JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

L. AUTONNE

Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe des substitutions linéaires de contact

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 3 (1887), p. 63-85.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1887_4_3__63_0>

Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe des substitutions linéaires de contact;

PAR M. L. AUTONNE.

INTRODUCTION.

Dans une série de Communications présentées à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus,* années 1884 et 1885) et dans deux Mémoires insérés dans le *Journal de Mathématiques* (1885 et 1886), j'ai énuméré et construit les groupes d'ordre fini, contenus dans les groupes quadratique et cubique Cremona. Je me propose actuellement (¹) d'étendre le même genre de recherches aux substitutions birationnelles, où ne figure plus une seule série de trois variables homogènes x_i (coordonnées d'un point x du plan), mais encore une seconde série de trois variables homogènes u_i (coordonnées d'une droite u du plan), $i = 1, 2, 3$.

Parmi les substitutions de ce genre, les plus importantes sont, comme on le sait, les substitutions de contact (S. LIE, *Math. Ann.*, t. VIII; CLEBSCH-LINDEMANN, *Leçons sur la Géométrie*, t. III, etc.), qui ont le contact des figures pour propriété invariante. Ces substitutions changeant une équation différentielle du premier ordre H en une

(¹) Un résumé des présentes recherches a paru dans les *Comptes rendus*, le 8 février 1886.

autre H', changent aussi les intégrales de H en les intégrales de H'. C'est là l'intérêt de ces substitutions en Analyse.

Le présent Travail est divisé en deux Parties.

Dans la première Partie, j'établis le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Pour qu'une substitution rationnelle de la forme*

$$\begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(\overset{p}{x}, \overset{q}{u}) \\ u_i & \psi_i(\overset{r}{x}, \overset{s}{u}) \end{vmatrix} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où φ_i et ψ_i sont des polynômes homogènes, dans lesquels les x_i et les u_i entrent aux dimensions marquées par les entiers p, q, r, s soit de contact, il faut et il suffit que les six quantités

$$\sum_i \psi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} - \lambda u_j \qquad \text{et} \qquad \sum_i \psi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} - \mu x_j, \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

s'annulent identiquement en même temps que

$$\sum_i u_i x_i = 0,$$

λ et μ étant deux facteurs convenablement choisis.

Cette proposition n'est d'ailleurs qu'une généralisation des conditions données par Meyer (*Math. Ann.*, t. VIII, p. 305, et CLEBSCH-LINDEMANN, t. III, p. 463).

Je trouve ensuite que, si un des entiers p, q, r, s est zéro ou un, une substitution birationnelle de contact ne peut avoir que l'une des deux formes suivantes :

Forme monistique. — On a la substitution

$$\begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(x) \\ u_i & \sum_j u_j \Phi_{ij}(x) \end{vmatrix} \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

où les fonctions φ_i définissent une substitution Cremona

$$| \; t_i \quad \varphi_i(t) \; |,$$

et où $\Phi_{ij}(x)$ désigne le coefficient de $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ dans le développement du jacobien des φ_i.

Forme dualistique. — On a la substitution

$$\mathrm{T} = \left| \begin{array}{ll} x_i & \varphi_i(u) \\ u_i & \sum\limits_j x_i \Phi_{ij}(u) \end{array} \right|,$$

qui ne diffère de la forme précédente qu'en ce que u_i remplace x_i dans φ_i et Φ_{ij}.

Dans le cas particulier où aucun des quatre entiers p, q, r, s ne dépasse l'unité, je dis que la substitution est *linéaire*. Une substitution linéaire monistique est de la forme

$$(1) \qquad \left| \begin{array}{ll} x_i & \sum\limits_j a_{ij} x_j \\ u_i & \sum\limits_j \alpha_{ij} u_j \end{array} \right| \qquad (a_{ij} = \text{const.}),$$

où α_{ij} désigne le coefficient de a_{ij} dans le développement du déterminant des a_{ij}; une substitution linéaire dualistique est

$$(2) \qquad \left| \begin{array}{ll} x_i & \sum\limits_j b_{ij} u_j \\ u_i & \sum\limits_j \beta_{ij} x_j \end{array} \right| \qquad (b_{ij} = \text{const.}),$$

β_{ij} ayant le même rôle par rapport aux b_{ij} que α_{ij}, par rapport aux a_{ij}.

Il n'est pas nouveau que les substitutions linéaires (1) et (2) sont de contact, mais la réciproque n'avait pas été démontrée jusqu'ici, à notre connaissance.

Après avoir défini la composition des substitutions de contact, j'établis dans la seconde Partie la proposition suivante :

THÉORÈME. — Tout *groupe* G *linéaire de contact et d'ordre fini s'obtient en combinant la substitution dualistique unique*

$$\left| \begin{matrix} x_i & u_i \\ u_i & x_i \end{matrix} \right|,$$

qui échange simplement les deux séries de variables, avec un groupe g formé exclusivement d'un nombre fini de substitutions monistiques.

Soient

$$\left| \begin{matrix} x_i & \sum\limits_j a_{ij} x_j \\ u_i & \sum\limits_j \alpha_{ij} u_j \end{matrix} \right|$$

les diverses substitutions monistiques de g; nous trouvons que, pour que g soit d'ordre fini, il faut et il suffit que les collinéations

$$\left| \begin{matrix} t_i & \sum\limits_j a_{ij} t_j \end{matrix} \right|$$

forment un groupe Γ d'ordre fini. Le groupe Γ est par conséquent connu, puisqu'il est l'un des *groupes linéaires d'ordre fini* de M. Jordan (*Journal de Crelle*, t. 84, etc.).

Le groupe linéaire G de contact et d'ordre fini se trouve ainsi construit et notre théorie est complète.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Prenons la terminologie usitée dans l'Ouvrage de Clebsch-Lindemann (*Leçons sur la Géométrie*, t. III, *Connexes*). Appelons

élément (x, u) du plan le système formé par un point x, de coordonnées x_i, et une droite u, de coordonnées u_i $(i = 1, 2, 3)$. L'élément est *principal*, si la droite u passe par le point x, c'est-à-dire si

$$\omega = \sum_i u_i x_i = 0.$$

Considérons deux éléments principaux infiniment voisins (x, u) et $(x + dx, u + du)$; ils seront en *situation réunie*, si l'on a

$$\sum_i u_i dx_i = \sum_i x_i du_i = 0.$$

Une substitution S est *de contact* si à deux éléments principaux infiniment voisins et en situation réunie *quelconques*

$$(x, u) \quad \text{et} \quad (x + dx, u + du)$$

S substitue deux éléments

$$(y, v) \quad \text{et} \quad (y + dy, v + dv)$$

aussi principaux, infiniment voisins et en situation réunie. L'importance des substitutions de contact consiste surtout, comme on sait, en ce que, si une substitution de contact S transforme une équation différentielle du premier ordre H en une autre H′, S transforme aussi les intégrales de H en celles de H′.

Définition. — Si l'on a identiquement, en désignant par A, B, C trois formes en x_i et u_i,

$$A = B + C\omega, \qquad \omega = \sum u_i x_i,$$

nous écrirons

$$A \equiv B \qquad (\bmod \omega).$$

Je ne m'occuperai dans la suite que de substitutions *rationnelles* de contact, que l'on peut évidemment d'ailleurs supposer toujours entières, sans restreindre la généralité.

2. Considérons la substitution

$$S = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ u_i & v_i \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(\overset{p}{x}, \overset{q}{u}) \\ u_i & \psi_i(\overset{r}{x}, \overset{s}{u}) \end{vmatrix} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où l'on a désigné par

$\varphi_i(\overset{p}{x}, \overset{q}{u})$ une forme de dimension p en x_i et q en u_i,

$\psi_i(\overset{r}{x}, \overset{s}{u})$ » r s » .

Il vient la proposition :

THÉORÈME. — *Pour que la substitution* S *soit de contact, il faut et il suffit que l'on ait les six relations*

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \sum_i \psi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \equiv \lambda u_j \quad (\operatorname{mod} \omega), \\ (2) & \sum_i \psi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} \equiv \mu x_j \quad (\operatorname{mod} \omega), \end{array}\right\} \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

I. *Les conditions sont nécessaires.* Si la substitution S est de contact les relations

$$(3) \qquad \sum_i \varphi_i \psi_i = \sum_i \psi_i \, d\varphi_i = \sum_i \varphi_i \, d\psi_i = 0$$

doivent être satisfaites en même temps que

$$(4) \qquad \sum_i u_i x_i = \sum_i u_i \, dx_i = \sum_i x_i \, du_i = 0.$$

Cela exige d'abord

$$(5) \qquad \sum_i \varphi_i \psi_i \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} \omega).$$

En second lieu

$$(6)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_i \psi_i d\varphi_i = \sum_i \psi_i \sum_j \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} dx_j + \sum_i \psi_i \sum_j \frac{\partial\varphi_i}{\partial u_j} du_j \\ \displaystyle\qquad = \sum_j dx_j \sum_i \psi_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} + \sum_j du_j \sum_i \psi_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial u_j}. \end{cases}$$

Appelons k, de coordonnées k_i, un point *quelconque* de la droite u, et l une droite *quelconque*, passant par le point x. Entre les six coordonnées k_i, l_i de k et de l existeront, deux et seulement deux relations

$$(7)\quad \sum_i k_i u_i = \sum_i l_i x_i = 0.$$

D'ailleurs, en vertu de (4) et (7),

$$dx_i = \alpha x_i + a k_i, \qquad du_i = \beta u_i + b l_i,$$

les quatre facteurs a, α, b, β étant tout à fait indépendants les uns des autres.

Par suite (6) devient

$$(6')\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_i \psi_i d\varphi_i = a \sum_j k_j \sum_i \psi_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} + b \sum_j l_j \sum_i \psi_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial u_j} \\ \displaystyle\qquad + (p\alpha + q\beta) \sum_i \varphi_i \psi_i. \end{cases}$$

En vertu de (3) et (5), on a séparément, puisque a et b sont des facteurs indépendants,

$$(7')\quad \left.\begin{cases} \displaystyle\sum_j k_j \sum_i \psi_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,\omega), \\ \displaystyle\sum_j l_j \sum_i \psi_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial u_j} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,\omega), \end{cases}\right\} \text{sous le bénéfice de (4).}$$

Les relations (7′) ne pouvant être distinctes de (7), on a, en désignant par λ et μ deux facteurs de proportionnalité,

$$\left.\begin{aligned}\sum_i \psi_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} &\equiv \lambda u_j\\ \sum_i \psi_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial u_j} &\equiv \mu x_j\end{aligned}\right\} \pmod{\omega} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

II. *Les conditions sont suffisantes.* Pour le démontrer, il suffit de faire voir que, si (1) et (2) sont vérifiées, les relations (3) et (5) résultent de (4). Cela est évident pour la seconde des relations (3) en vertu de ce qui précède.

De (1) on tire

$$\sum_j x_j \sum_i \psi_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} = p \sum_i \varphi_i \psi_i \equiv \lambda \sum_j x_j u_j \equiv 0 \pmod{\omega},$$

c'est-à-dire (5).

Différentions (5), qui peut s'écrire aussi

$$\sum_i \varphi_i \psi_i = \mathrm{M}\omega,$$

il viendra, sous le bénéfice de (4),

$$\sum_i \varphi_i\, d\psi_i + \sum_i \psi_i\, d\varphi_i \equiv \mathrm{M}\left[\sum_i u_i\, dx_i + \sum_i x_i\, du_i\right] \pmod{\omega},$$

c'est-à-dire

$$\sum_i \varphi_i\, d\psi_i \equiv 0 \pmod{\omega}.$$

Le théorème est ainsi démontré.

Il résulte de là que le système (1) et (2) entraîne aussi l'existence du système

$$\left.\begin{aligned}&(1') && \sum_i \varphi_i \frac{\partial\psi_i}{\partial x_j} \equiv \lambda' u_j,\\ &(2') && \sum_i \varphi \frac{\partial\psi_i}{\partial u_j} \equiv \mu' x_j,\end{aligned}\right\} \pmod{\omega} \quad (^1).$$

---

(1) Ma démonstration diffère de celle de Mayer (*Mathematische Annalen*.

3. On peut évidemment sans changer, au point de vue géométrique, la substitution S remplacer

$$\varphi_i \text{ par } a\varphi_i + \alpha_i\omega \quad \text{et} \quad \psi_i \text{ par } b\psi_i + \beta_i\omega,$$

a, b, α_i, β_i étant quelconques. Un calcul aisé montre que ce remplacement laisse subsister (1) et (2), en changeant toutefois la valeur des facteurs λ et μ. Quant à la légitimité du remplacement ci-dessus indiqué, elle résulte de ce que je ne m'occupe du déplacement par S que des éléments principaux.

4. Théorème. — *Si l'une des deux séries de variables x_i ou u_i entre linéairement dans l'une des deux séries de fonctions φ_i et ψ_i, qui définissent* S, *supposée de contact, cette même série de variables manque dans l'autre série de fonctions.*

Soit, par exemple, une substitution de contact

$$S = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i\left(\overset{p}{x}, \overset{q}{u}\right) \\ u_i & \psi_i\left(\overset{r}{x}, \overset{1}{u}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i\left(\overset{p}{x}, \overset{q}{u}\right) \\ u_i & \sum\limits_j u_j \mathrm{P}_{ij}\left(\overset{r}{x}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ u_i & v_i \end{vmatrix}.$$

Une des conditions de contact est (2)

$$(1) \qquad \sum_i \varphi_i \frac{\partial\psi_i}{\partial u_j} = \sum_i \varphi_i \mathrm{P}_{ij}\left(\overset{r}{x}\right) \equiv \mu' x_j.$$

Supposons le déterminant des $\mathrm{P}_{ij}\left(\overset{r}{x}\right)$ $\left(\text{déterminant fonctionnel des dérivées } \frac{\partial\psi_i}{\partial u_j}\right)$ différent de zéro, on tire de (1)

$$\varphi_i \equiv \mu' f_i(x),$$

ce qui démontre le théorème.

---

t. VIII, p. 305, et *Clebsch-Lindemann*, t. III, p. 463) en ce que, au lieu de considérer les six variables x_i, u_i comme indépendantes, je les considère comme liées par (4). Pour passer de mes résultats à ceux de Mayer, il suffit d'annuler dans (1) ou (2) λ ou μ.

Si le déterminant des P_{ij} était identiquement nul [ou $\equiv 0 \pmod{\omega}$), puisque u_i ne figure pas dans ce déterminant], on aurait, en désignant par $\varpi_i(x)$ des formes en x_i convenablement choisies,

$$\sum_i \varpi_i(x) v_i = \sum_i \varpi_i(x) \psi_i = \sum_i \varpi_i(x) \sum_j u_j P_{ij}\binom{r}{x}$$
$$= \sum_j u_j \sum_i \varpi_i(x) P_{ij}\binom{r}{x} = 0,$$

indépendamment des u_i. Quand u, par conséquent, tourne autour du point x, la droite v (ou ψ) tourne autour du point ϖ, ayant pour coordonnées $\varpi_i(x)$; mais (1) le point y est l'intersection des droites v et $v + dv$: donc le point y (ou φ) coïncide avec ϖ; $\varpi_i(x)$ est indépendant des u_i et le théorème est démontré.

Si enfin tous les mineurs du déterminant des P_{ij} étaient nuls, on aurait $\psi_i = a_i \Psi$, ($a_i =$ const.); la droite v serait fixe, quand l'élément principal (x, u) se déplacerait dans le plan. Les ∞^3 éléments principaux du plan se transformeraient en les ∞ éléments principaux formés par la droite fixe v et un point mobile y sur cette dernière. C'est un cas que nous excluons par hypothèse.

Du théorème résulte ce corollaire évident, que nous donnerons sans démonstration :

Corollaire. — *Si dans l'expression de la substitution de contact* S, *donnée plus haut* (2°), *l'un des quatre entiers* p, q, r, s *est l'unité,* S *ne peut avoir que deux formes distinctes :*

$$S = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i\binom{p}{x} \\ u_i & \sum_j u_j P_{ij}\binom{r}{x} \end{vmatrix}, \qquad s = 1, \qquad q = 0 \ (\text{forme } \textit{monistique}),$$

$$S = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i\binom{q}{u} \\ u_i & \sum_j x_j Q_{ij}\binom{s}{u} \end{vmatrix}, \qquad r = 1, \qquad p = 0 \ (\text{forme } \textit{dualistique}).$$

5. Considérons maintenant des substitutions de contact biration-

nelles. Soit S une pareille substitution, étant par hypothèse monistique,

$$S = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i\binom{p}{x} \\ u_i & \sum_j u_j P_{ij}\binom{r}{x} \end{vmatrix};$$

il est bien évident que la substitution ternaire

$$\tau = | \; t_i \quad \varphi_i\binom{p}{t} \; |$$

est une substitution Cremona d'ordre p.

La substitution S étant de contact, on a (**2**), en posant

$$\psi_i = \sum_j u_j P_{ij}\binom{r}{x},$$

la relation

$$(1) \qquad \sum_i \psi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \equiv \mu u_j \qquad (\bmod \omega) \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Le déterminant Φ des $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ est le jacobien du réseau de τ [*voir* mes deux Mémoires *Sur les groupes Cremona* (*Journal de Mathématiques*, 1885 et 1886)] et ne saurait être $\equiv 0 (\bmod \omega)$, c'est-à-dire identiquement nul, puisque u_i ne figure pas dans Φ. On peut résoudre le système (1) par rapport aux ψ_i et l'on en tire

$$\psi_i \equiv \mu \sum_j u_j \Phi_{ij}, \qquad \text{d'où} \qquad P_{ij}\binom{r}{x} = \Phi_{ij},$$

en désignant par Φ_{ij} le coefficient de $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ dans le développement du déterminant Φ, d'où

$$r = 2(p-1),$$

$$S = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i\binom{p}{x} \\ u_i & \sum_j u_j \Phi_{ij}\binom{2(p-1)}{x} \end{vmatrix}.$$

6. On démontrera absolument de la même façon qu'une substitution de contact birationnelle et dualistique est de forme

$$\mathrm{T} = \left| \begin{matrix} x_i & \varphi_i\left(\overset{(q)}{u}\right) \\ u_i & \sum_j x_j \Phi_{ij}\left(\overset{(2(q-1))}{u}\right) \end{matrix} \right|,$$

Φ_{ij} étant le coefficient de $\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}$ dans le développement du déterminant Φ des $\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}$; la substitution ternaire

$$| \, t_i \quad \varphi_i(t) \, |$$

est d'ailleurs aussi une substitution Cremona.

7. Appelons *linéaire* une substitution de contact S dans laquelle aucun des quatre entiers p, q, r, s ne dépasse l'unité. Une substitution linéaire de contact ne peut être (**4**) que monistique (**5**) ou dualistique (**6**). Si la substitution linéaire est monistique, on a évidemment

$$p = 1, \qquad 2(p-1) = 0;$$

si la substitution linéaire est dualistique

$$q = 1, \qquad 2(q-1) = 0.$$

En résumé, une substitution linéaire monistique a est de la forme

$$a = \left| \begin{matrix} x_i & \sum_j a_{ij} x_j \\ u_i & \sum_j \alpha_{ij} u_j \end{matrix} \right|, \qquad a_{ij} = \text{const.} \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

α_{ij} étant le coefficient de a_{ij} dans le développement du déterminant des a_{ij}, c'est-à-dire l'élément du système adjoint au système des a_{ij}.

De même, une substitution linéaire dualistique de contact b sera

$$b = \begin{vmatrix} x_i & \sum\limits_j b_{ij} u_j \\ u_i & \sum\limits_j \beta_{ij} x_j \end{vmatrix}, \qquad b_{ij} = \text{const.} \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

β_{ij} jouant le même rôle par rapport aux b_{ij} que α_{ij} par rapport aux a_{ij}.

8. Appelons A la collinéation des a_{ij},

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

et A′ la collinéation *transposée* des a_{ji};

$$A' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

la collinéation des α_{ij}

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

sera évidemment A'^{-1}.

Cela posé, appelons $A(t)$ l'être géométrique (droite ou plan) qui a pour coordonnées les transformées par la collinéation A des coordonnées t_i de l'être t. La substitution linéaire et monistique de contact a (7) pourra s'écrire, d'après la définition précédente,

$$a = \begin{vmatrix} x & A(x) \\ u & A'^{-1}(u) \end{vmatrix},$$

et la substitution dualistique b,

$$b = \begin{vmatrix} x & \mathrm{B}(u) \\ u & \mathrm{B}'^{-1}(x) \end{vmatrix}.$$

Les collinéations A, B, ... seront les collinéations *directrices* des substitutions linéaires a, b, ...

Remarque. — Un calcul aisé montre que

$$(\mathrm{AB})' = \mathrm{B}'\mathrm{A}';$$

en d'autres termes, le *transposé d'un produit de collinéations est égal au produit des transposées prises en ordre inverse*.

9. Soient deux substitutions rationnelles de contact

$$\mathrm{S} = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(x, u) \\ u_i & \psi_i(x, u) \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{S}' = \begin{vmatrix} x_i & \varphi'_i(x, u) \\ u_i & \psi'_i(x, u) \end{vmatrix};$$

conformément à des conventions que j'ai déjà faites à propos des substitutions Cremona (*Journal de Mathématiques*, p. 433; 1885), la substitution

$$\begin{vmatrix} x_i & \varphi'_i(\varphi, \psi) \\ u_i & \psi'_i(\varphi, \psi) \end{vmatrix}$$

sera, *par définition*, le *produit* S′S *de* S′ *par* S.

Sur la forme même des substitutions linéaires de contact (**7** et **8**), on voit immédiatement que :

1° Une substitution linéaire de contact est birationnelle;

2° Que le produit de deux substitutions linéaires de contact est aussi une substitution linéaire de contact.

Je pourrai, par suite, parler légitimement des *groupes linéaires de contact*, formés de substitutions de la forme a et b (**7** et **8**).

Dans ce qui suit, il n'est question que des substitutions linéaires de contact; pour abréger, j'appellerai simplement *monistique* et *dualistique* la substitution de la forme a et b (**8**).

DEUXIÈME PARTIE.

10. Soient

$$a = \begin{vmatrix} x & A(x) \\ u & A'^{-1}(u) \end{vmatrix}, \qquad b = \begin{vmatrix} x & B(x) \\ u & B'^{-1}(u) \end{vmatrix}, \qquad \dots$$

des substitutions monistiques et

$$c = \begin{vmatrix} x & C(u) \\ u & C'^{-1}(x) \end{vmatrix}, \qquad d = \begin{vmatrix} x & D(u) \\ u & D'^{-1}(x) \end{vmatrix}, \qquad \dots$$

des substitutions dualistiques.

Les règles données plus haut (**9**), pour la multiplication des substitutions, et un calcul aisé montrent que l'on a

$$(1)\quad \begin{cases} ab = \begin{vmatrix} x & AB(x) \\ u & A'^{-1}B'^{-1}(u) \end{vmatrix}, & cd = \begin{vmatrix} x & CD'^{-1}(x) \\ u & C'^{-1}D(u) \end{vmatrix}, \\ a^{-1} = \begin{vmatrix} x & A^{-1}(x) \\ u & A'(u) \end{vmatrix}, & c^{-1} = \begin{vmatrix} x & C'(u) \\ u & C^{-1}(x) \end{vmatrix}, \\ ac = \begin{vmatrix} x & AC(u) \\ u & A'^{-1}C'^{-1}(x) \end{vmatrix}, & c^{-1}ac = \begin{vmatrix} x & C'A'^{-1}C'^{-1}(x) \\ u & C^{-1}AC(u) \end{vmatrix}. \end{cases}$$

LEMME I. — *Soit* G *un groupe linéaire de contact. Les substitutions monistiques contenues dans* G *forment un groupe* g, *contenu dans* G *et permutable à ses substitutions.*

Ce lemme résulte immédiatement des égalités (1).

LEMME II. — *Le groupe* G *résulte de la combinaison du groupe monistique* g *avec une seule substitution dualistique* t.

Soit une seconde substitution dualistique τ de G; le produit $\tau t^{-1} = s$ sera monistique et contenu dans g, ainsi qu'il résulte des égalités (1); donc $\tau = st$. C. Q. F. D.

Il résulte de là que g contient la moitié des substitutions de G; donc :

Lemme III. — *Pour qu'un groupe linéaire de contact* G *soit d'ordre fini, il faut et il suffit que le groupe* g, *formé par les substitutions monistiques de* G, *soit lui-même d'ordre fini.*

Les égalités (1) montrent que le groupe monistique g est isomorphe sans mériédrie au groupe *directeur* Γ, dérivé des collinéations directrices des substitutions de g; par suite :

Théorème. — *Pour qu'un groupe linéaire de contact* G *soit d'ordre fini, il faut et il suffit que le groupe* Γ, *formé par les collinéations directrices des substitutions monistiques de* G, *soit lui-même d'ordre fini.*

Le groupe Γ est l'un des groupes de M. Jordan (*voir* pour le Tableau de ses groupes le Tome 84 du *Journal de Crelle* ou mon Mémoire, inséré dans le LI[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 134). Le groupe monistique g se trouve immédiatement construit dès qu'on se donne Γ. Pour construire G, il reste à construire la substitution dualistique unique

$$t = \begin{vmatrix} x & T(u) \\ u & T'^{-1}(x) \end{vmatrix},$$

qui se combine à g pour former G.

11. Appelons H', groupe *transposé* d'un groupe H de collinéations, le groupe formé par les transposées des collinéations (8) de H; désignons de même par $p^{-1}Hp$ le groupe transformé, par la collinéation p, du groupe H.

Lemme. — *Tout groupe* Γ, *de M. Jordan, coïncide avec son transposé.*

Nous supposerons, bien entendu, que le groupe Γ est général, c'est-à-dire contient *toutes* les collinéations qu'il peut contenir. Nous passerons successivement en revue les divers types de M. Jordan (*Journal de l'École Polytechnique,* LI^e Cahier, p. 134).

Premier type. — Γ dérive des collinéations de la forme

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Un calcul simple montre que

$$A' = K^{-1}A^{-1}KL,$$

$$K = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^2 \end{vmatrix};$$

K figure dans Γ, ainsi que L, puisque a_{33} est racine de l'unité; A' figure ainsi dans Γ, et, comme A est quelconque dans Γ, $\Gamma' = \Gamma$.

Troisième et deuxième types. — Γ résulte de collinéations de la forme

$$P = \begin{vmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{vmatrix},$$

jointes à

$$Q = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad R = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix},$$

p_i, a, b, c = racines de l'unité.

On a

$$P' = P, \qquad Q' = Q^2$$

et

$$RR' = \begin{vmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{vmatrix} = P_1,$$

collinéation du faisceau des P,

$$R' = R^{-1}P_1, \qquad \Gamma' = \Gamma, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Quatrième type. — Transformons Γ par la collinéation

$$k = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix}.$$

Γ dérivera des collinéations

$$A = \begin{vmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau^4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = A', \qquad \tau^5 = 1,$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = B',$$

$$C = \begin{vmatrix} a & 1-a & 2a(1-a)k \\ 1-a & a & -2a(1-a)k \\ k^{-1} & -k^{-1} & (1-2a) \end{vmatrix} = C',$$

si l'on a eu soin de faire

$$2a(1-a)k^2 = 1, \qquad 1 + a(\tau + \tau^4 - 2) = 0.$$

La transformation de Γ par k équivaut, au point de vue géométrique, à un changement de coordonnées et n'altère pas les propriétés du groupe.

Ainsi $\Gamma' = \Gamma$. C. Q. F. D.

Cinquième, sixième et septième types. — Γ résulte des collinéations

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta & 0 \\ 0 & 0 & \theta^2 \end{vmatrix} = A', \qquad \theta^2 + \theta + 1,$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = B'^{-1}, \qquad B' = B^{-1},$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = D',$$

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \theta \\ 1 & \theta & 1 \\ 1 & \theta^2 & \theta^2 \end{vmatrix}, \qquad E' = (B^{-1}DB)^{-1}E(B^{-1}DB);$$

$$\Gamma' = \Gamma$$

C. Q. F. D.

Huitième type. — Γ dérive des collinéations suivantes :

$$A = \begin{vmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau^2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau^4 \end{vmatrix} = A', \qquad \tau^7 = 1,$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = B'^{-1}, \qquad B' = B^{-1},$$

$$C = \begin{vmatrix} a & c & b \\ c & b & a \\ b & a & c \end{vmatrix} = C';$$

par conséquent, $\Gamma = \Gamma'$.

C. Q. F. D.

12. Théorème. — *Si Γ est l'un des groupes de M. Jordan, G résulte de la combinaison de g avec la substitution dualistique unique*

$$t_0 = \begin{vmatrix} x & u \\ u & x \end{vmatrix}.$$

Soit t la substitution dualistique qui se combine à g pour former G (**10**),

$$t = \begin{vmatrix} x & \mathrm{T}(u) \\ u & \mathrm{T}'^{-1}(x) \end{vmatrix};$$

prenons dans G une substitution quelconque

$$s = \begin{vmatrix} x & \mathrm{S}(x) \\ u & \mathrm{S}'^{-1}(u) \end{vmatrix},$$

et considérons

$$t^{-1}st = \begin{vmatrix} x & \mathrm{T}'\mathrm{S}'^{-1}\mathrm{T}'^{-1}(x) \\ u & \mathrm{T}^{-1}\mathrm{S}\mathrm{T}(u) \end{vmatrix}.$$

Comme S est quelconque dans Γ, on voit que les groupes $\mathrm{T}'\Gamma'\mathrm{T}'^{-1}$ et Γ coïncident, mais Γ' n'est pas distinct de Γ (**11**), et, par suite, T et T′ sont permutables à Γ. En transformant Γ par T, on effectue entre les diverses collinéations de Γ une certaine substitution γ, dont m est l'ordre, $\gamma^m = 1$. Par conséquent, la collinéation T^m est échangeable à *toutes* les collinéations de Γ. Ici deux cas sont à distinguer, suivant la nature de Γ.

Si Γ est des sept derniers types de M. Jordan, $\mathrm{T}^m = 1$, en vertu des propriétés connues de ces groupes, puisque T^m est échangeable à toutes les collinéations de Γ. La collinéation T et le groupe Γ_1 dérivé de Γ et de T sont d'ordre fini; comme Γ est supposé général (**11**), Γ_1 coïncide avec Γ, et Γ contient T; par suite, la substitution

$$\tau = \begin{vmatrix} x & \mathrm{T}^{-1}(x) \\ u & \mathrm{T}'(u) \end{vmatrix}$$

figure dans g, et la substitution

$$\tau t = \begin{vmatrix} x & u \\ u & x \end{vmatrix} = t_0$$

figure dans G, qui résulte de la combinaison de g avec t_0.

C. Q. F. D.

Si Γ est du premier type, ses collinéations sont toutes de la forme (**11**),

$$S = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix};$$

T est permutable à Γ et (comme un calcul aisé le montre) de la même forme

$$T = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{vmatrix}.$$

Appelons γ le groupe des collinéations binaires

$$\sigma = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

la collinéation T^m, étant échangeable à *toutes* les collinéations de Γ, ne peut être que

$$T^m = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix}.$$

Cela prouve que la binaire

$$\tau = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{vmatrix}$$

est d'ordre fini, ainsi que le groupe binaire γ_1 dérivé de γ et τ. On démontrera, comme il y a un instant, que τ est contenue dans γ, supposé général. La substitution

$$b = \begin{vmatrix} x & B(x) \\ u & B'^{-1}(u) \end{vmatrix},$$

où

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{vmatrix}$$

et

$$\beta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} = \tau^{-1},$$

figure dans g, et la substitution dualistique

$$bt = \begin{vmatrix} u & K(u) \\ x & K'^{-1}(x) \end{vmatrix} = k,$$

où la collinéation

$$K = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix}$$

figure dans G, qui provient de la combinaison de g avec k.

La substitution dualistique k équivaut, au point de vue géométrique, à la réciprocité polaire (transformation par polaires réciproques) par rapport à la conique (z_i coordonnées courantes)

$$f = z_1^2 + z_2^2 + kz_3^2 = 0.$$

Si nous effectuons le changement de coordonnées

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_1 & z_2 & k^{-\frac{1}{2}}z_3 \end{vmatrix},$$

qui équivaut à transformer Γ par la collinéation

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix},$$

nous voyons que Γ ne change pas et que la conique $f = 0$ devient

$$f_1 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2;$$

la substitution dualistique qui exprime la transformation par polaires réciproques par rapport à $f_1 = 0$ est précisément

$$t_0 = \begin{vmatrix} x & u \\ u & x \end{vmatrix},$$

et G dérive de g et t_0. C. Q. F. D.

Nous avons démontré ainsi les divers résultats annoncés dans l'Introduction.