_{12}\tau_{12} = K'_{11}, & K_{11}\tau_{12} + K_{12}\tau_{22} = K'_{12}, \\ K_{21}\tau_{11} + K_{22}\tau_{12} = K'_{21}, & K_{21}\tau_{12} + K_{22}\tau_{22} = K'_{22}. \end{cases}$$

Posons alors

$$(15) \qquad \begin{cases} l_1 = \lambda_1 K_{11} + \lambda_2 K_{21}, & l_2 = \lambda_1 K_{12} + \lambda_2 K_{22}, \\ \omega_1 = w_1 K_{11} + w_2 K_{12}, & \omega_2 = w_1 K_{21} + w_2 K_{22}. \end{cases}$$

Nous aurons des fonctions qui satisfont aux équations

$$
(16)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&f(u_1+K_{11},u_2+K_{21})=(-1)^{g_1}f(u_1,u_2)\,e^{(\lambda_1 K_{11}+\lambda_2 K_{21})\pi i},\\
&f(u_1+K_{12},u_2+K_{22})=(-1)^{g_2}f(u_1,u_2)\,e^{(\lambda_1 K_{12}+\lambda_2 K_{22})\pi i},\\
&f(u_1+K'_{11},u_2+K'_{21})=(-1)^{h_1}f(u_1,u_2)\,e^{-\pi i n\alpha_1+\lambda_1 K'_{11}+\lambda_2 K'_{21}},\\
&f(u_1+K'_{12},u_2+K'_{22})=(-1)^{h_2}f(u_1,u_2)\,e^{-\pi i n\alpha_2+\lambda_1 K'_{12}+\lambda_2 K'_{22}},\\
&\qquad\alpha_1 K = 2K_{22}\left(u_1+\frac{\omega_1}{n}\right)\\
&\qquad\qquad\quad -2K_{12}\left(u_2+\frac{\omega_2}{n}\right)\\
&\qquad\qquad\quad +K'_{11}K_{22}-K'_{21}K_{12},\\
&\qquad\alpha_2 K = -2K_{21}\left(u_1+\frac{\omega_1}{n}\right)\\
&\qquad\qquad\quad +2K_{11}\left(u_2+\frac{\omega_2}{n}\right)\\
&\qquad\qquad\quad -K'_{12}K_{21}+K'_{22}K_{11},\\
&\qquad K = K_{11}K_{22}-K_{12}K_{21}.
\end{aligned}
\right.
$$

Nous désignerons les quantités de cette nature sous le nom de *fonctions quadruplement périodiques de troisième espèce*, mais nous nous bornerons à celles qui peuvent être ordonnées partout suivant les puissances croissantes de u_1 et u_2.

Ces fonctions se composent des fonctions fondamentales ci-devant définies si l'on substitue $u_1, u_2, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2$ au lieu de $v_1, v_2, w_1, w_2, l_1, l_2$. Il convient de les remplacer par d'autres éléments simples qui n'en diffèrent que de certaines constantes. Dans le choix de ces constantes il règne une grande variété. Nous les introduirons pour simplifier les résultats dans les solutions des problèmes proposés et les varierons avec ces problèmes. Premièrement nous voulons les introduire de la manière suivante.

Proposons les fonctions thêta primitives comme fonctions de u_1 et u_2 et désignons les quotients différentiels des fonctions thêta impaires pour les valeurs spéciales $u_1 = u_2 = 0$ par

$$\frac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_2}.$$

Nous obtiendrons les formules

$$
(17)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial \vartheta_3(v_1, v_2)_0}{\partial u_1} &= 0, \\
\frac{\partial \vartheta_3(v_1, v_2)_0}{\partial u_2} &= \frac{\vartheta_{01}\vartheta_{12}\vartheta_{23}\vartheta_2\vartheta_{03}\vartheta_0\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}^2\vartheta_4^2\vartheta_5^2}, \\
\frac{\partial \vartheta_{24}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1} &= -\frac{\vartheta_{03}\vartheta_{12}\vartheta_0\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}\vartheta_4\vartheta_5}, \\
\frac{\partial \vartheta_{24}(v_1, v_2)_0}{\partial u_2} &= 0, \\
\frac{\partial \vartheta_{04}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1} &= \frac{\vartheta_{14}\vartheta_{01}\vartheta_2\vartheta_{23}}{\vartheta_{34}\vartheta_4\vartheta_5}, \\
\frac{\partial \vartheta_{04}(v_1, v_2)_0}{\partial u_2} &= \frac{\vartheta_{14}\vartheta_{01}\vartheta_2\vartheta_{23}}{\vartheta_{34}\vartheta_4\vartheta_5}, \\
\frac{\partial \vartheta_1(v_1, v_2)_0}{\partial u_1} &= \frac{\vartheta_3\vartheta_4\vartheta_2\vartheta_0}{\vartheta_{34}\vartheta_4\vartheta_5}, \\
\frac{\partial \vartheta_1(v_1, v_2)_0}{\partial u_2} &= \varkappa^2\,\frac{\vartheta_5\vartheta_4\vartheta_2\vartheta_0}{\vartheta_{34}\vartheta_4\vartheta_5}, \\
\frac{\partial \vartheta_{02}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1} &= \frac{\vartheta_{12}\vartheta_{34}\vartheta_{01}\vartheta_4}{\vartheta_{34}\vartheta_4\vartheta_5}, \\
\frac{\partial \vartheta_{02}(v_1, v_2)_0}{\partial u_2} &= \lambda^2\,\frac{\vartheta_{12}\vartheta_{34}\vartheta_{01}\vartheta_4}{\vartheta_{34}\vartheta_4\vartheta_5}, \\
\frac{\partial \vartheta_{13}(v_1, v_2)_0}{\partial u_1} &= \frac{\vartheta_{23}\vartheta_{03}\vartheta_5\vartheta_{34}}{\vartheta_{34}\vartheta_4\vartheta_5}, \\
\frac{\partial \vartheta_{13}(v_1, v_2)_0}{\partial u_2} &= \mu^2\,\frac{\vartheta_{23}\vartheta_{03}\vartheta_5\vartheta_{34}}{\vartheta_{34}\vartheta_4\vartheta_5}.
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\varkappa^2 = \frac{\vartheta_{23}^2\vartheta_{01}^2}{\vartheta_4^2\vartheta_5^2}, \qquad \lambda^2 = \frac{\vartheta_2^2\vartheta_{23}^2}{\vartheta_{34}^2\vartheta_4^2}, \qquad \mu^2 = \frac{\vartheta_2^2\vartheta_{01}^2}{\vartheta_5^2\vartheta_{34}^2}.
$$

Ensuite nous désignons

$$
(18)\qquad \frac{\vartheta_\beta(v_1, v_2)}{\vartheta_\beta} = \sigma_\beta(u_1, u_2) = \sigma_\beta((u)),
$$

pourvu que $\vartheta_\beta(v_1, v_2)$ soit une fonction paire de ses arguments et

$$
(19)\qquad \frac{\vartheta_\alpha(v_1, v_2)}{\dfrac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_1} + \dfrac{\partial \vartheta_\alpha(v_1, v_2)_0}{\partial u_2}} = \sigma_\alpha(u_1, u_2) = \sigma_\alpha((u)),
$$

pourvu que $\vartheta_\alpha(v, v_2)$ soit une fonction impaire des mêmes arguments.

A l'aide de ces quantités nous définirons les fonctions hyperelliptiques par les équations

$$\mathrm{al}_a(u_1, u_2) = \frac{\sigma_a(u_1, u_2)}{\sigma_5(u_1, u_2)}. \tag{20}$$

Enfin nous poserons

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_a(u_1, u_2, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2) &= \sigma_a((u, \omega, \lambda)) = \frac{\vartheta_a((v+w))e^{(l_1v_1+l_2v_2)\pi i}}{\vartheta_a((w))}, \\ \varphi_a(u_1, u_2, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2) &= \varphi_a((u, \omega, \lambda)) = \frac{\sigma_a((u, \omega, \lambda))}{\sigma_5((u))}. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Toutes les fonctions quadruplement périodiques de la troisième espèce qui possèdent les propriétés auparavant établies, après être divisées par $\vartheta_5(v_1, v_2)^n$, s'expriment rationnellement par les fonctions hyperelliptiques des arguments u_1 et u_2 et par les quantités

$$\varphi_a((u, \omega, \lambda)).$$

Ces fonctions elles-mêmes satisfont aux équations

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi_a(u_1 + K_{11}, u_2 + K_{21}, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2) \\ &\quad = (-1)^{g_1}\varphi_a((u, \omega, \lambda))e^{(\lambda_1K_{11}+\lambda_2K_{21})\pi i}, \\ &\varphi_a(u_1 + K_{12}, u_2 + K_{22}, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2) \\ &\quad = (-1)^{g_2}\varphi_a((u, \omega, \lambda))e^{(\lambda_1K_{12}+\lambda_2K_{22})\pi i}, \\ &\varphi_a(u_1 + K'_{11}, u_2 + K'_{21}, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2) \\ &\quad = (-1)^{h_1}\varphi_a((u, \omega, \lambda))e^{(\lambda_1K'_{11}+\lambda_2K'_{21})\pi i - n\alpha'_1\pi i}, \\ &\varphi_a(u_1 + K'_{12}, u_2 + K'_{22}, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2) \\ &\quad = (-1)^{h_2}\varphi_a((u, \omega, \lambda))e^{(\lambda_1K'_{12}+\lambda_2K'_{22})\pi i - n\alpha'_2\pi i}, \end{aligned}\right. \tag{22}$$

$$K\alpha'_1 = 2K_{22}\omega_1 - 2K_{12}\omega_2,$$
$$K\alpha'_2 = -2K_{21}\omega_1 + 2K_{11}\omega_2,$$

et doivent être choisies comme fonctions fondamentales.

Nous désignerons les quantités de cette nature sous le nom de *fonc-*

tions quadruplement périodiques de seconde espèce. Les fonctions $\varphi_a((u,\omega,\lambda))$ ont au surplus la propriété qu'elles deviennent infinies quand la fonction $\sigma_5(u_1, u_2)$ devient égale à zéro. Les fonctions fondamentales que nous avons introduites ne sont pas indépendantes l'une de l'autre; mais il suffit d'en connaître une seule pour les connaître toutes, supposé en effet que les fonctions hyperelliptiques soient connues. Cela suit des formules du théorème d'addition dont nous voulons citer au moins les quatre suivantes :

$$
(23)\quad
\left\{
\begin{aligned}
P'_5 Q'_5 &= p'^2_5 q'^2_5 + \frac{\mu^2\mu_1^2\mu_\lambda^2(1+\varkappa^2)^4}{\mu_\varkappa^2} p'^2_1 q'^2_1 \\
&\quad + \varkappa^2\varkappa_1^2\mu^2\mu_1^2\mu_\lambda^2\lambda_\varkappa^2 p'^2_3 q'^2_3 + \frac{\varkappa^2\varkappa_1^2\lambda_\varkappa^2(1+\mu^2)^4}{\mu_\varkappa^2} p'^2_{13} q'^2_{13}, \\
P'_1 Q'_5 &= p'_5 p'_1 q'_4 q'_{14} + \frac{2\varkappa^2}{1+\varkappa^2} p'_0 p'_{01} q'_{04} q'_{23} \\
&\quad + \frac{\varkappa_1^2}{1+\varkappa^2} p'_2 p'_{12} q'_{24} q'_{03} \\
&\quad - \frac{\varkappa^2\varkappa_1^2(1+\lambda^2)(1+\mu^2)}{1+\varkappa^2} p'_{02} p'_{34} q'_{13} q'_3, \\
P'_{01} Q'_5 &= p'_5 p'_{01} q'_5 q'_{01} - \frac{\mu_1^2\mu_\lambda^2(1+\varkappa^2)^2}{\mu_\varkappa^2} p'_1 p'_0 q'_1 q'_0 \\
&\quad + \varkappa_1^2\mu_1^2\lambda_\varkappa^2\mu_\lambda^2 p'_3 p'_{24} q'_3 q'_{24} - \frac{\varkappa_1^2\lambda_\varkappa^2(1+\mu^2)^2}{\mu_\varkappa^2} p'_{13} p'_{03} q'_{13} q'_{03}, \\
P'_0 Q'_5 &= p'_0 p'_5 q'_0 q'_5 + \mu^2(1+\varkappa^2)^2 p'_1 p'_{01} q'_1 q'_{01} \\
&\quad + \varkappa_1^2\mu^2\lambda_\varkappa^2 p'_5 p'_{03} q'_3 q'_{03} + \varkappa_1^2\lambda_\varkappa^2(1+\mu^2)^2 p'_{13} p'_{24} q'_{13} q'_{24}.
\end{aligned}
\right.
$$

Dans ces formules, on a posé

$$
\begin{gathered}
P'_\alpha = \sigma_\alpha((u+\omega)), \qquad Q'_\alpha = \sigma_\alpha((u-\omega)), \\
\varkappa_1^2 = 1-\varkappa^2, \qquad \lambda_1^2 = 1-\lambda^2, \qquad \mu_1^2 = 1-\mu^2, \\
p_\alpha = \sigma_\alpha((u)), \qquad q_\alpha = \sigma_\alpha((\omega)), \\
\mu_\varkappa^2 = \varkappa^2-\mu^2, \qquad \mu_\lambda^2 = \lambda^2-\mu^2, \qquad \lambda_\varkappa^2 = \varkappa^2-\lambda^2.
\end{gathered}
$$

Les constantes que l'on rencontre dans les relations dont nous avons prouvé l'existence s'expriment à l'aide des développements en séries qui seront considérés dans le paragraphe suivant.

3. Le développement de la fonction

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi_5(u_1, u_2, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2) &= \frac{\sigma_5(u_1, u_2, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\sigma_5(u_1, u_2)} \\ &= \frac{\sigma_5(u_1+\omega_1, u_2+\omega_2)\, e^{(\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2)\pi i}}{\sigma_5(u_1, u_2)\,\sigma_5(\omega_1, \omega_2)}, \end{aligned}\right.$$

dans le voisinage du point $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, n'offre pas de difficultés.

En effet, nous aurons

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\log\varphi_5(u_1, u_2, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2) \\ &\quad = \log\sigma_5(u_1+\omega_1, u_2+\omega_2) - \log\sigma_5(u_1, u_2) \\ &\qquad - \log\sigma_5(\omega_1, \omega_2) + (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)\pi i. \end{aligned}\right.$$

Le côté droit peut être développé suivant les puissances croissantes de u_1 et u_2.

Nous obtenons

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\log\sigma_5(u_1+\omega_1, u_2+\omega_2) - \log\sigma_5(u_1, u_2) \\ &\quad = \log\sigma_5(\omega_1, \omega_2) + u_1\left[\frac{\partial\log\sigma_5(\omega_1, \omega_2)}{\partial\omega_1} + \lambda_1\pi i\right] \\ &\qquad + u_2\left[\frac{\partial\log\sigma_5(\omega_1, \omega_2)}{\partial\omega_2} + \lambda_2\pi i\right] \\ &\qquad + \frac{1}{1.2}(a_{20}u_1^2 + 2a_{11}u_1u_2 + a_{02}u_2^2) + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Les coefficients des puissances supérieures s'expriment rationnellement par les fonctions hyperelliptiques des arguments ω_1, ω_2 et par les quantités $\varkappa^2$, λ^2, μ^2. En effet, cela suit immédiatement des relations

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\log\sigma_5((u))}{\partial u_1^2} &= \frac{\partial^2\log\sigma_5((u))_0}{\partial u_1^2} + \frac{\mu^2\mu_1^2\mu_\lambda^2(1+\varkappa^2)^2}{\mu_\varkappa^2}\mathrm{al}_1((u))^2 + \frac{\varkappa^2\varkappa_1^2\lambda_\varkappa^2(1+\mu^2)^2}{\mu_\varkappa^2}\mathrm{al}_{13}((u))^2, \\ \frac{\partial^2\log\sigma_5((u))}{\partial u_1\partial u_2} &= \frac{\partial^2\log\sigma_5((u))_0}{\partial u_1\partial u_2} + \frac{\mu^2\mu_1^2\varkappa^2\mu_\lambda^2(1+\varkappa^2)^2}{\mu_\varkappa^2}\mathrm{al}_1((u))^2 + \frac{\varkappa^2\varkappa_1^2\mu^2\lambda_\varkappa^2(1+\mu^2)^2}{\mu_\varkappa^2}\mathrm{al}_{13}((u))^2, \\ \frac{\partial^2\log\sigma_5((u))}{\partial u_2^2} &= \frac{\partial^2\log\sigma_5((u))_0}{\partial u_2^2} + \frac{\mu^2\mu_1^2\varkappa^4\mu_\lambda^2(1+\varkappa^2)^2}{\mu_\varkappa^2}\mathrm{al}_1((u))^2 \\ &\quad + \varkappa^2\varkappa_1^2\mu^2\mu_1^2\mu_\lambda^2\lambda_\varkappa^2\,\mathrm{al}_3((u))^2 + \frac{\varkappa^2\varkappa_1^2\mu^4\lambda_\varkappa^2(1+\mu^2)^2}{\mu_\varkappa^2}\mathrm{al}_{13}((u))^2. \end{aligned}\right.$$

Dans ces formules on a posé

$$\frac{\partial^2 \sigma_5((u))_0}{\partial u_1^2} = \left[\frac{\partial^2 \sigma_5((u))}{\partial u_1^2}\right]_{u_1=u_2=0.}$$

Nous arriverons ainsi au théorème suivant :

Théorème. — *La fonction*

$$\varphi_5(u_1, u_2, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2)$$

s'exprime comme produit de deux facteurs. L'un est égal à

$$e^{u_1\left[\frac{\partial \log \sigma_5(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1} + \lambda_1 \pi i\right] + u_2\left[\frac{\partial \log \sigma_5(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2} + \lambda_2 \pi i\right]},$$

l'autre peut être ordonné suivant les puissances croissantes de u_1 *et* u_2. *Les coefficients de cette série s'expriment rationnellement par* $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 *et par les fonctions hyperelliptiques des arguments* ω_1 *et* ω_2.

Il en résulte que, si nous posons

$$(5) \qquad \pi i \lambda_1 = -\frac{\partial \log \sigma_5(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1}, \qquad \pi i \lambda_2 = -\frac{\partial \log \sigma_5(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2},$$

nos fonctions peuvent être développées en séries dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des quantités ci-devant définies.

Nous arrivons maintenant au problème plus difficile d'étudier le caractère de la fonction fondamentale dans le voisinage d'un autre point quelconque.

Nous nous bornerons à un cas particulier.

Nous supposons

$$(6) \qquad \pi i \lambda_1 = -\frac{\partial \log \sigma_1(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1}, \qquad \pi i \lambda_2 = -\frac{\partial \log \sigma_1(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2}$$

et nous proposons d'étudier le caractère de la fonction

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_1(u_1, u_2, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2) &= \frac{\sigma_1(u_1, u_2, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\sigma_1(u_1, u_2)} \\ &= \frac{\sigma_1(u_1+\omega_1, u_2+\omega_2)\, e^{(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)\pi i}}{\sigma_1(u_1, u_2)\, \sigma_1(\omega_1, \omega_2)} \end{aligned} \right.$$

dans le voisinage du point $u_1 = 0$, $u_2 = 0$.

Pour cela nous partirons des égalités

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial \log\psi_1(u_1, u_2, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial u_\varepsilon} = {} & \frac{\partial \log\sigma_1(u_1+\omega_1, u_2+\omega_2)}{\partial u_\varepsilon} \\ & - \frac{\partial \log\sigma_1(u_1, u_2)}{\partial u_\varepsilon} - \frac{\partial \log\sigma_1(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_\varepsilon}\end{aligned}\right.$$

$$(\varepsilon = 1, 2).$$

Cela posé, nous aurons d'abord

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}& \frac{\partial \log\sigma_1(u_1+\omega_1, u_2+\omega_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial \log\sigma_1(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1} \\ & \quad = u_1 \frac{\partial^2 \log\sigma_1(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1^2} + u_2 \frac{\partial^2 \log\sigma_1(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} \\ & \qquad + \frac{1}{1.2}(b_{20}u_1^2 + 2b_{11}u_1u_2 + b_{02}u_2^2) + \ldots, \\ & \frac{\partial \log\sigma_1(u_1+\omega_1, u_2+\omega_2)}{\partial u_2} - \frac{\partial \log\sigma_1(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2} \\ & \quad = u_1 \frac{\partial^2 \log\sigma_1(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} + u_2 \frac{\partial^2 \log\sigma_1(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2^2} \\ & \qquad + \frac{1}{1.2}b'_{20}u_1^2 + 2b'_{11}u_1u_2 + b'_{02}u_2^2) + \ldots.\end{aligned}\right.$$

Mais des équations

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 \log\sigma_1(u_1, u_2)}{\partial u_1^2} = {} & \frac{\partial^2\sigma_5(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^2} - \frac{1}{(1+\varkappa^2)^2}\frac{1}{\mathrm{al}_1(u_1, u_1)^2} \\ & - \frac{\varkappa^2\varkappa_1^2\lambda_\varkappa^2}{(1+\varkappa^2)^2}\frac{\mathrm{al}_3(u_1, u_2)^2}{\mathrm{al}_1(u_1, u_2)^2}, \\ \frac{\partial^2 \log\sigma_1(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} = {} & \frac{\partial^2\sigma_5(u_1, u_2)_0}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\varkappa^2}{(1+\varkappa^2)^2}\frac{1}{\mathrm{al}_1(u_1, u_2)^2} \\ & - \frac{\varkappa^2\varkappa_1^2\lambda_\varkappa^2}{(1+\varkappa^2)^2}\mu^2\frac{\mathrm{al}_3(u_1, u_2)^2}{\mathrm{al}_1(u_1, u_2)^2}, \\ \frac{\partial^2 \log\sigma_1(u_1, u_2)}{\partial u_2^2} = {} & \frac{\partial^2\sigma_5(u_1, u_2)_0}{\partial u_2^2} - \frac{\varkappa^4}{(1+\varkappa^2)^2}\frac{1}{\mathrm{al}_1(u_1, u_2)^2} \\ & + \frac{(1+\mu^2)^2}{(1+\varkappa^2)^2}\varkappa^2\varkappa_1^2\lambda_\varkappa^2\frac{\mathrm{al}_{12}(u_1, u_2)^2}{\mathrm{al}_1(u_1, u_2)^2} \\ & - \frac{\varkappa^2\varkappa_1^2\lambda_\varkappa^2}{(1+\varkappa^2)^2}\mu^4\frac{\mathrm{al}_3(u_1, u_2)^2}{\mathrm{al}_1(u_1, u_2)^2}\end{aligned}\right.$$

nous concluons que les équations (9) peuvent être représentées de la manière suivante :

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial \log\sigma_1(u_1+\omega_1, u_2+\omega_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial \log\sigma_1(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1} \\
&\quad = u_1 \frac{\partial^2 \sigma_5(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^2} + u_2 \frac{\partial^2 \sigma_5(u_1, u_2)_0}{\partial u_1\, \partial u_2} + \mathrm{P}_1(u_1, u_2), \\
&\frac{\partial \log\sigma_1(u_1+\omega_1, u_2+\omega_2)}{\partial u_2} - \frac{\partial \log\sigma_1(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2} \\
&\quad = u_1 \frac{\partial^2 \sigma_5(u_1, u_2)_0}{\partial u_1\, \partial u_2} + u_2 \frac{\partial^2 \sigma_5(u_1, u_2)_0}{\partial u_2^2} + \mathrm{P}_2(u_1, u_2).
\end{aligned}
\right.
$$

Dans ces formules $\mathrm{P}_1(u_1, u_2)$ et $\mathrm{P}_2(u_1, u_2)$ sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de u_1 et u_2, dont les coefficients s'expriment rationnellement par les fonctions hyperelliptiques des arguments ω_1 et ω_2, et par les grandeurs $\varkappa^2$, λ^2, μ^2.

En outre, nous pouvons poser

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{P}_1(u_1, u_2) &= \frac{\partial f_1(u_1, u_2)}{\partial u_1}, \\
\mathrm{P}_2(u_1, u_2) &= \frac{\partial f_1(u_1, u_2)}{\partial u_2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Dans ces formules $f(u_1, u_2)$ est aussi une série ordonnée suivant les puissances de u_1 et u_2 dont les coefficients ont les qualités déjà plusieurs fois citées.

Alors nous obtiendrons le résultat

$$
\begin{aligned}
&d \log\psi_1(u_1, u_2, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2) \\
&\quad = \frac{d}{1.2}\left[u_1^2 \frac{\partial^2 \sigma_5(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^2} + 2u_1 u_2 \frac{\partial^2 \sigma_5(u_1, u_2)_0}{\partial u_1\, \partial u_2} + u_2^2 \frac{\partial^2 \sigma_5(u_1, u_2)_0}{\partial u_2^2}\right] \\
&\quad\quad + d f_1(u_1, u_2) - d \log\sigma_1(u_1, u_2),
\end{aligned}
$$

ou aussi

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\psi_1(u_1, u_2, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2)\, \sigma_1(u_1, u_2) \\
&\quad = \mathrm{C} e^{\frac{1}{2}\left[u_1^2 \frac{\partial^2 \sigma_5(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^2} + 2u_1 u_2 \frac{\partial^2 \sigma_5(u_1, u_2)_0}{\partial u_1\, \partial u_2} + u_2^2 \frac{\partial^2 \sigma_5(u_1, u_2)_0}{\partial u_2^2}\right]} \mathrm{P}(u_1, u_2).
\end{aligned}
\right.
$$

Dans cette formule $P(u_1, u_2)$ est également une série ordonnée suivant les puissances de u_1 et u_2, ayant les mêmes qualités que $P_1(u_1, u_2)$, ... La constante C s'obtient égale à l'unité en posant sur le côté gauche et droit $u_1 = u_2 = 0$.

Joignons-y le résultat que la fonction $\sigma_1(u_1, u_2)$ satisfait à une équation de la forme

$$\sigma_1(u_1, u_2) = e^{\frac{1}{2}\left[u_1^2 \frac{\partial^2 \sigma_5(u_1, u_2)_0}{\partial u_1^2} + 2 u_1 u_2 \frac{\partial^2 \sigma_5(u_1, u_2)_0}{\partial u_1 \partial u_2} + u_2^2 \frac{\partial^2 \sigma_5(u_1, u_2)_0}{\partial u_2^2}\right]} P'(u_1, u_2),$$

nous aurons le résultat

$$\psi_1(u_1, u_2, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{P(u_1, u_2)}{P'(u_1, u_2)}, \tag{14}$$

ou aussi le théorème

Théorème. — *La fonction $\psi_1(u_1, u_2, \omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2)$ peut être représentée comme quotient de deux séries ordonnées suivant les puissances croissantes de u_1 et u_2.*

4. Il s'ensuit des considérations précédentes qu'il doit exister entre les quantités y introduites une variété infinie de relations différentielles. Nous pouvons déterminer les coefficients à l'aide des développements donnés au dernier paragraphe. Nous préférons cependant dans les exemples suivants une autre méthode qui, à son tour, donnera quelques lois pour le développement en séries.

Nous pouvons poser

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_5((v, w, l))}{\partial v_\varepsilon} &= c_1^{(\varepsilon)} \Phi_5((v, w, l)) + c_2^{(\varepsilon)} \frac{\mathfrak{S}_1((v))}{\mathfrak{S}_5((v))} \Phi_1((v, w, l)) \\ &\quad + c_3^{(\varepsilon)} \frac{\mathfrak{S}_{01}((v))}{\mathfrak{S}_5((v))} \Phi_{01}((v, w, l)) + c_4^{(\varepsilon)} \frac{\mathfrak{S}_0((v))}{\mathfrak{S}_5((v))} \Phi_0((v, w, l)). \end{aligned} \right.$$

En substituant des demi-périodes, nous obtiendrons

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} c_1^{(\varepsilon)} &= \frac{\partial \mathfrak{S}_{03}((w))}{\partial w_\varepsilon} \frac{1}{\mathfrak{S}_{03}((w))} + l_\varepsilon \pi i, & c_2^{(\varepsilon)} &= -\frac{\mathfrak{S}'_{24}(v_\varepsilon)_0}{\mathfrak{S}_{03}} \frac{\mathfrak{S}_{24}((w))}{\mathfrak{S}_{03}((w))}, \\ c_3^{(\varepsilon)} &= -\frac{\mathfrak{S}'_{13}(v_\varepsilon)_0}{\mathfrak{S}_{03}} \frac{\mathfrak{S}_{13}((w))}{\mathfrak{S}_{03}((w))}, & c_4^{(\varepsilon)} &= \frac{\mathfrak{S}'_3(v_\varepsilon)_0}{\mathfrak{S}_{03}} \frac{\mathfrak{S}_3((w))}{\mathfrak{S}_{03}((w))}. \end{aligned} \right.$$

D'une manière semblable nous trouverons les formules suivantes :

$$
(3)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi_1((v,w,l))}{\partial v_\varepsilon} = c_5^{(\varepsilon)}\,\Phi_1((v,w,l)) + c_6^{(\varepsilon)}\frac{\vartheta_1((v))}{\vartheta_5((v))}\,\Phi_5((v,w,l))\\
&\qquad\qquad + c_7^{(\varepsilon)}\frac{\vartheta_{01}((v))}{\vartheta_5((v))}\,\Phi_0((v,w,l)) + c_8^{(\varepsilon)}\frac{\vartheta_0((v))}{\vartheta_5((v))}\,\Phi_{01}((v,w,l)),\\
&c_5^{(\varepsilon)} = \frac{\partial\vartheta_{24}((w))}{\partial w_\varepsilon}\,\frac{1}{\vartheta_{24}((w))} + l_\varepsilon\pi i, \qquad c_6^{(\varepsilon)} = -\frac{\vartheta_{03}((w))}{\vartheta_{03}}\,\frac{\vartheta'_{24}(v_\varepsilon)_0}{\vartheta_{24}((w))},\\
&c_7^{(\varepsilon)} = \frac{\vartheta'_{13}(v_\varepsilon)_0}{\vartheta_{03}}\,\frac{\vartheta_3((w))}{\vartheta_{24}((w))}, \qquad c_8^{(\varepsilon)} = -\frac{\vartheta'_3(v_\varepsilon)_0}{\vartheta_{03}}\,\frac{\vartheta_{13}((w))}{\vartheta_{24}((w))};\\
&\frac{\partial\Phi_{01}((v,w,l))}{\partial v_\varepsilon} = c_9^{(\varepsilon)}\,\Phi_{01}((v,w,l)) + c_{10}^{(\varepsilon)}\frac{\vartheta_1((v))}{\vartheta_5((v))}\,\Phi_0((v,w,l))\\
&\qquad\qquad + c_{11}^{(\varepsilon)}\frac{\vartheta_{01}((v))}{\vartheta_5((v))}\,\Phi_5((v,w,l)) + c_{12}^{(\varepsilon)}\frac{\vartheta_0((v))}{\vartheta_5((v))}\,\Phi_1((v,w,l)),\\
&c_9^{(\varepsilon)} = \frac{\partial\vartheta_{13}((w))}{\partial w_\varepsilon}\,\frac{1}{\vartheta_{13}((w))} + \pi i l_\varepsilon, \qquad c_{10}^{(\varepsilon)} = -\frac{\vartheta'_{24}(v_\varepsilon)_0}{\vartheta_{03}}\,\frac{\vartheta_3((w))}{\vartheta_{13}((w))},\\
&c_{11}^{(\varepsilon)} = -\frac{\vartheta'_{13}(v_\varepsilon)_0}{\vartheta_{03}}\,\frac{\vartheta_{03}((w))}{\vartheta_{13}((w))}, \qquad c_{12}^{(\varepsilon)} = \frac{\vartheta'_3(v_\varepsilon)_0}{\vartheta_{03}}\,\frac{\vartheta_{24}((w))}{\vartheta_{13}((w))};\\
&\frac{\partial\Phi_0((v,w,l))}{\partial v_\varepsilon} = c_{13}^{(\varepsilon)}\,\Phi_0((v,w,l)) + c_{14}^{(\varepsilon)}\frac{\vartheta_1((v))}{\vartheta_5((v))}\,\Phi_{01}((v,w,l))\\
&\qquad\qquad + c_{15}^{(\varepsilon)}\frac{\vartheta_{01}((v))}{\vartheta_5((v))}\,\Phi_1((v,w,l)) + c_{16}^{(\varepsilon)}\frac{\vartheta_0((v))}{\vartheta_5((v))}\,\Phi_5((v,w,l)),\\
&c_{13}^{(\varepsilon)} = \frac{\partial\vartheta_3((w))}{\partial w_\varepsilon}\,\frac{1}{\vartheta_3((w))} + \pi i l_\varepsilon, \qquad c_{14}^{(\varepsilon)} = -\frac{\vartheta'_{24}(v_\varepsilon)_0}{\vartheta_{03}}\,\frac{\vartheta_{13}((w))}{\vartheta_3((w))},\\
&c_{15}^{(\varepsilon)} = \frac{\vartheta'_{13}(v_\varepsilon)_0}{\vartheta_{03}}\,\frac{\vartheta_{24}((w))}{\vartheta_3((w))}, \qquad c_{16}^{(\varepsilon)} = -\frac{\vartheta'_3(v_\varepsilon)_0}{\vartheta_{03}}\,\frac{\vartheta_{03}((w))}{\vartheta_3((w))}.
\end{aligned}
\right.
$$

Introduisons maintenant les quantités $u_1, u_2, \omega_1, \omega_2, \ldots,$ et posons

$$
(4)\quad
\left\{
\begin{aligned}
x_5 &= \varphi_5((u,\omega,\lambda)),\\
x_1 &= \frac{\mathrm{al}_1((\omega))\,\mathrm{al}_{24}((\omega))}{\mathrm{al}_{03}((\omega))}\,\varphi_1((u,\omega,\lambda)),\\
x_{01} &= \frac{\mathrm{al}_{13}((\omega))\,\mathrm{al}_{01}((\omega))}{\mathrm{al}_{03}((\omega))}\,\varphi_{01}((u,\omega,\lambda)),\\
x_0 &= \frac{\mathrm{al}_3((\omega))\,\mathrm{al}_0((\omega))}{\mathrm{al}_{03}((\omega))}\,\varphi_0((u,\omega,\lambda)),\\
\pi i l_\varepsilon &= -\frac{\partial\vartheta_5((w))}{\partial w_\varepsilon}.
\end{aligned}
\right.
$$

Nous obtiendrons alors les formules importantes et fondamentales

$$
(5)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial x_3}{\partial u_1} &= \frac{\partial \log \mathrm{al}_{03}((\omega))}{\partial \omega_1} x_3 - \mu_1^2 \mu_\lambda^2 (1+\varkappa^2)^2 \,\mathrm{al}_1((u))\, x_1 - \varkappa^2 (1+\mu^2)\, \mathrm{al}_{01}((u))\, x_{01},\\
\frac{\partial x_3}{\partial u_2} &= \frac{\partial \log \mathrm{al}_{03}((\omega))}{\partial \omega_2} x_3 - \varkappa^2 \mu^2 (1+\mu^2)\, \mathrm{al}_{01}((u))\, x_{01} + \varkappa^2 \mu_1^2 \mu_\lambda^2 \,\mathrm{al}_0((u))\, x_0,\\
\frac{\partial x_1}{\partial u_1} &= \frac{\partial \log \mathrm{al}_{24}((\omega))}{\partial \omega_1} x_1 - \mathrm{al}_1((u))\, x_3 - \frac{\varkappa^2}{1+\varkappa^2} \mathrm{al}_{01}((u))\, x_0,\\
\frac{\partial x_1}{\partial u_2} &= \frac{\partial \log \mathrm{al}_{24}((\omega))}{\partial \omega_2} x_1 - \frac{\varkappa^2 \mu^2}{1+\varkappa^2} \mathrm{al}_{01}((u))\, x_0 + \frac{\varkappa^2(1+\mu^2)}{1+\varkappa^2} \mathrm{al}_0((u))\, x_{01},\\
\frac{\partial x_{01}}{\partial u_1} &= \frac{\partial \,\mathrm{al}_{13}((\omega))}{\partial \omega_1} x_{01} + \frac{\mu_1^2 \mu_\lambda^2 (1+\varkappa^2)}{1+\mu^2} \mathrm{al}_1((u))\, x_0 - \frac{1}{1+\mu^2} \mathrm{al}_{01}((u))\, x_3,\\
\frac{\partial x_{01}}{\partial u_2} &= \frac{\partial \,\mathrm{al}_{13}((\omega))}{\partial \omega_2} x_{01} - \frac{\mu^2}{1+\mu^2} \mathrm{al}_{01}((u))\, x_3 - \frac{\mu_1^2 \mu_\lambda^2 (1+\varkappa^2)}{1+\mu^2} \mathrm{al}_0((u))\, x_1,\\
\frac{\partial x_0}{\partial u_1} &= \frac{\partial \,\mathrm{al}_3((\omega))}{\partial \omega_1} x_0 + (1+\varkappa^2)(1+\mu^2)\, \mathrm{al}_1((u))\, x_{01} - (1+\varkappa^2)\, \mathrm{al}_{01}((u))\, x_1.\\
\frac{\partial x_0}{\partial u_2} &= \frac{\partial \,\mathrm{al}_3((\omega))}{\partial \omega_2} x_0 - (1+\varkappa^2)\, \mu^2 \,\mathrm{al}_{01}((u))\, x_1 - \mathrm{al}_0((u))\, x_3.
\end{aligned}\right.
$$

Dans ces formules on a à poser

$$
(6)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial \,\mathrm{al}_{03}((\omega))}{\partial \omega_1} &= \varkappa^2 (1+\mu^2)\, \mathrm{al}_{13}((\omega))\, \mathrm{al}_{01}((\omega)),\\
\frac{\partial \,\mathrm{al}_{03}((\omega))}{\partial \omega_2} &= -\varkappa^2 \mu_1^2 \mu_\lambda^2 \,\mathrm{al}_3((\omega))\, \mathrm{al}_0((\omega)) + \varkappa^2 \mu^2 (1+\mu^2)\, \mathrm{al}_{13}((\omega))\, \mathrm{al}_{01}((\omega)),\\
\frac{\partial \,\mathrm{al}_{24}((\omega))}{\partial \omega_1} &= \mathrm{al}_2((\omega))\, \mathrm{al}_4((\omega)) + 2\varkappa^2 (1+\lambda^2)\, \mathrm{al}_{02}((\omega))\, \mathrm{al}_{04}((\omega)),\\
\frac{\partial \,\mathrm{al}_{24}((\omega))}{\partial \omega_2} &= 2\varkappa^2 \mu^2 (1+\lambda^2)\, \mathrm{al}_{02}((\omega))\, \mathrm{al}_{01}((\omega)),\\
\frac{\partial \,\mathrm{al}_{13}((\omega))}{\partial \omega} &= \mu_1^2 \mu_\lambda^2 \frac{1+\varkappa^2}{1+\mu^2} \mathrm{al}_1((\omega))\, \mathrm{al}_3((\omega)) + \frac{1}{1+\mu^2} \mathrm{al}_{01}((\omega))\, \mathrm{al}_{03}((\omega)),\\
\frac{\partial \,\mathrm{al}_{13}((\omega))}{\partial \omega_2} &= \frac{\mu^2}{1+\mu^2} \mathrm{al}_{01}((\omega))\, \mathrm{al}_{03}((\omega)),\\
\frac{\partial \,\mathrm{al}_3((\omega))}{\partial \omega_1} &= \frac{1}{\lambda^2} \mathrm{al}_0((\omega))\, \mathrm{al}_{03}((\omega)) - \frac{1}{\lambda^2} \mathrm{al}_4((\omega))\, \mathrm{al}_{34}((\omega)),\\
\frac{\partial \,\mathrm{al}_3((\omega))}{\partial \omega_2} &= \frac{1}{\lambda^2} \mathrm{al}_0((\omega))\, \mathrm{al}_{03}((\omega)).
\end{aligned}\right.
$$

Divisons les équations (5) respectivement par x_5, x_4, x_{01}, x_0.

A l'aide du théorème d'addition, les quotients

$$\frac{x_\alpha}{x_\beta}, \quad \alpha, \beta = 5, 1, 01, 0$$

s'expriment rationnellement par les fonctions hyperelliptiques primitives. Les coefficients sont des fonctions rationnelles de $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 et des fonctions hyperelliptiques des arguments ω_1 et ω_2.

De là on tire le théorème suivant :

Théorème. — *Tous les quotients différentiels du logarithme des fonctions introduites s'expriment rationnellement par les fonctions hyperelliptiques des arguments u_1 et u_2. Les coefficients sont des fonctions rationnelles des quantités $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 et des fonctions hyperelliptiques des arguments ω_1 et ω_2.*

De telles formules peuvent être établies en grand nombre. Nous pouvons les regarder comme analogues à celles, dans la théorie des fonctions elliptiques, qui ont été établies d'abord par Jacobi et se trouvent à la fin du Tome I$^{\text{er}}$ de ses Œuvres complètes ou dans ses travaux sur la rotation d'un corps. Qu'il me soit permis de renvoyer le lecteur, concernant ces théories, à un travail de M. Staude qui a été publié récemment dans les *Acta mathematica*. Il n'entre pas dans mes intentions d'épuiser toute la variété des relations différentielles. Je vais seulement ajouter aux relations déjà établies quelques-unes du second ordre où nous supposons que

$$\pi i l_1 = -\frac{\partial \mathfrak{I}_5((w))}{\partial w_1}, \qquad \pi i l_2 = -\frac{\partial \mathfrak{I}_5((w))}{\partial w_2}.$$

$$\frac{\partial^2 x_5}{\partial u_1^2} = e'_1 x_5 + e'_2 \,\mathrm{al}_4((u))\, x_4 + e'_3 \,\mathrm{al}_{01}((u))\, x_{01},$$

$$e'_1 = \left[\frac{\partial \log \mathrm{al}_{13}((\omega))}{\partial \omega_1}\right]^2 + \mu_1^2 \mu_\lambda^2 (1+\varkappa^2)^2 \,\mathrm{al}_4((u))^2 + \varkappa^2 \,\mathrm{al}_{01}((u))^2,$$

$$e'_2 = -\mu_1^2 \mu_\lambda^2 (1+\varkappa^2)^2 \left[\frac{\partial \log \mathrm{al}_{03}((\omega))}{\partial \omega_1} + \frac{\partial \log \mathrm{al}_{24}((\omega))}{\partial \omega_1} + \frac{\partial \log \mathrm{al}_1((u))}{\partial u_1}\right],$$

$$e'_3 = -\varkappa^2 (1+\mu^2) \left[\frac{\partial \log \mathrm{al}_{03}((\omega))}{\partial \omega_1} + \frac{\partial \log \mathrm{al}_{13}((\omega))}{\partial \omega_1} + \frac{\partial \log \mathrm{al}_{01}((u))}{\partial u_1}\right];$$

$$\frac{\partial^2 x_5}{\partial u_2^2} = e''_1 x_5 + e''_3 \operatorname{al}_{01}((u))\, x_{01} + e''_4 \operatorname{al}_0((u))\, x_0,$$

$$e''_1 = \left[\frac{\partial \log \operatorname{al}_{13}((\omega))}{\partial \omega_2}\right]^2 + \mu^4 \varkappa^2 \operatorname{al}_{01}((u))^2 - \mu_\lambda^2 \mu_1^2 \varkappa^2 \operatorname{al}_0((u))^2,$$

$$e''_3 = -\varkappa^2 \mu^2 (1 + \mu^2)\left[\frac{\partial \log \operatorname{al}_{03}((\omega))}{\partial \omega_2} + \frac{\partial \log \operatorname{al}_{13}((\omega))}{\partial \omega_2} + \frac{\partial \log \operatorname{al}_{01}((u))}{\partial u_2}\right],$$

$$e''_4 = \mu_1^2 \varkappa^2 \mu_\lambda^2 \left[\frac{\partial \log \operatorname{al}_{03}((\omega))}{\partial \omega_2} + \frac{\partial \log \operatorname{al}_3((\omega))}{\partial \omega_2} + \frac{\partial \log \operatorname{al}_0((u))}{\partial u_2}\right];$$

$$\frac{\partial^2 x_5}{\partial u_1\, \partial u_2} = e'''_1 x_5 + e'''_2 \operatorname{al}_1((u))\, x_1 + e'''_3 \operatorname{al}_{01}((u))\, x_{01} + e'''_4 \operatorname{al}_0((u))\, x_0,$$

$$\begin{aligned} e'''_1 = {} & \frac{\partial \log \operatorname{al}_{03}((\omega))}{\partial \omega_1}\, \frac{\partial \log \operatorname{al}_{03}((\omega))}{\partial \omega_2} + \mu_1^2 \mu_\lambda^2 (1 + \varkappa^2)^2 \operatorname{al}_1((u))^2 \\ & + \mu^2 \varkappa^2 \operatorname{al}_{01}((u))^2 - \mu_\lambda^2 \mu_1^2 \varkappa^2 \operatorname{al}_0((u))^2, \end{aligned}$$

$$e'''_2 = -\mu_1^2 \mu_\lambda^2 (1 + \varkappa^2)^2 \left[\frac{\partial \log \operatorname{al}_{03}((\omega))}{\partial \omega_2} + \frac{\partial \log \operatorname{al}_{24}((\omega))}{\partial \omega_2} + \frac{\partial \log \operatorname{al}_1((u))}{\partial u_2}\right],$$

$$\begin{aligned} e'''_3 = {} & -\varkappa^2 (1 + \mu^2)\left[\frac{\partial \log \operatorname{al}_{03}((\omega))}{\partial \omega_2} + \frac{\partial \log \operatorname{al}_{13}((\omega))}{\partial \omega_2} + \frac{\partial \log \operatorname{al}_{01}((u))}{\partial u_2}\right] \\ & - \varkappa^2 \mu^2 (1 + \mu^2)\left[\frac{\partial \log \operatorname{al}_{03}((\omega))}{\partial \omega_1} + \frac{\partial \log \operatorname{al}_{13}((\omega))}{\partial \omega_1} + \frac{\partial \log \operatorname{al}_{01}((u))}{\partial u_1}\right], \end{aligned}$$

$$e'''_4 = \varkappa^2 \mu_1^2 \mu_\lambda^2 \left[\frac{\partial \log \operatorname{al}_{03}((\omega))}{\partial \omega_1} + \frac{\partial \log \operatorname{al}_3((\omega))}{\partial \omega_1} + \frac{\partial \log \operatorname{al}_0((u))}{\partial u_1}\right].$$

Nous pouvons aisément tirer de ces formules des équations auxquelles les fonctions particulières satisferont et dont on connaît les intégrales. En outre, les modifications les plus variées y sont imaginables et possibles, précisément comme vous l'avez montré pour les fonctions elliptiques dans votre Ouvrage précédemment cité. Il ne me reste plus qu'à montrer qu'il y a en effet des problèmes de Mathématiques appliquées qui conduisent à de telles équations différentielles et quels sont ces problèmes. Je me réserve cette recherche pour une autre occasion.