JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. LAGUERRE

Sur la réduction en fractions continues d'une fraction qui satisfait à une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les coefficients sont rationnels

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 1 (1885), p. 135-165.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1885_4_1__135_0>

Sur la réduction en fractions continues d'une fraction qui satisfait à une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les coefficients sont rationnels;

PAR M. E. LAGUERRE.

I.

1. Je considère une série z, ordonnée suivant les puissances décroissantes de x et qui satisfait identiquement à l'équation différentielle linéaire

$$W z' = 2 V z + U, \tag{1}$$

où U, V et W désignent des polynômes entiers, et je me propose d'étudier son développement en fractions continues.

La série z peut, d'ailleurs, être divergente pour toute valeur de x: rien n'empêche de la réduire en fractions continues; il sera seulement nécessaire de déterminer pour quelles valeurs de x les réduites forment une suite convergente et quelle est la fonction dont elles donnent la valeur.

Dans tout ce qui suit, étant donné un polynôme ou une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x, j'appellerai degré du polynôme ou de la série le degré de son premier terme, et je représenterai simplement par la notation $\left(\frac{1}{x^n}\right)$, en faisant abstraction de ses coefficients, une série commençant par un terme du degré $-n$.

2. Cela posé, on sait que, f_n désignant un polynôme entier de degré n, on peut toujours disposer des $(n+1)$ coefficients qu'il renferme, de telle sorte que, φ_n désignant la partie entière de zf_n, le développement de l'expression $z - \frac{\varphi_n}{f_n}$ commence par un terme du degré de $\frac{1}{x^{2n+1}}$; une telle fraction $\frac{\varphi_n}{f_n}$ se nomme une réduite de z. Pour certaines valeurs du nombre entier n, il peut même arriver que l'approximation soit plus grande et que le premier terme du développement de $z - \frac{\varphi_n}{f_n}$ soit d'un degré inférieur à celui de $\frac{1}{x^{2n+1}}$; dans ce cas, il y a surapproximation.

En général, on aura donc, d'après la définition des réduites,

$$z = \frac{\varphi_n}{f_n} + \left(\frac{1}{x^{2n+\rho+1}}\right),$$

où ρ désigne un nombre entier positif ou zéro; de là

$$z' = \frac{\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n}{f_n^2} + \left(\frac{1}{x^{2n+\rho+2}}\right)$$

et, en portant ces valeurs de z et z' dans la relation (1),

$$U + 2V\frac{\varphi_n}{f_n} - W\frac{\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n}{f_n^2} + 2V\left(\frac{1}{x^{2n+\rho+1}}\right) - W\left(\frac{1}{x^{2n+\rho+2}}\right) = 0$$

ou encore

$$Uf_n^2 + 2V\varphi_n f_n - W(\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n) = f_n^2\left[V\left(\frac{1}{x^{2n+\rho+1}}\right) + W\left(\frac{1}{x^{2n+\rho+2}}\right)\right].$$

Soit μ le degré de la série $V\left(\frac{1}{x}\right) + W\left(\frac{1}{x^2}\right)$; il est clair que le premier membre de cette égalité est un polynôme entier; il en est de même du second, qui est du degré $(\mu - \rho)$; on pourra donc poser, en désignant par A_n une constante dont la valeur dépendra du nombre entier n et par Θ_n un polynôme entier du degré $\mu - \rho$,

$$Uf_n^2 + 2V\varphi_n f_n - W(\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n) = A_n \Theta_n. \tag{2}$$

Θ_n est un polynôme entier du degré $\mu - \rho$, il est, par conséquent, d'un degré égal ou inférieur à μ. En général, il est du degré μ, et son degré ne s'abaisse que quand, pour certaines valeurs du nombre n, il y a surapproximation. Le maximum d'approximation aura lieu pour $\rho = \mu$, auquel cas Θ est une constante; une approximation plus grande ne peut avoir lieu : autrement, Θ étant nul, on voit que z serait égal à la fonction rationnelle $\frac{\varphi_n}{f_n}$, cas que j'écarte expressément.

5. Réciproquement, si l'on peut déterminer deux polynômes entiers φ_n et f_n, tels que le premier membre de l'égalité (2) se réduise à un polynôme du degré μ ou d'un degré inférieur, $\frac{\varphi_n}{f_n}$ est une réduite de la série z.

Ayant posé, en effet,

$$z = \frac{\varphi_n}{f_n} + u,$$

d'où

$$z' = \frac{\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n}{f_n^2} + u',$$

l'identité (2) devient

$$\frac{A_n \Theta_n}{f_n^2} = U + 2Vz - Wz' - 2Vu - Wu'$$

ou encore, par suite de l'équation (1),

$$\frac{A_n \Theta_n}{f_n^2} = -2Vu - Wu'.$$

Le premier membre de cette égalité est au plus du degré de

$$\frac{1}{x^{2n+1}}\left(V + \frac{W}{x}\right),$$

et le second, du degré de

$$u\left(V + \frac{W}{x}\right);$$

d'où il résulte que u est au plus de degré de $\frac{1}{x^{2n+1}}$, et, par suite, $\frac{\varphi_n}{f_n}$ est une réduite de la série z.

3. Toute la question se réduit ainsi à la solution par des polynômes entiers de l'équation (2), le polynôme Θ_n étant d'un degré au plus égal à μ; et, tout d'abord, j'en déduirai que f_n satisfait à une équation linéaire du second ordre.

A cet effet, je forme l'équation

$$My'' - Ny' + Py = 0,$$

qui a pour solutions

$$y_1 = f_n \quad \text{et} \quad y_2 = e^{2\int \frac{V}{W} dx}(\varphi_n - z f_n).$$

En posant, pour abréger,

$$\omega = y'_1 y_2 - y'_2 y_1,$$

on a, d'après une formule connue,

$$\frac{N}{M} = \frac{d}{dx} \log \omega;$$

or un calcul facile donne

$$\omega = e^{2\int \frac{V}{W} dx} \frac{U f_n^2 + 2V \varphi_n f_n - W(\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n)}{W},$$

et, en tenant compte de l'identité (2),

$$\omega = e^{2\int \frac{V}{W} dx} \frac{A_n \Theta_n}{W};$$

d'où

$$\frac{N}{M} = \frac{\Theta'_n}{\Theta_n} - \frac{W'}{W} - \frac{2V}{W};$$

et de là résulte immédiatement que l'équation cherchée est de la forme

$$(3) \qquad W\Theta_n y'' + [(2V + W')\Theta_n - W\Theta'_n] y' + K_n y = 0.$$

Cette équation doit, d'ailleurs, être satisfaite quand on y fait $y = f_n$; K_n est donc un polynôme entier dont le degré est indépendant du nombre n.

4. Supposons maintenant que, A_n et Θ_n désignant des polynômes entiers dont le dernier soit d'un degré égal ou inférieur à μ, un polynôme entier f_n satisfasse à l'équation (3), je dis que l'on peut déterminer le polynôme U qui figure dans l'équation différentielle (1), de telle sorte que la série z qui satisfait à cette équation ait une réduite dont le dénominateur soit f_n.

Soient, en effet, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les diverses racines de l'équation $f_n(x) = 0$; décomposons en éléments simples la fraction $\frac{A_n\Theta_n}{Wf_n^2}$, et posons

$$\frac{A_n\Theta_n}{Wf_n^2} = \frac{G_n}{W} + \sum\frac{p_\alpha}{(x-\alpha)^2} + \sum\frac{q_\alpha}{x-\alpha}.$$

Pour avoir les coefficients p_α et q_α, il faut diviser

$$A_n[\Theta_n(\alpha) + \Theta_n'(\alpha)h]$$

par

$$f_n'(\alpha)\{W(\alpha)f_n'(\alpha) + [W(\alpha)f_n''(\alpha) + W'(\alpha)f_n'(\alpha)]h\};$$

or, $f_n(x)$ satisfaisant à l'équation (3), on a évidemment

$$\Theta_n(\alpha)[W'(\alpha)f_n'(\alpha) + W(\alpha)f_n''(\alpha)] = f_n'(\alpha)[W(\alpha)\Theta_n'(\alpha) - 2V(\alpha)\Theta_n(\alpha)];$$

le diviseur devient, par suite,

$$f_n'^2(\alpha)\left[W(\alpha) + \frac{W(\alpha)\Theta_n'(\alpha) - 2V(\alpha)\Theta_n(\alpha)}{\Theta_n(\alpha)}h\right],$$

et le quotient

$$\frac{A_n\Theta_n(\alpha)}{f_n'^2(\alpha)W(\alpha)}\left[1 + \frac{2V(\alpha)}{W(\alpha)}h\right];$$

d'où l'on déduit la relation suivante

$$q_\alpha = 2p_\alpha\frac{V(\alpha)}{W(\alpha)}.$$

Je pose maintenant

$$\sum\frac{p_\alpha}{x-\alpha} = \frac{\varphi_n}{f_n},$$

$$\sum\frac{q_\alpha}{x-\alpha} = \frac{P_n}{f_n},$$

en sorte que l'on ait

$$(4)\qquad \frac{A_n \Theta_n}{W f_n^2} = \frac{G_n}{W} + \frac{P_n}{f_n} - \frac{d}{dx}\frac{\varphi_n}{f_n} \quad (^1);$$

et je considère l'expression

$$\frac{P_n}{f_n} - 2\frac{V}{W}\frac{\varphi_n}{f_n} = \sum\left(q_\alpha - \frac{2V}{W}p_\alpha\right)\frac{1}{x-\alpha}.$$

L'identité démontrée plus haut,

$$q_\alpha = 2\frac{V(\alpha)}{W(\alpha)}p_\alpha,$$

montre que cette expression ne devient infinie pour aucun des zéros de f_n; on a donc, H_n désignant un polynôme entier,

$$(5)\qquad \frac{P_n}{f_n} - \frac{2V}{W}\frac{\varphi_n}{f_n} = \frac{H_n}{W}.$$

Éliminons P_n entre les identités (4) et (5), il viendra, après avoir chassé le dénominateur,

$$A_n \Theta_n = (G_n + H_n) f_n^2 + 2V\varphi_n f_n - W(\varphi_n' f_n - f_n' \varphi_n);$$

et de là résulte la proposition que je voulais démontrer.

Θ_n étant, en effet, d'un degré au plus égal à μ, il est clair que $\frac{\varphi_n}{f_n}$ est une réduite de la série z qui satisfait à l'équation différentielle

$$W z' = 2Vz + G_n + H_n.$$

II.

5. Pour déterminer complètement l'équation différentielle à laquelle satisfait le dénominateur f_n d'une réduite, il est nécessaire de connaître les polynômes Θ_n et K_n qui y figurent.

---

(1) Il résulte d'une remarque importante due à M. Hermite que la détermination des polynômes G_n, P_n et φ_n n'exige pas la résolution de l'équation $f_n = 0$.

Afin de trouver leur expression ou de montrer au moins comment on peut les calculer par voie de récurrence, je m'appuierai sur les considérations suivantes.

On sait qu'entre les termes de deux réduites consécutives on a la relation suivante

$$\varphi_{n+1} f_n - f_{n+1}\varphi_n = A_{n+1},$$

A_{n+1} étant une constante dont on peut choisir arbitrairement la valeur, puisque les deux termes de la réduite ne sont déterminés qu'à un facteur constant près; je supposerai que cette constante est précisément celle que j'ai introduite dans l'identité (2).

Cela posé, de la relation précédente et de la relation

$$(6)\qquad \varphi_n f_{n-1} - f_n\varphi_{n-1} = A_n$$

qui s'en déduit, on tire

$$(A_n\varphi_{n+1} + A_{n+1}\varphi_{n-1}) f_n = (A_n f_{n+1} + A_{n+1} f_{n-1})\varphi_n;$$

d'où, en posant

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = R_n,$$

les formules suivantes, où Q_n est un polynôme du premier degré,

$$(7)\qquad \begin{cases} f_{n+1} - Q_n f_n + R_n f_{n-1} = 0, \\ \varphi_{n+1} - Q_n\varphi_n + R_n\varphi_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Portons maintenant, dans la relation (2), la valeur de A_n tirée de l'équation (6), cette relation pourra se mettre sous la forme suivante

$$(Uf_n + V\varphi_n - W\varphi'_n + \theta_n\varphi_{n-1}) f_n = (\theta_n f_{n-1} - Wf'_n - Vf_n)\varphi_n:$$

d'où ces formules, où Ω_n désigne un polynôme entier,

$$(8)\qquad \begin{cases} Wf'_n = (\Omega_n - V) f_n + \theta_n f_{n-1}, \\ W\varphi'_n = (\Omega_n + V)\varphi_n + \theta_n\varphi_{n-1} + Uf_n. \end{cases}$$

6. Ω_n est un polynôme entier dont il est facile de déterminer le degré; on déduit, en effet, de la première des formules (8)

$$\Omega_n = V + W\frac{f'_n}{f_n} - \Theta_n\frac{f_{n-1}}{f_n};$$

il en résulte que le terme du degré le plus élevé de ce polynôme est le premier terme du développement de l'expression $V + \frac{nW}{x}$; la fraction $\Theta_n\frac{f_{n-1}}{f_n}$ est, en effet, du degré de $V\left(\frac{1}{x^2}\right) + W\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

7. En dérivant la première des identités (7) et en multipliant par W le résultat obtenu, il vient

$$Wf''_{n+1} - WQ_n f'_n - WQ'_n f_n + WR_n f'_{n-1} = 0;$$

on a, d'ailleurs, les identités

$$\begin{aligned} Wf'_{n+1} &= (\Omega_{n+1} - V)f_{n+1} + \Theta_{n+1} f_n, \\ Wf'_n &= (\Omega_n - V)f_n + \Theta_n f_{n-1}, \\ Wf'_{n-1} &= (\Omega_{n-1} - V)f_{n-1} + \Theta_{n-1} f_{n-2}; \end{aligned}$$

portant ces valeurs dans la relation précédente, on a

$$\begin{aligned} (\Omega_{n+1} - V)f_{n+1} &+ [\Theta_{n+1} - WQ'_n - Q_n(\Omega_n - V)]f_n \\ &+ [R_n(\Omega_{n-1} - V) - Q_n\Theta_n]f_{n-1} + R_n\Omega_{n-1}f_{n-2} = 0. \end{aligned}$$

puis, en remplaçant f_{n+1} par sa valeur $Q_n f_n - R_n f_{n-1}$,

$$\begin{aligned} &[Q_n(\Omega_{n+1} - \Omega_n) - WQ'_n + \Theta_{n+1}]f_n \\ &\quad - [R_n(\Omega_{n+1} - \Omega_{n-1}) + Q_n\Theta_n]f_{n-1} + R_n\Theta_{n-1}f_{n-2} = 0. \end{aligned}$$

On a, d'ailleurs,

$$f_n - Q_{n-1}f_{n-1} + R_{n-1}f_{n-2} = 0;$$

d'où les deux formules suivantes :

$$(9)\qquad Q_n(\Omega_{n+1}-\Omega_n)+\theta_{n+1}-\frac{R_n}{R_{n-1}}\theta_{n-1}=WQ'_n,$$

$$(10)\qquad R_n(\Omega_{n+1}-\Omega_{n-1})=\frac{R_n}{R_{n-1}}Q_{n-1}\theta_{n-1}-Q_n\theta_n.$$

8. On déduit de la première des identités (8)

$$Wf''_n=(\Omega_n-V-W')f'_n+(\Omega'_n-V')f_n+\theta_n f'_{n-1}+\theta'_n f_{n-1}$$

ou, en multipliant par W et remplaçant Wf'_n et Wf'_{n-1} par leurs valeurs,

$$\begin{aligned}W^2f''_n= &\,[(\Omega_n-V-W')(\Omega_n-V)+W(\Omega'_n-V')]f_n\\ &+[\theta_n(\Omega_n+\Omega_{n-1}-2V-W')+W\theta'_n]f_{n-1}+\theta_n\theta_{n-1}f_{n-2};\end{aligned}$$

portons cette valeur et la valeur précédemment trouvée de Wf'_n dans la relation

$$W^2\theta_n f''_n+[(2V+W')\theta_n-W\theta'_n]Wf'_n+K_nWf_n=0;$$

il viendra, toutes réductions faites,

$$\begin{aligned}\{\theta_n(\Omega_n^2-V^2)+W[\theta_n(\Omega'_n-V')-\theta'_n(\Omega_n-V)+K_n]\}f_n&\\ +\theta_n^2(\Omega_n+\Omega_{n-1})f_{n-1}+\theta_n^2\theta_{n-1}f_{n-2}&=0.\end{aligned}$$

Le polynôme qui multiplie W dans le coefficient de f_n est évidemment divisible par θ_n; posant donc

$$\theta_n(\Omega'_n-V')-\theta'_n(\Omega_n-V)+K_n=-\theta_nS_n;$$

d'où l'on déduit

$$(11)\qquad K_n=\theta'_n(\Omega_n-V)-\theta_n(\Omega'_n-V')-\theta_nS_n,$$

l'identité précédente deviendra

$$(\Omega_n^2-V^2-WS_n)f_n+\theta_n(\Omega_n+\Omega_{n-1})f_{n-1}+\theta_n\theta_{n-1}f_{n-2}=0,$$

où S_n désigne un polynôme entier.

Ayant, d'ailleurs, la relation

$$f_n - Q_{n-1} f_{n-1} + R_{n-1} f_{n-2} = 0,$$

on déduit de là les formules suivantes :

$$(12)\qquad \Omega_n^2 - V^2 - \frac{\Theta_n \Theta_{n-1}}{R_{n-1}} = WS_n,$$

$$(13)\qquad \Omega_n + \Omega_{n-1} = \frac{\Theta_{n-1} Q_{n-1}}{R_{n-1}}.$$

9. De la relation (12) résulte l'égalité

$$W(S_{n+1} - S_n) = (\Omega_{n+1} - \Omega_n)(\Omega_{n+1} + \Omega_n) - \frac{\Theta_{n+1}\Theta_n}{R_n} + \frac{\Theta_n \Theta_{n-1}}{R_{n-1}}$$

ou, en remplaçant $\Omega_{n+1} + \Omega_n$ par sa valeur déduite de l'identité (13),

$$W(S_{n+1} - S_n) = \Theta_n \left[-\frac{\Theta_{n+1}}{R_n} + \frac{\Theta_{n-1}}{R_{n-1}} + \frac{Q_n}{R_n}(\Omega_{n+1} - \Omega_n) \right]$$

ou encore, en vertu de (9),

$$W(S_{n+1} - S_n) = -\frac{WQ'_n \Theta_n}{R_n};$$

d'où enfin

$$(14)\qquad S_{n+1} - S_n = -\frac{Q'_n \Theta_n}{R_n}.$$

III.

10. Je résumerai ici les conséquences très simples de l'analyse un peu longue qui précède.

On a, entre les termes des diverses réduites, les relations suivantes

$$(7)\qquad \begin{cases} f_{n+1} - Q_n f_n + R_n f_{n-1} = 0, \\ \varphi_{n+1} - Q_n \varphi_n + R_n \varphi_{n-1} = 0; \end{cases}$$

$$(8)\qquad \begin{cases} W f'_n = (\Omega_n - V) f_n + \Theta_n f_{n-1}, \\ W \varphi'_n = (\Omega_n + V)\varphi_n + \Theta_n \varphi_{n-1} + V f_n, \end{cases}$$

où R_n désigne un nombre que l'on peut choisir arbitrairement, θ_n un polynôme entier du degré μ, Ω_n un polynôme entier du degré $\mu+1$ dont le terme du degré le plus élevé est le premier terme du développement de $V+\frac{nW}{x}$, et Q_n un polynôme du premier degré.

Ces polynômes sont reliés entre eux par les relations suivantes

$$(9)\qquad Q_n(\Omega_{n+1}-\Omega_n)+\theta_{n+1}-\frac{R_n}{R_{n-1}}\theta_{n-1}=WQ'_n,$$

$$(13)\qquad \Omega_{n+1}+\Omega_n=-\frac{\theta_n Q_n}{R_n};$$

on a, en outre, l'égalité suivante, où S_n est un polynôme entier,

$$(12)\qquad \Omega_n^2-V^2-\frac{\theta_n\theta_{n-1}}{R_{n-1}}=WS_n.$$

On peut ajouter que, si l'on pose, pour abréger,

$$K_n=\theta'_n(\Omega_n-V)-\theta_n(\Omega'_n-V')-\theta_n S_n,$$

f_n satisfait à l'équation différentielle du second ordre

$$(3)\qquad W\theta_n y''+[(2V+W')\theta_n-W\theta'_n]y'+K_n y=0.$$

11. Je me propose maintenant de montrer que les relations (9) et (13) suffisent pour déterminer par voie récurrente les polynômes Q_n, θ_n et Ω_n, et, à cet effet, j'établirai le lemme suivant :

Lemme. — *Si des polynômes f_n, φ_n, Q_n, θ_n, Ω_n et les nombres R_n sont liés entre eux par les relations* (7), (9) *et* (13) *et si l'on définit deux suites de polynômes A_n et B_n par les égalités suivantes :*

$$A_n=(\Omega_n-V)f_n-Wf'_n+\theta_n f_{n-1},$$
$$B_n=(\Omega_n+V)\varphi_n-W\varphi'_n+\theta_n\varphi_{n-1},$$

on a, entre trois polynômes consécutifs de chacune des suites, les relations

$$A_{n+1}-Q_nA_n+R_nA_{n-1}=0$$

et

$$B_{n+1}-Q_nB_n+R_nB_{n-1}=0.$$

Démonstration. — Je ne m'occuperai que des polynômes A_n, la marche à suivre étant exactement la même pour les polynômes B_n.

On a, en vertu même de la définition donnée,

$$Wf'_n = (\Omega_n - V)f_n + \Theta_n f_{n-1} - A_n$$

et de même

$$Wf'_{n+1} = (\Omega_{n+1} - V)f_{n+1} + \Theta_{n+1} f_n - A_{n+1},$$

$$Wf'_{n-1} = (\Omega_{n-1} - V)f_{n-1} + \Theta_{n-1} f_{n-2} - A_{n-1}.$$

Portons ces valeurs dans l'égalité

$$Wf'_{n+1} = Q_n Wf'_n + WQ'_n f_n + R_n Wf'_{n-1}$$

qui résulte immédiatement de la première des équations (7); il viendra

$$\begin{aligned}(\Omega_{n+1} - V)f_{n+1} &+ [\Theta_{n+1} - WQ'_n - Q_n(\Omega_n - V)]f_n \\ &+ [R_n(\Omega_{n-1} - V) - Q_n\Theta_n]f_{n-1} \\ &+ R_n\Theta_{n-1}f_{n-2} - A_{n+1} + Q_n A_n - R_n A_{n-1} = 0\end{aligned}$$

ou, en remplaçant f_{n+1} par sa valeur $Q_n f_n - R_n f_{n-1}$,

$$\begin{aligned}&[Q_n(\Omega_{n+1} - \Omega_n) + \Theta_{n+1} - WQ'_n]f_n \\ &- [R_n(\Omega_{n+1} - \Omega_{n-1}) + Q_n\Theta_n]f_{n-1} \\ &+ R_n\Theta_{n-1}f_{n-2} - A_{n+1} + Q_n A_n - R_n A_{n-1} = 0\end{aligned}$$

ou encore, en vertu des identités (9) et (13),

$$\begin{aligned}\frac{R_n}{R_{n-1}}\Theta_{n-1}f_n - \frac{R_n}{R_{n-1}}\Theta_{n-1}Q_{n-1}f_{n-1}& \\ + R_n\Theta_{n-1}f_{n-2} - A_{n+1} &+ Q_n A_n - R_n A_{n-1} = 0.\end{aligned}$$

Ce qui, par suite de l'identité,

$$f_n - Q_{n-1}f_{n-1} + R_{n-1}f_{n-2} = 0,$$

se réduit à

$$A_{n+1} - Q_n A_n + R_n A_{n-1} = 0.$$

Une démonstration analogue s'appliquerait aux polynômes B.

12. Supposons maintenant que l'on ait déterminé trois suites de polynômes Θ_n, Ω_n et Q_n par les relations (9) et (13), puis deux suites de polynômes φ_n et f_n par les relations (7); qu'enfin, pour deux valeurs consécutives de l'indice, on ait

$$A_i = A_{i-1} = 0 \quad \text{et} \quad B_i = B_{i-1} = 0.$$

Il résulte du lemme précédent que l'on a également

$$A_{i+1} = A_{i+2} = A_{i+3} = \ldots = 0$$

et

$$B_{i+1} = B_{i+2} = B_{i+3} = \ldots = 0,$$

et, par suite, les polynômes φ_n et f_n satisfont aux équations (8).

Or, en éliminant Ω_n, on en déduit

$$W(f'_n\varphi_n - \varphi'_n f_n) = -2V\varphi_n f_n + \Theta_n(\varphi_n f_{n-1} - f_n\varphi_{n-1}) - Uf_n^2;$$

ce que l'on peut écrire

$$Uf_n^2 + 2V\varphi_n f_n - W(\varphi'_n f_n - f'_n\varphi_n) = \Theta_n(\varphi_n f_{n-1} - f_n\varphi_{n-1}),$$

et, $(\varphi_n f_{n-1} - f_n\varphi_{n-1})$ étant une constante en vertu des relations (7), on voit que le second membre est un polynôme du degré μ, et, par suite, la fraction $\frac{\varphi_n}{f_n}$ est une réduite de la série z.

13. Ainsi toute la question est ramenée à déterminer par les identités (9) et (13) les polynômes Q_n, Θ_n et Ω_n.

Si l'on met en évidence leurs coefficients inconnus, en égalant à zéro les multiplicateurs des puissances de x, on obtiendra un certain nombre d'équations qui permettront de déterminer les coefficients de Q_n, Ω_{n+1}, Θ_{n+1} au moyen des coefficients de Ω_n, Θ_n et Θ_{n-1}.

IV.

14. Comme application, je considérerai d'abord le cas le plus simple, à savoir : celui où les fonctions Θ_n sont des constantes et où $\mu = 0$.

C'est ce qui a lieu si W est au plus du second degré et si V est au plus du premier degré.

Comme θ_n est une constante et que R_n, jusqu'à présent, est resté arbitraire, je poserai

$$\theta_n = R_n,$$

et les équations (12) et (13) deviendront alors

$$\Omega_{n+1} + \Omega_n = -Q_n, \tag{15}$$

$$\Omega_n^2 - V^2 - R_n = WS_n, \tag{16}$$

et, ayant déterminé les polynômes entiers qui satisfont à ces équations, on aura les relations

$$\left\{\begin{array}{l} f_{n+1} - Q_n f_n + R_n f_{n-1} = 0, \\ \varphi_{n+1} - Q_n \varphi_n + R_n \varphi_{n-1} = 0; \end{array}\right. \tag{17}$$

$$\left\{\begin{array}{l} W f'_n = (\Omega_n - V) f_n + R_n f_{n-1}, \\ W \varphi'_n = (\Omega_n + V) \varphi_n + R_n \varphi_{n-1} + U f_n : \end{array}\right. \tag{18}$$

en outre, f_n satisfait à l'équation différentielle

$$Wy'' + (2V + W')y' - (\Omega'_n - V' + S_n)y = 0,$$

où le coefficient de y est nécessairement une constante.

15. Considérons, par exemple, la fonction $z = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ qui satisfait à l'équation différentielle

$$(x^2 - 1)z' = 2x,$$

on a ici

$$W = x^2 - 1, \quad V = 0 \quad \text{et} \quad U = 2x.$$

Le polynôme Ω_n, dont le terme du degré le plus élevé est le premier terme du développement de $n\frac{x^2-1}{x}$, est de la forme

$$nx+\alpha_n,$$

l'identité

$$(nx+\alpha_n)^2-R_n=(x^2-1)S_n$$

donne

$$\alpha_n=0,\quad R_n=n^2,\quad S_n=n^2;$$

d'où, en vertu de l'équation (15),

$$Q_n=-(2n+1)x;$$

puis les relations

$$f_{n+1}+(2n+1)xf_n+n^2f_{n-1}=0,$$
$$\varphi_{n+1}+(2n+1)x\varphi_n+n^2\varphi_{n-1}=0;$$
$$(x^2-1)f'_n=nxf_n+n^2f_{n-1},$$
$$(x^2-1)\varphi'_n=nx\varphi_n+n^2\varphi_{n-1}+2xf_n;$$

d'où l'on déduirait aisément les relations connues entre les polynômes X_n de Legendre.

L'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait f_n est, d'ailleurs,

$$(x^2-1)y''+2xy'-n(n+1)y=0.$$

16. Comme second exemple, je choisirai la fonction

$$z=e^x x^{-\alpha}\int_x^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx,$$

qui satisfait à l'équation différentielle

$$xz'=(x-\alpha)z-1;$$

son développement suivant les puissances décroissantes de x est, d'ailleurs, la série

$$\frac{1}{x}+\frac{\alpha-1}{x^2}+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{x^3}+\cdots,$$

qui, si elle ne se termine pas, est toujours divergente, quelle que soit la valeur donnée à x.

On a ici

$$W = x, \quad V = \frac{x}{2} - \frac{\alpha}{2}, \quad U = -1.$$

Le terme du degré le plus élevé de Ω_n étant le premier terme du développement de $V + \frac{nW}{x}$, on peut poser

$$\Omega_n = \frac{x}{2} + \beta_n.$$

L'équation différentielle à laquelle satisfait f_n est

$$xy'' + (x + 1 - \alpha)y' - S_n y = 0:$$

d'où résulte évidemment $S_n = n$.

L'identité

$$S_n W = nx = \left(\frac{x}{2} + \beta_n\right)^2 - \left(\frac{x}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)^2 - R_n$$

donne alors

$$\beta_n = n - \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad R_n = n(n - \alpha);$$

d'où

$$Q_n = -x - \beta_n - \beta_{n+1} = -x + \alpha - 2n - 1,$$

et les formules suivantes

$$f_{n+1} = -(x + 2n + 1 - \alpha)f_n - n(n - \alpha)f_{n-1},$$
$$\varphi_{n+1} = -(x + 2n + 1 - \alpha)\varphi_n - n(n - \alpha)\varphi_{n-1};$$

ou plutôt si l'on change les signes des deux termes des réduites de rang impair (ce qui est permis, puisque cela ne change pas la valeur de la réduite),

$$(17) \quad \begin{cases} f_{n+1} = (x + 2n + 1 - \alpha)f_n - n(n - \alpha)f_{n-1}, \\ \varphi_{n+1} = (x + 2n + 1 - \alpha)\varphi_n - n(n - \alpha)\varphi_{n-1}. \end{cases}$$

Un calcul direct donne d'ailleurs les valeurs suivantes pour les termes des premières réduites,

$$f_0 = 1, \quad f_1 = x + 1 - \alpha, \quad f_2 = x^2 + 2(2-\alpha)x + (2-\alpha)(1-\alpha)$$

et

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = x + 3 - \alpha;$$

en sorte que les formules précédentes permettent de calculer facilement, par voie récurrente, les valeurs de f_n et de φ_n.

17. En partant de l'équation différentielle

$$xy'' + (x + 1 - \alpha)y' - ny = 0, \tag{18}$$

à laquelle satisfait le polynôme f_n, on trouve aisément

$$f_n = x^n + n(n-\alpha)x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-\alpha)(n-\alpha-1)x^{n-2} + \ldots$$
$$+ (n-\alpha)(n-\alpha-1)\ldots(1-\alpha).$$

Une deuxième solution de l'équation (18) est donnée (n° 3) par la fonction

$$u_n = e^{2\int \frac{V}{W}dx}(zf_n - \varphi_n) = f_n \int_x^{\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx - x^{\alpha}e^{-x}\varphi_n;$$

il est facile de trouver une autre expression de u_n.

En effet, en dérivant n fois l'équation (18), il vient

$$xy^{(n+2)} + (x + n + 1 - \alpha)y^{(n+1)} = 0;$$

d'où l'on voit que $y^{(n+1)}$ est égal, à une constante près, à $\frac{e^{-x}}{x^{n+1-\alpha}}$.

Par suite on a, K désignant une constante et $F(x)$ un polynôme entier,

$$y = F(x) + K\int_x^{\infty} \frac{e^{-z}(z-x)^n\,dz}{z^{n+1-\alpha}}.$$

La fonction u_n est en particulier donnée par cette formule, et, comme elle s'évanouit quand on donne à x une valeur positive infiniment croissante, on a simplement

$$u_n = f_n \int_x^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx - x^\alpha e^{-x} \varphi_n = \mathrm{K} \int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^n\, dz}{z^{n+1-\alpha}}.$$

Si l'on suppose x et n constants (et je supposerai x positif, en sorte que les intégrales contenues dans l'égalité précédente sont toujours finies, quel que soit α), K est une fonction de α bien déterminée.

Pour en trouver la valeur, je supposerai que l'on fait tendre x vers zéro et que α a une valeur positive; de l'égalité précédente, on déduit alors

$$f_n(0)\Gamma(\alpha) = \mathrm{K}\,\Gamma(\alpha),$$

d'où

$$\mathrm{K} = (1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)$$

et, par suite,

$$f_n \int_x^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx - z^\alpha e^{-x} \varphi_n = (1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha) \int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^n\, dz}{z^{n+1-\alpha}}.$$

18. On tire de là

$$\int_x^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx = e^{-x} x^\alpha \frac{\varphi_n}{f_n} + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)}{f_n} \int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^n\, dz}{z^{n+1-\alpha}};$$

l'intégrale contenue dans le second membre a une valeur finie, car elle a une valeur plus petite que l'intégrale

$$\int_x^\infty e^{-z} z^{\alpha-1}\, dx;$$

il serait même facile de démontrer qu'elle tend vers zéro quand n augmente indéfiniment.

On a, d'ailleurs,

$$\frac{f_n}{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)} = 1 + \frac{n}{1}\,\frac{x}{1-\alpha} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{x^2}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + \cdots;$$

quel que soit le nombre α, les termes de ce développement finiront par être tous du même signe, et, comme leur degré par rapport à n va toujours en croissant, on voit que la valeur absolue de la série croîtra indéfiniment avec le nombre n.

Le coefficient

$$\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)}{f_n}$$

a ainsi pour limite zéro, et l'on a

$$\int_x^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\,dx = e^{-x} x^{\alpha} \lim \frac{\varphi_n}{f_n}.$$

Les réduites $\frac{\varphi_n}{f_n}$, quoique provenant de la réduction en fractions continues d'une série divergente, fournissent donc, avec une approximation indéfinie, la valeur de l'intégrale $\int_x^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\,dx$, pourvu que x ait une valeur positive.

19. Soit, par exemple, à calculer l'intégrale

$$\int_a^{\infty} e^{-t^2} dt\,;$$

en posant $t = \sqrt{z}$, elle devient

$$\frac{1}{2}\int_{a^2}^{\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{x}},$$

dont la valeur approximative, en prenant seulement la réduite $\frac{\varphi_1}{f_1}$, est

$$\frac{ae^{-a^2}}{2a^2+1}.$$

Faisant $a = 3$, on trouve, comme valeur approchée,

$$\frac{3e^{-9}}{19} = 0{,}00001954,$$

dont les trois premiers chiffres significatifs sont exacts

20. Les formules précédentes permettent de calculer aisément les valeurs de la fonction de Prym,

$$eQ(\alpha) = \int_1^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx.$$

Que l'on désigne, en effet, par $F_0(\alpha)$, $F_1(\alpha)$, $F_2(\alpha)$, ..., $\Phi_0(\alpha)$, $\Phi_1(\alpha)$, $\Phi_2(\alpha)$, ... deux suites de polynômes liés entre eux par les relations suivantes :

$$F_{n+1}(\alpha) = (2n+2-\alpha)F_n(\alpha) - n(n-\alpha)F_{n-1}(\alpha),$$
$$\Phi_{n+1}(\alpha) = (2n+2-\alpha)\Phi_n(\alpha) - n(n-\alpha)\Phi_{n-1}(\alpha);$$

avec les valeurs initiales

$$F_0(\alpha) = 1, \quad F_1(\alpha) = 2-\alpha,$$
$$\Phi_0(\alpha) = 0, \quad \Phi_1(\alpha) = 1;$$

il résulte des formules précédentes que l'on a

$$eQ(\alpha) = \lim \frac{\Phi_n(\alpha)}{F_n(\alpha)}.$$

Soit, par exemple, $x = 1$.

On obtiendra successivement, pour les valeurs approximatives de $eQ(0)$, les valeurs suivantes

$$\frac{4}{7},\ \frac{20}{34},\ \frac{124}{209},\ \frac{920}{1546},\ \frac{7940}{13327},\ \ldots$$

qui vont en croissant et en restant inférieures à la valeur cherchée.

Il est facile d'obtenir d'autres suites de nombres allant constamment en diminuant et ayant cette valeur pour limite; on trouve en effet les expressions suivantes des réduites du nombre $eQ(-1)$,

$$0,\ \frac{1}{3},\ \frac{5}{13},\ \frac{29}{73},\ \frac{201}{501},\ \frac{1631}{4051}.$$

De la formule connue

$$Q(0) = 1 - Q(1)$$

on déduit que les fractions

$$1,\ \frac{2}{3},\ \frac{8}{13},\ \frac{44}{73},\ \frac{300}{501},\ \frac{2420}{4051}$$

ont pour limite $Q(0)$.

Ces fractions sont plus simples et convergent plus rapidement que les fractions déterminées plus haut; elles vont d'ailleurs toujours en décroissant.

En particulier, on a

$$\frac{2420}{4051} = 0,5973\ldots$$

et

$$\frac{7940}{13327} = 0,5958\ldots;$$

ces deux fractions comprenant la valeur de $eQ(0)$, on a, avec une erreur de moins de $\frac{1}{1000}$,

$$eQ(0) = 0,5965.$$

Le développement en série donne (§ *Compendium de Schlömilch*, t. II, p. 266)

$$eQ(0) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} - \frac{2}{2.3.4} + \frac{4}{2.3.4.5} - \frac{14}{2.3.4.5.6} + \frac{38}{2.3.4.5.6.7}.$$

La convergence est sensiblement moins rapide que celle des réduites.

V.

21. Pour les applications qui suivent, afin de simplifier les formules, je prendrai le nombre A_n, qui était resté arbitraire, égal à l'unité.

Les relations qui existent entre les termes des réduites et les polynômes Q_n, θ_n et Ω_n deviennent alors

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned}
&Uf_n^2 + 2V\varphi_n f_n - W(\varphi'_n f_n - f'_n\varphi_n) = \theta_n,\\
&\varphi_{n+1} f_n - f_{n+1}\varphi_n = 1,\\
&f_{n+1} - Q_n f_n + f_{n-1} = 0,\\
&\varphi_{n+1} - Q_n\varphi_n + \varphi_{n-1} = 0,\\
&Wf'_n = (\Omega_n - V)f_n + \theta_n f_{n-1},\\
&W\varphi'_n = (\Omega_n + V)\varphi_n + \theta_n\varphi_{n-1} + Uf_n;
\end{aligned}\right.$$

et les identités qui déterminent les polynômes Q_n, θ_n et Ω_n,

$$(19)\qquad Q_n(\Omega_{n+1} - \Omega_n) + \theta_{n+1} - \theta_{n-1} = WQ'_n,$$

$$(20)\qquad \Omega_{n+1} + \Omega_n = - Q_n\theta_n;$$

on peut y joindre la relation

$$(21)\qquad \Omega_n^2 - V^2 - \theta_n\theta_{n-1} = WS_n,$$

où S_n désigne un polynôme entier.

L'équation différentielle à laquelle satisfait f_n est d'ailleurs

$$\begin{aligned}
W\theta_n y'' &+ [\theta_n(2V + W') - W\theta'_n]\, y'\\
&- [\theta_n S_n + \theta_n(\Omega'_n - V') - \theta'_n(\Omega_n - V)]\, y = 0.
\end{aligned}$$

22. Pour fixer les idées, je supposerai que le développement de z commence par un terme qui soit au moins du degré de $\frac{1}{x}$.

Pour le dénominateur de la réduite de rang zéro, je prendrai l'unité, en sorte que l'on aura $f_0 = 1$ et que φ_0 sera l'ensemble des termes entiers de z (lequel pourra se réduire à zéro).

Je considérerai les deux quantités

$$\frac{-1}{0} \quad\text{et}\quad \frac{z}{-1}$$

comme constituant deux réduites précédentes, en posant

$$f_{-1} = 0, \quad \varphi_{-1} = -1$$

et

$$f_{-2} = -1, \quad \varphi_{-2} = z.$$

Il est facile de voir, en effet, qu'en posant

$$\theta_0 = U + 2V\varphi_0 - W\varphi'_0, \quad \theta_{-1} = 0, \quad \Omega_0 = V, \quad \Omega_{-1} = -V,$$

toutes les relations du tableau (A) qui existent entre les réduites consécutives sont satisfaites.

On aura donc

$$\theta_{-1} = 0, \quad \theta_0 = U + 2V\varphi_0 - W\varphi'_0$$

et

$$\Omega_0 = V.$$

23. Soit, comme exemple, la fonction

$$z = \sqrt{x^4 + 2\lambda x^2 + 1}\int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 2\lambda x^2 + 1}},$$

qui satisfait à l'équation différentielle du premier ordre

$$(x^4 + 2\lambda x^2 + 1)z' = 2(x^3 + \lambda x)z - (x^4 + 2\lambda x^2 + 1);$$

on a ici

$$W = x^4 + 2\lambda x^2 + 1, \quad V = x^3 + \lambda x, \quad U = -(x^4 + 2\lambda x^2 + 1).$$

Je remarquerai tout d'abord que, z étant une fonction impaire de x, les polynômes φ_n et f_n sont des fonctions paires ou impaires de la variable, et que le produit $\varphi_n f_n$ est une fonction impaire.

Il en résulte que θ_n est une fonction paire, et l'on peut poser

$$\theta_n = a_n x^2 + b_n;$$

Ω_n est une fonction impaire dont le terme de degré le plus élevé est le premier terme du développement de

$$V + \frac{nW}{x} = x^3 + \lambda x + \frac{n}{x}(x^4 + 2\lambda x^2 + 1);$$

on peut donc poser

$$\Omega_n = (n+1)x^3 + \alpha_n x;$$

enfin Q_n, qui est une fonction impaire, sera de la forme $A_n x$.

Portons ces valeurs dans les identités (19) et (20); en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de x, on obtiendra les formules suivantes :

$$A_n = -\frac{2n+3}{a_n},$$

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= -\alpha_n + (2n+3)\frac{b_n}{a_n},\\ b_{n+1} &= b_{n-1} - \frac{2n+3}{a_n},\\ a_{n+1} &= a_{n-1} - \frac{2n+3}{a_n}(2\lambda + \alpha_n - \alpha_{n+1}),\end{aligned}\right.$$

dont les trois dernières permettent de calculer de proche en proche, et par voie récurrente, les nombres α_i, a_i et b_i.

La première donne les relations suivantes entre les réduites consécutives :

$$f_{n+1} + \frac{2n+3}{a_n} x f_n + f_{n-1} = 0,$$

$$\varphi_{n+1} + \frac{2n+3}{a_n} x \varphi_n + \varphi_{n-1} = 0.$$

En exprimant que

$$[(n+1)x^3 + \alpha_n x]^2 - (x^3 + \lambda x)^2 - (a_n x^2 + b_n)(a_{n-1}x^2 + b_{n-1})$$

est exactement divisible par $x^4 + 2\lambda x^2 + 1$, on obtient encore les relations

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} a_n a_{n-1} - b_n b_{n-1} &= 2(n+1)\alpha_n - 2\lambda(n+1)^2,\\ a_n b_{n-1} + b_n a_{n-1} + 2\lambda b_n b_{n-1} &= \alpha_n^2 - \lambda^2 - n(n+2);\end{aligned}\right.$$

et l'on trouve la valeur suivante du quotient :

$$S_n = n(n+2)x^2 + 2(n+1)\alpha_n - a_n a_{n-1} - 2\lambda(n+1)^2.$$

24. La partie entière du développement de z étant simplement x, on a ces valeurs des premières réduites

$$f_0 = 1,\quad \varphi_0 = x,\quad f_{-1} = 0,\quad \varphi_{-1} = -1,$$

puis

$$\Theta_{-1} = 0,\quad \Theta_0 = -2\lambda x^2 - 2,\quad \Omega_0 = x^2 + \lambda x,$$

d'où les valeurs initiales suivantes

$$\alpha_0 = \lambda,\quad a_{-1} = 0,\quad b_{-1} = 0,\quad a_0 = -2\lambda,\quad b_0 = -2,$$

d'où, au moyen des formules (22), on déduit successivement les valeurs des coefficients α_i, a_i et b_i, à savoir

$$\alpha_1 = -\lambda + \frac{3}{\lambda},\quad \ldots,$$

$$a_1 = 6 - \frac{9}{2\lambda^2},\quad \ldots,$$

$$b_1 = \frac{3}{2\lambda},\quad \ldots.$$

Les relations (23) fournissent des moyens faciles de vérification.

25. Soit encore à déterminer les réduites de la fonction z dont le développement, suivant les puissances décroissantes de x, satisfait à l'équation différentielle

$$x^3 z' = 2(x^2 + px + q)z + rx + s.$$

On a ici

$$W = x^3,\quad V = x^2 + px + q,\quad U = rx + s;$$

on peut poser

$$\Omega_n = (n+1)x^2 + \alpha_n x + \beta_n,$$
$$\Theta_n = a_n x + b_n,$$
$$Q_n = A_n x + B_n.$$

Cela posé, des identités (19) et (20) on déduit

$$(A_n x + B_n)[x^2 + (\alpha_{n+1} - \alpha_n)x + \beta_{n+1} - \beta_n] + (a_{n+1} - a_n)x + b_{n+1} - b_n = A_n x^3$$

et

$$(2n+3)x^2 + (\alpha_{n+1} + \alpha_n)x + \beta_{n+1} + \beta_n = -(a_n x + b_n)(A_n x + B_n);$$

d'où les relations suivantes

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}
\alpha_{n+1} &= \frac{n+1}{n+2}\alpha_n + \frac{2n+3}{2n+4}\frac{b_n}{a_n},\\
\beta_{n+1} &= -\beta_n - (2n+3)(\alpha_{n+1} - \alpha_n)\frac{b_n}{a_n},\\
a_{n+1} &= a_{n-1} + \frac{2n+3}{a_n}(\beta_{n+1} - \beta_n) - \frac{2n+3}{a_n}(\alpha_{n+1} - \alpha_n)^2,\\
b_{n+1} &= b_{n-1} - \frac{2n+3}{a_n}(\alpha_{n+1} - \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n),
\end{aligned}\right.$$

qui permettront de calculer, par voie de récurrence, les nombres α_i, β_i et a_i, b_i.

On aura, d'ailleurs,

$$Q_n = \frac{2n+3}{a_n}(-x + \alpha_{n+1} - \alpha_n),$$

d'où l'on déduira successivement les valeurs des réduites par les formules

$$f_{n+1} = Q_n f_n - f_{n-1},$$
$$\varphi_{n+1} = Q_n \varphi_n - \varphi_{n-1}.$$

26. Le polynôme

$$[(n+1)x^2 + \alpha_n x + \beta_n]^2 - (x^2 + px + q)^2 - (a_n x + b_n)(a_{n-1}x + b_{n-1})$$

devant être divisible par x^4, on a encore ces identités

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}
a_n a_{n-1} &= \alpha_n^2 + 2(n+1)\beta_n - p^2 - 2q,\\
a_n b_{n-1} + b_n a_{n-1} &= 2\alpha_n\beta_n - 2pq,\\
b_n b_{n-1} &= \beta_n^2 - q^2,
\end{aligned}\right.$$

qui peuvent être considérées comme un système d'intégrales premières des équations aux différences finies (24) et qui peuvent servir, soit comme vérification des calculs, soit pour déterminer les coefficients a_i et b_i.

On a d'ailleurs, puisque le développement de z ne renferme pas de partie entière,

$$f_0 = 1, \quad \varphi_0 = 0;$$

par suite,

$$\Omega_0 = \mathrm{V} = x^2 + px + q$$

et

$$\theta_0 = \mathrm{U} = rx + s.$$

On a donc les valeurs initiales suivantes

$$a_{-1} = 0, \quad b_{-1} = 0, \quad a_0 = r, \quad b_0 = s, \quad \alpha_0 = p, \quad \beta_0 = q;$$

d'où l'on déduit, par voie de récurrence, la suite des nombres qui déterminent les polynômes Q_n.

27. Ayant

$$[(n+1)x^2 + \alpha_n x + \beta_n]^2 - (x^2 + px + q)^2 - (a_n x + b_n)(a_{n-1}x + b_{n-1})$$
$$= x^3[n(n+2)x + 2(n+1)\alpha_n - 2p],$$

on en déduit

$$\mathrm{S}_n = n(n+2)x + 2(n+1)\alpha_n - 2p.$$

Dans le cas où il y a surapproximation, θ_n doit se réduire à une constante; on a donc

$$a_n = 0,$$

et l'équation différentielle à laquelle satisfait f_n devient

$$x^3 y'' + (5x^2 + 2px + 2q)y' - [n(n+4)x + (2n+3)\alpha_n - 3p] = 0.$$

Réciproquement, si l'on détermine la quantité α_n, de telle sorte que l'équation précédente ait pour solution un polynôme entier f_n, on peut déterminer les quantités r et s, de telle sorte que le dénominateur de la $n^{\text{ième}}$ réduite de z soit f_n.

28. Comme dernière application, je considérerai la fonction

$$z = (x^3 + 3gx + h)^{\frac{2\mu}{3}} \int_x^\infty \frac{dx}{(x^3 + 3gx + h)^{\frac{2\mu}{3}}},$$

qui satisfait à l'équation différentielle

$$(x^2+3gx+h)z' = 2\mu(x^2+g)z - (x^3+3gx+h).$$

On a, dans ce cas,

$$W = x^3+3gx+h, \quad V = \mu(x^2+g) \quad \text{et} \quad U = -(x^3+3gx+h),$$

et l'on peut poser

$$\begin{aligned} \Omega_n &= (n+\mu)x^2 + \alpha_n x + \beta_n, \\ \theta_n &= a_n x + b_n, \\ Q_n &= A_n x + B_n. \end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans les relations (19) et (20), on obtient les égalités suivantes, qui doivent être identiquement satisfaites,

$$\begin{aligned} (A_n x + B_n)[x^2 + (\alpha_{n+1} - \alpha_n)x + (\beta_{n+1} - \beta_n)] \\ = (a_{n+1} - a_{n-1})x + (b_{n+1} - b_{n-1}) + A_n(x^3 + 3gx + h), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2n+2\mu+1)x^2 \\ + (\alpha_{n+1} + \alpha_n)x + \beta_{n+1} + \beta_n = -(A_n x + B_n)(a_n x + b_n), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$Q_n = -\frac{2n+2\mu+1}{a_n}(x + \alpha_n - \alpha_{n+1}),$$

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \frac{n+\mu}{n+\mu+1}\alpha_n + \frac{2n+2\mu+1}{2n+2\mu+2}\frac{b_n}{a_n}, \\ \beta_{n+1} &= -\beta_n - (2n+2\mu+1)(\alpha_{n+1} - \alpha_n)\frac{b_n}{a_n}, \\ a_{n+1} &= a_{n-1} + \frac{2n+2\mu+1}{a_n}(\beta_{n+1} - \beta_n - 3g) - \frac{2n+2\mu+1}{a_n}(\alpha_{n+1} - \alpha_n)^2, \\ b_{n+1} &= b_{n-1} - \frac{2n+2\mu+1}{a_n}(\beta_{n+1} - \beta_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) - \frac{2n+2\mu+1}{a_n}h. \end{aligned} \right.$$

Ces relations permettent de calculer successivement les nombres a_i, b_i, α_i, β_i et par suite les quotients incomplets Q_i.

On a d'ailleurs

$$\Theta_{-1} = 0, \quad \Omega_0 = \mu(x^2 + g),$$

et, comme la partie entière du développement de r est $\frac{x}{2\mu - 1}$,

$$f_{-1} = 0, \quad \varphi_{-1} = -1,$$
$$f_0 = 1, \quad \varphi_0 = \frac{x}{2\mu - 1};$$

d'où

$$\Theta_0 = U + 2V\varphi_0 - W\varphi'_0 = \frac{2\mu}{1 - 2\mu}(2gx + h),$$

et par suite les valeurs initiales suivantes

$$a_{-1} = 0, \quad b_{-1} = 0, \quad a_0 = \frac{4\mu g}{1 - 2\mu}, \quad b_0 = \frac{2\mu h}{1 - 2\mu}, \quad \alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = \mu g;$$

d'où l'on déduira successivement, au moyen des formules (26), les valeurs de

$$a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, \ldots; \alpha_1, \alpha_2, \ldots; \beta_1, \beta_2, \ldots.$$

29. On obtient un autre système de formules qui permet également de calculer a_n et b_n et que l'on peut considérer comme un système d'intégrales premières des équations aux différences finies (26).

Il s'obtient en exprimant que le polynôme

$$\begin{aligned}\Omega_n^2 - V^2 - \Theta_n\Theta_{n-1} = {} & [(n + \mu)x^2 + \alpha_n x + \beta_n]^2 \\ & - \mu^2(x^2 + g)^2 - (a_n x + a_{n-1})(b_n x + b_{n-1})\end{aligned}$$

est exactement divisible par

$$W = x^3 + 3gx + h.$$

De là résultent les relations suivantes :

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} a_n a_{n-1} &= \alpha_n^2 + 2(n + \mu)\beta_n - 2g\mu^2 - 3gn(n + 2\mu), \\ a_n b_{n-1} + b_n a_{n-1} &= 2\alpha_n\beta_n - 6g(n + \mu)\alpha_n - hn(n + 2\mu), \\ b_n b_{n-1} &= \beta_n^2 - 2h(n + \mu)\alpha_n - \mu^2 g^2. \end{aligned} \right.$$

Il est important de remarquer que l'on a ainsi trois relations pour déterminer a_n et b_n; d'où cette conséquence que, si l'on pose

$$\frac{b_n}{a_n} = \lambda,$$

λ est une racine d'une équation du second degré de la forme

$$P\lambda^2 + 2Q\lambda + R = 0,$$

où P, Q, R sont des fonctions rationnelles de g, h, α_n, β_n, ces deux dernières quantités étant elles-mêmes des fonctions rationnelles de g et de h.

L'autre racine de l'équation est évidemment la valeur de $\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}$.

Il résulte de là, en particulier, que l'expression

$$Q^2 - PR$$

est le carré d'une fonction rationnelle de g et de h.

Mais c'est un point que je me réserve de traiter plus tard en essayant, du moins dans des cas particuliers, d'intégrer les systèmes d'équations aux différences finies (**26**) et (**27**).

VI.

30. Les formules précédentes permettent, pour une valeur donnée de x, de calculer de la façon la plus simple les valeurs des réduites d'une fonction z qui satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre dont les coefficients sont rationnels.

Au point de vue du calcul numérique, la solution peut être regardée comme complète; mais, si l'on veut déterminer effectivement par des expressions analytiques les valeurs des coefficients des quotients incomplets, on est conduit à intégrer un système d'équations aux différences ordinaires dans lequel le nombre des quantités inconnues est d'autant plus grand que le degré du polynôme Θ_n est plus élevé.

L'intégration de ces équations semble, en général, présenter d'assez grandes difficultés; nous savons en effet que, dans un cas particulier relativement simple étudié par Jacobi et par Borchardt (à savoir celui où z est l'inverse de la racine carrée d'un polynôme entier), l'intégration dépend de la théorie des fonctions elliptiques et des fonctions abéliennes.

Je reviendrai du reste sur ce point particulier, en essayant de compléter à certains égards les résultats obtenus par ces illustres géomètres.