JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DAVID

Applications de la dérivation d'Arbogast. - Formule générale pour le changement de la variable indépendante

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 3 (1887), p. 53-62.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1887_4_3__53_0>

Applications de la dérivation d'Arbogast. — Formule générale pour le changement de la variable indépendante;

PAR M. DAVID.

Cette petite Note doit être considérée comme la suite de celle que j'ai publiée dans le *Journal de Mathématiques*, février 1882, et elle a surtout pour objet d'ajouter aux divers problèmes, que j'ai alors résolus, une formule générale pour le changement de la variable indépendante. Les Traités de Calcul différentiel donnent bien la méthode pour obtenir ce changement; mais on est bientôt forcé de s'arrêter à cause des calculs prolixes que l'on rencontre et dans lesquels aucune loi ne se manifeste. En employant la notation d'Arbogast, on arrive à résoudre le problème dans le cas général; ce qui est une nouvelle confirmation de l'observation de Lacroix, que cette méthode a été trop peu remarquée.

Avant d'entrer dans la question elle-même, j'établirai une formule qui peut servir encore à d'autres usages.

1° D'après la formule fondamentale du Mémoire cité plus haut, on a

$$\begin{aligned} a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots &= (a^r + x\mathrm{D}a^r + x^2\mathrm{D}^2 a^r + \ldots)^{\frac{1}{r}} \\ &= (a^s + x\mathrm{D}a^s + x^2\mathrm{D}^2 a^s + \ldots)^{\frac{1}{s}}. \end{aligned}$$

En différentiant, puis divisant cette identité par celle qui résulte de la différentiation, il vient

$$\frac{r(a^r + x\,\mathrm{D}a^r + x^2\mathrm{D}^2a^r + \ldots)}{\mathrm{D}a^r + 2x\,\mathrm{D}^2a^r + 3x^2\mathrm{D}^3a^r + \ldots} = \frac{s(a^s + x\,\mathrm{D}a^s + x^2\mathrm{D}^2a^s) + \ldots}{\mathrm{D}a^s + 2x\,\mathrm{D}^2a^s + 3x^2\mathrm{D}^3a^s + \ldots}.$$

En égalant les coefficients des puissances de $x^{\alpha-1}$, on obtient la formule

$$\Sigma(kr - hs)\,\mathrm{D}^h a^r\,\mathrm{D}^k a^s = 0,$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières et positives de h et k qui satisfont à l'équation

$$(1) \qquad k + h = \alpha.$$

La formule classique du Calcul différentiel devient, en se servant de la notation d'Arbogast,

$$\mathrm{D}^\alpha a^{r+s} = \Sigma\,\mathrm{D}^h a^r\,\mathrm{D}^k a^s;$$

et en ajoutant, après avoir multiplié par une constante arbitraire t, on a la formule plus générale

$$(2) \qquad t\,\mathrm{D}^\alpha a^{r+s} = \Sigma(kr - hs + t)\,\mathrm{D}^h a^r\,\mathrm{D}^k a^s,$$

qui remplace les deux autres en donnant à t deux valeurs quelconques, principalement 0 et ∞.

2° Nous rapprocherons de celle-ci, à cause de la similitude du sujet, bien que nous n'ayons pas à nous en servir, la formule suivante :

$$(2\ bis) \qquad \left\{ \begin{aligned} & -\frac{t(r+s)}{qrs}\,\mathrm{D}^\alpha \frac{a^{-\frac{qr+qs+\alpha}{p}}}{-qr-qs-\alpha} \\ & = \Sigma(kr - hs + t)\,\mathrm{D}^h \frac{a^{-\frac{qr+h}{p}}}{-qr-h}\,\mathrm{D}^k \frac{a^{-\frac{qs+k}{p}}}{-qs-k} \end{aligned} \right.$$

qui paraît digne de remarque.

Il faut, dans la Note citée, se reporter à la série

$$u = a z^{\frac{p}{q}} + a_1 z^{\frac{p+1}{q}} + a_2 z^{\frac{p+2}{q}} + \ldots,$$

qui donne par l'inversion la première formule de la page 68, à savoir :

$$\frac{z^r}{-qr} = u^{\frac{qr}{p}} \frac{a^{-\frac{pq}{r}}}{-qr} + u^{\frac{qr+1}{p}} \mathrm{D} \frac{a^{-\frac{qr+1}{p}}}{-qr-1} + u^{\frac{qr+2}{p}} \mathrm{D}^2 \frac{a^{-\frac{qr+2}{p}}}{-qr-2} + \ldots ;$$

on en conclut l'identité

$$\begin{aligned} z &= \left(u^{\frac{qr}{p}} a^{-\frac{qr}{p}} + \frac{qr}{qr+1} u^{\frac{qr+1}{p}} \mathrm{D} a^{-\frac{qr+1}{p}} + \frac{qr}{qr+2} u^{\frac{qr+2}{p}} \mathrm{D}^2 a^{-\frac{qr+2}{p}} + \ldots \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \left(u^{\frac{qs}{p}} a^{-\frac{qs}{p}} + \frac{qr}{qs+1} u^{\frac{qs+1}{p}} \mathrm{D} a^{-\frac{qs+1}{p}} + \frac{qs}{qs+2} u^{\frac{qs+2}{p}} \mathrm{D}^2 a^{-\frac{qs+2}{p}} + \ldots \right)^{\frac{1}{s}}. \end{aligned}$$

En la différentiant, puis la divisant par celle qui résulte de cette différentiation, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{z}\frac{dz}{du} &= \frac{u^{\frac{qr}{p}-1} a^{-\frac{qr}{p}} + u^{\frac{qr+1}{p}-1} \mathrm{D} a^{-\frac{qr+1}{p}} + u^{\frac{qr+2}{p}-1} \mathrm{D}^2 a^{-\frac{qr+2}{p}} + \ldots}{\frac{qr}{qr} u^{\frac{qr}{p}} a^{-\frac{qr}{p}} + \frac{qr}{qr+1} u^{\frac{qr+1}{p}} \mathrm{D} a^{-\frac{qr+1}{p}} + \frac{qr}{qr+2} u^{\frac{qr+2}{p}} \mathrm{D}^2 a^{-\frac{qr+2}{p}} + \ldots} \\ &= \frac{u^{\frac{qs}{p}-1} a^{-\frac{qs}{p}} + u^{\frac{qs+1}{p}-1} \mathrm{D} a^{-\frac{qs+1}{p}} + u^{\frac{qs+2}{p}-1} \mathrm{D}^2 a^{-\frac{qs+2}{p}} + \ldots}{\frac{qs}{qs} u^{\frac{qs}{p}} a^{-\frac{qs}{p}} + \frac{qs}{qs+1} u^{\frac{qs+1}{p}} \mathrm{D} a^{-\frac{qs+1}{p}} + \frac{qs}{qs+2} u^{\frac{qs+2}{p}} \mathrm{D}^2 a^{-\frac{qs+2}{p}} + \ldots} ; \end{aligned}$$

puis, en égalant les coefficients d'une même puissance de u, il vient

$$\Sigma(kr - hs)\,\mathrm{D}^h \frac{a^{-\frac{qr+h}{p}}}{-qr-h}\,\mathrm{D}^k \frac{a^{-\frac{qs+k}{p}}}{-qs-k} = 0,$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières nulles et positives de h et k qui satisfont à l'équation (1). Pour l'application de cette formule à des cas particuliers, il est bon de noter l'identité suivante :

$$kr - hs = r(qs + k) - s(qr + h).$$

En dirigeant les calculs d'une autre manière, on trouve une seconde formule.

La formule rappelée ci-dessus, à savoir

$$\frac{z^r}{-qr} = u^{\frac{qr}{p}} \frac{a^{-\frac{qr}{p}}}{-qr} + u^{\frac{qr+1}{p}} \mathrm{D} \frac{a^{-\frac{qr+1}{p}}}{-qr-1} + u^{\frac{qr+2}{p}} \mathrm{D}^2 \frac{a^{-\frac{qr+2}{p}}}{-qr-2} + \dots,$$

donne par le changement de r en s, puis par le changement de r en $r+s$,

$$-\frac{z^s}{qs} = u^{\frac{qs}{p}} \frac{a^{-\frac{qs}{p}}}{-qs} + u^{\frac{qs+1}{p}} \mathrm{D} \frac{a^{-\frac{qs+1}{p}}}{-qs-1} + u^{\frac{qs+2}{p}} \mathrm{D}^2 \frac{a^{-\frac{qs+2}{p}}}{-qs-2} + \dots$$

$$-\frac{z^{r+s}}{q(r+s)} = u^{\frac{qr+qs}{p}} \frac{a^{-\frac{qr+qs}{p}}}{-qr-qs} + u^{\frac{qr+qs+1}{p}} \mathrm{D} \frac{a^{-\frac{qr+qs+1}{p}}}{-qr-qs-1} + u^{\frac{qr+qs+2}{p}} \mathrm{D}^2 \frac{a^{-\frac{qr+qs+2}{p}}}{-qr-qs-2} + \dots.$$

En multipliant les deux premières entre elles, il vient

$$\begin{aligned}
\frac{z^{r+s}}{q^2 rs} = {} & u^{\frac{qr+qs}{p}} \frac{a^{-\frac{qr}{p}}}{-qr} \frac{a^{-\frac{qs}{p}}}{-qs} \\
& + u^{\frac{qr+qs+1}{p}} \left[\frac{a^{-\frac{qr}{p}}}{-qr} \mathrm{D} \frac{a^{-\frac{qs+1}{p}}}{-qs-1} + \mathrm{D} \frac{a^{-\frac{qr+1}{p}}}{-qr-1} \frac{a^{-\frac{qs}{p}}}{-qs} \right] + \dots \\
& + u^{\frac{qr+qs+\alpha}{p}} \left[\frac{a^{-\frac{qr}{p}}}{-qr} \mathrm{D}^\alpha \frac{a^{-\frac{qs+\alpha}{p}}}{-qs-\alpha} \right. \\
& \qquad + \mathrm{D} \frac{a^{-\frac{qr+1}{p}}}{-qr-1} \mathrm{D}^{\alpha-1} \frac{a^{-\frac{qs+\alpha-1}{p}}}{-qs-\alpha+1} \\
& \qquad \left. + \mathrm{D}^2 \frac{a^{-\frac{qr+2}{p}}}{-qr-2} \mathrm{D}^{\alpha-2} \frac{a^{-\frac{qs+\alpha-2}{p}}}{-qs-\alpha+2} \right] + \dots.
\end{aligned}$$

Comparant celle-ci avec la troisième et égalant les puissances égales de u, on trouve la formule

$$-\frac{r+s}{qrs} \mathrm{D}^\alpha \frac{a^{-\frac{qr+qs+\alpha}{p}}}{-qr-qs-\alpha} = \Sigma \mathrm{D}^h \frac{a^{-\frac{qr+h}{p}}}{-qr-h} \mathrm{D}^k \frac{a^{-\frac{qs+k}{p}}}{-qs-k}.$$

De celle-ci et de la précédente on passe facilement à la formule (2 *bis*), en les ajoutant après avoir multiplié la seconde par une constante arbitraire t indépendante de k et h, et qui reçoit principalement les valeurs o et ∞. Ce n'est qu'une manière d'écrire sous une forme unique les deux équations comprises dans (2 *bis*).

La notation différentielle donnerait bien aussi les mêmes formules (2) et (2 *bis*), mais dans une forme plus compliquée.

3° Revenons au changement de variable indépendante dont il s'agit.

z étant une fonction de x et par suite x une fonction de z, nous posons, pour abréger,

$$a_1 = \frac{dz}{dx}, \qquad a_2 = \frac{d^2 z}{1.2\,dx^2}, \qquad a_3 = \frac{d^3 z}{1.2.3\,dx^3}, \qquad \ldots$$

et, avec le changement de variable,

$$b_1 = \frac{dx}{dz}, \qquad b_2 = \frac{d^2 x}{1.2\,dz^2}, \qquad b_3 = \frac{d^3 x}{1.2.3\,dz^3}, \qquad \ldots;$$

et à la place de l'équation

$$\frac{dz}{dx}\,\frac{dx}{dz} = 1$$

nous écrivons

$$a_1 b_1 = 1,$$

dans laquelle a_1 est une fonction de x et b_1 une fonction de z.

En différentiant par rapport à x, il vient

$$(3) \qquad \frac{a_1}{[n-1]}\,\frac{d^{n-1}b_1}{dx^{n-1}} + \frac{2a_2}{[n-2]}\,\frac{d^{n-2}b_1}{dx^{n-2}} + \frac{3a^3}{[n-3]}\,\frac{d^{n-3}b_1}{dx^{n-3}} + \ldots = 0;$$

les expressions $[n-1]$, $[n-2]$,... désignant les factorielles

$$1.2.3\ldots(n-1), \qquad 1.2.3\ldots(n-2).$$

D'après le théorème des fonctions de fonctions (p. 67 du Mémoire cité), on a

$$\frac{1}{[n]}\frac{d^n b_1}{dx^n} = \frac{d^n b_1}{dz}\frac{a_1^n}{[n]} + \frac{d^{n-1} b_1}{dz^{n-1}}\mathrm{D}\frac{a_1^{n-1}}{[n-1]} + \frac{d^{n-2} b_1}{dz^{n-2}}\mathrm{D}^2\frac{a_1^{n-2}}{[n-2]} + \ldots$$

ou bien, par les notations ci-dessus,

$$\frac{1}{[n]}\frac{d^n b_1}{dx^n} = (n+1)\,b_{n+1}\,a_1^n + nb_n\mathrm{D}a_1^{n-1} + (n-1)\,b_{n-1}\,\mathrm{D}^2 a_1^{n-2} + \ldots.$$

La substitution dans l'équation (3) donne ensuite

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &nb_n a_1^n + (n-1)\,b_{n-1}(a_1\mathrm{D}a^{n-2} + 2a_2 a_1^{n-2}) \\ &\qquad + (n-2)\,b_{n-2}(a_1\mathrm{D}^2 a_1^{n-3} + 2a_2\mathrm{D}a_1^{n-3} + 3a_3 a_1^{n-3}) + \ldots = 0. \end{aligned}\right.$$

Maintenant j'emploie la formule (2) qui équivaut, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus, à deux autres équations, à savoir : en faisant

$$t = 0, \qquad r = 1, \qquad s = n-p-1, \qquad \alpha = p,$$

à l'équation

$$\Sigma[p-(n-p)h]\,\mathrm{D}^h a\mathrm{D}^{p-h}a^{n-p-1} = 0,$$

et en faisant

$$t = \infty, \qquad r = 1, \qquad s = n-p-1, \qquad \alpha = p,$$

à l'équation

$$\mathrm{D}^p a^{n-p} = \Sigma\,\mathrm{D}^h a\mathrm{D}^{p-h}a^{n-p-1}.$$

En retranchant ces deux équations l'une de l'autre, après avoir multiplié la deuxième par n et changé a en a_1, il vient

$$n\mathrm{D}^p a_1^{n-p} = (n-p)\,\Sigma(1+h)\,\mathrm{D}^h a_1\,\mathrm{D}^{p-h}a_1^{n-p-1},$$

puis

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^p a_1^{n-p} &= \frac{n-p}{n}\Sigma(1+h)\,a_{1+h}\mathrm{D}^{p-h}a_1^{n-p-1} \\ &= \frac{n-p}{n}\,|a_1\mathrm{D}^p a_1^{n-p-1} + 2a_2\mathrm{D}^{p-1}a_1^{n-p-1} + 3a_3\mathrm{D}^{p-2}a_1^{n-p-1} + \ldots|. \end{aligned}$$

Par là l'équation (4) s'écrit

$$(5) \qquad b_n a_1^n + b_{n-1} \mathrm{D} a_1^{n-1} + b_{n-2} \mathrm{D}^2 a_1^{n-2} + \ldots = 0;$$

c'est la généralisation de la formule $a_1 b_1 = 1$ pour les différentiations d'ordre supérieur.

En faisant successivement dans celle-ci

$$n = 1, \qquad n = 2, \qquad n = 3, \qquad \ldots,$$

on a les équations

$$(6) \qquad \begin{cases} b_1 a_1 = 1, \\ b_1 \mathrm{D}\, a_1 + b_2 a_1^2 = 0, \\ b_1 \mathrm{D}^2 a_1 + b_2 \mathrm{D}_1^2 + b_3 a_1^3 = 0, \\ b_1 \mathrm{D}^3 a_1 + b_2 \mathrm{D}^2 a_1^2 + b_3 \mathrm{D} a_1^3 + b_4 a_1^4 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

d'où l'on tire sous forme de déterminant, par exemple pour $n = 5$,

$$(7) \qquad b_5 = \frac{(-1)^{5-1}}{a_1^{\frac{5.6}{2}}} \begin{vmatrix} \mathrm{D}\, a_1 & a_1^2 & 0 & 0 \\ \mathrm{D}^2 a_1 & \mathrm{D}\, a_1^2 & a_1^3 & 0 \\ \mathrm{D}^3 a_1 & \mathrm{D}^2 a_1^2 & \mathrm{D}\, a_1^3 & a_1^4 \\ \mathrm{D}^4 a_1 & \mathrm{D}^3 a_1^2 & \mathrm{D}^2 a_1^3 & \mathrm{D} a_1^4 \end{vmatrix}.$$

La loi est assez évidente pour qu'il soit inutile d'écrire le déterminant sous la forme générale. C'est la formule pour le changement de la variable indépendante qui a été annoncée.

Remarque. — Il est peut-être bon, pour abréger d'autres calculs analogues, de mettre en évidence la solution des équations suivantes dont on s'est servi pour former le déterminant (7).

Les équations données étant

$$\begin{aligned} &xa = 1, \\ &xa_1 + yb_1 = 0, \\ &xa_2 + yb_2 + zc_2 = 0, \\ &xa_3 + yb_3 + zc_3 + vd_3 = 0, \\ &xa_4 + yb_4 + zc_4 + vd_4 + ue_4 = 0, \end{aligned}$$

on sait, par la règle connue, que les inconnues x, y, z, v, u sont données par les formules

$$x=\frac{X}{D},\quad y=\frac{Y}{D},\quad z=\frac{Z}{D},\quad v=\frac{V}{D},\quad u=\frac{U}{D},$$

les déterminants X, Y, Z, V, U, D étant mis sous la forme symbolique

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0\\ a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0\\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0\\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & 0\\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \end{vmatrix},\qquad X=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_2 & c_2 & 0 & 0\\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 & 0\\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \end{vmatrix},$$

$$Y=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0\\ a_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a_2 & 0 & c_2 & 0 & 0\\ a_3 & 0 & c_3 & d_3 & 0\\ a_4 & 0 & c_4 & d_4 & e_4 \end{vmatrix},\qquad Z=\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 0 & 0\\ a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0\\ a_2 & b_2 & 0 & 0 & 0\\ a_3 & b_3 & 0 & d_3 & 0\\ a_4 & b_4 & 0 & d_4 & e_4 \end{vmatrix},$$

$$V=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 1 & 0\\ a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0\\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0\\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0\\ a_4 & b_4 & c_4 & 0 & e_4 \end{vmatrix},\qquad U=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 1\\ a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0\\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0\\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & 0\\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & 0 \end{vmatrix},$$

ou, plus simplement,

$$D=ab_1c_2d_3e_4,\qquad X=\begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0\\ b_2 & c_2 & 0 & 0\\ b_3 & c_3 & d_3 & 0\\ b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \end{vmatrix},$$

$$Y = -\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & c_2 & 0 & 0 \\ a_3 & c_3 & d_3 & 0 \\ a_4 & c_4 & d_4 & e_4 \end{vmatrix}, \qquad Z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & d_3 & 0 \\ a_4 & b_4 & d_4 & e_4 \end{vmatrix},$$

$$V = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & e_4 \end{vmatrix}, \qquad U = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Ceci suppose qu'il y a cinq équations données; pour un plus grand nombre, il n'y a qu'à observer la loi que suivent les déterminants X, Y, ...

Considérons maintenant les divers systèmes d'équations

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l|l|l|l} xa = 1 & xa = 1 & xa = 1 & \\ & xa_1 + vb_1 = 0 & xa_1 + yb_1 = 0 & \ldots \\ & & xa_2 + yb_2 + zc_2 = 0 & \end{array} \right.$$

les valeurs des x, y, z, ... sont données respectivement par les formules

$$x = \frac{1}{a}, \qquad y = -\frac{a_1}{ab_1}, \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{a\ b_1\ c_2},$$

$$v = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{a\ b_1\ c_2\ d_3}, \qquad u = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}{a\ b_1\ c_2\ d_3\ e_4}.$$

La comparaison des équations (8) avec les équations (6) donne

$$b_1 = \frac{1}{a_1}, \qquad b_2 = -\frac{Da_1}{a_1^3}, \qquad b_3 = \frac{1}{a_1^6} \begin{vmatrix} D\,a_1 & a_1^2 \\ D^2 a_1 & D^2 a_1^2 \end{vmatrix},$$

$$b_4 = -\frac{1}{a_1^{10}}\begin{vmatrix} \mathrm{D}\,a_1 & a_1^2 & 0 \\ \mathrm{D}^2 a_1 & \mathrm{D}\,a_1^2 & a_1^3 \\ \mathrm{D}^3 a_1 & \mathrm{D}^2 a_1^2 & \mathrm{D} a_1^3 \end{vmatrix}$$

et enfin

$$b_5 = \frac{(-1)^{5-1}}{a_1^{\frac{5.6}{2}}}\begin{vmatrix} \mathrm{D}\,a_1 & a_1^2 & 0 & 0 \\ \mathrm{D}^2 a_1 & \mathrm{D}\,a_1^2 & a_1^3 & 0 \\ \mathrm{D}^3 a_1 & \mathrm{D}^2 a_1^2 & \mathrm{D}\,a_1^3 & a_1^4 \\ \mathrm{D}^4 a_1 & \mathrm{D}^3 a_1^2 & \mathrm{D}^2 a_1^3 & \mathrm{D} a_1^4 \end{vmatrix},$$

ce qui est la formule (7).