JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LAGUERRE

Mémoire sur la théorie des équations numériques, première partie

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 9 (1883), p. 99-146.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1883_3_9__99_0>

Mémoire sur la théorie des équations numériques,

Par M. LAGUERRE.

PREMIÈRE PARTIE.

§ I. — Règle des signes de Descartes.

1. La règle des signes de Descartes consiste dans les deux propositions suivantes :

$F(x)$ *désignant un polynôme ordonné suivant les puissances de* x, *le nombre des racines positives de l'équation* $F(x) = 0$ *est au plus égal au nombre des variations du polynôme* $F(x)$.

Si le nombre des racines positives est inférieur au nombre des variations du polynôme, la différence est un nombre pair.

Pour établir la première proposition, je démontrerai que, si elle est vraie quand le polynôme qui forme le premier membre de l'équation présente $(m - 1)$ variations, il est également vrai quand ce polynôme présente m variations. La proposition sera, par suite, établie dans toute sa généralité, puisqu'elle a lieu évidemment dans le cas où tous les termes du polynôme sont de même signe.

Soit donc

$$F(x) = Ax^p + \ldots + Mx^r + Nx^s + \ldots + Rx^u,$$

un polynôme ordonné suivant les puissances croissantes ou décroissantes de x et présentant m variations. L'équation

$$F(x)\,x^{-\alpha} = 0,$$

où α désigne un nombre réel arbitraire, a les mêmes racines positives que l'équation

$$(1) \qquad F(x) = 0,$$

et la fonction qui constitue son premier membre demeure finie et continue, quand x croît indéfiniment à partir d'un nombre positif ε aussi petit qu'on le veut. On peut donc appliquer le théorème de Rolle entre les limites 0 et $+\infty$, et l'on voit que le nombre des racines de l'équation (1) est au plus supérieur d'une unité au nombre des racines de l'équation $x^{-(\alpha+1)}[xF'(x) - \alpha F(x)] = 0$, ou encore de l'équation

$$(2) \qquad xF'(x) - \alpha F(x) = 0.$$

Les coefficients de cette équation sont respectivement

$$A(p-\alpha),\ \ldots,\ M(r-\alpha),\ N(s-\alpha),\ \ldots,\ R(u-\alpha).$$

Le polynôme $F(x)$ présentant m variations, supposons que M et N soient de signes contraires, et choisissons le nombre arbitraire α de telle sorte qu'il se trouve compris entre les nombres r et s; on voit que, dans la suite précédente, les coefficients numériques des quantités A, ..., M et ceux des quantités N, ..., R sont de signe contraire.

Le premier membre de l'équation (2) présente donc autant de variations que la suite

$$A,\ \ldots,\ M,\ -N,\ \ldots,\ -R,$$

c'est-à-dire $(m-1)$ variations; il en résulte que cette équation a au plus $(m-1)$ racines positives et l'équation (1) au plus m racines positives. La proposition I est donc complètement établie.

Pour démontrer la proposition II, il suffit, comme on sait, de remarquer que le nombre des racines positives de l'équation (1) et le nombre des variations du polynôme $F(x)$ sont toujours de même parité.

2. La démonstration précédente ne suppose en aucune façon que les exposants $p, n, r, s, \ldots$ sont des nombres entiers; ils peuvent être fractionnaires ou même incommensurables.

Ainsi l'équation

$$x^3 - x^2 + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{7}} - 1 = 0,$$

présentant trois variations, a au plus trois racines positives; il est clair, du reste, qu'elle ne peut avoir de racine négative.

On peut supposer également que $F(x)$ soit une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x. Si elle est convergente pour toutes les valeurs positives de x plus petites qu'un nombre donné a, en cessant d'être convergente pour $x = a$, il résulte de la démonstration précédente que *le nombre des valeurs positives de x, pour lesquelles la série* $F(x)$ *est convergente et a pour valeur zéro, est au plus égal au nombre des variations de la série.*

De plus, *si le nombre des valeurs de x qui jouissent de cette propriété est inférieur au nombre des variations de la série, la différence est un nombre pair.*

En effet, le nombre des variations des termes de la série étant supposé fini (ce qu'il faut nécessairement supposer pour pouvoir appliquer le théorème précédent), $F(x)$ est égal à un polynôme $\Phi(x)$ suivi d'un nombre indéfini de termes ayant tous le signe du dernier terme de $\Phi(x)$. Pour $x = 0$, la série a le signe du premier terme de $\Phi(x)$. Quand x tend vers la valeur a, $\Phi(x)$ tend vers une valeur finie; les termes complémentaires, qui sont en nombre infini, ont tous le signe du dernier terme de $\Phi(x)$, et leur valeur absolue va en croissant indéfiniment, puisque la série est divergente pour $x = a$.

Donc, quand x s'approche indéfiniment de a, la série de $\Phi(x)$ croit indéfiniment en valeur absolue en gardant le signe du dernier terme de $\Phi(x)$; le nombre des variations de la série et le nombre des racines considérées sont par suite de même parité, d'où résulte immédiatement la proposition susénoncée.

Des considérations toutes semblables s'appliquent au cas où $F(x)$

est une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x, et encore à celui où $F(x)$ est une série procédant à la fois suivant les puissances croissantes et suivant les puissances décroissantes de la variable.

3. Soit

$$(3) \qquad f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m$$

un polynôme entier du degré m; je considérerai la suite des polynômes

$$\begin{aligned}
f_m(x) &= A_0, \\
f_{m-1}(x) &= A_0 x + A_1, \\
f_{m-2}(x) &= A_0 x^2 + A_1 x + A_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
f_1(x) &= A_0 x^{m-1} + A_1 x^{m+2} + \ldots + A_{m-1}, \\
f(x) &= A_0 x_m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m.
\end{aligned}$$

dont le dernier est précisément le polynôme donné.

Les valeurs que prennent ces polynômes, pour une valeur donnée de la variable égale à a, se calculent facilement par voie récurrente; on a, en effet, la relation bien connue

$$f_i(a) = a f_{i+1}(a) + A_{m-i},$$

et les quantités $f_m(a)$, $f_{m-1}(a)$, $\ldots$, $f_1(a)$, $f(a)$ se rencontrent d'elles-mêmes quand on veut obtenir le résultat de la substitution de a dans $f(x)$.

Cela posé, on peut énoncer la proposition suivante :

Si a est un nombre positif, le nombre des variations des termes de la suite

$$f_m(a),\ f_{m+1}(a),\ f_{m-2}(a),\ \ldots,\ f_1(a),\ f(a),$$

est au plus égal au nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ qui sont supérieures à a, et, s'il est plus grand, la différence de ces deux nombres est un nombre pair.

Pour la démontrer, je considère l'identité

$$\frac{f(x)}{x-a} = f_m(a)x^{m-1} + f_{m-1}(a)x^{m-2} + \ldots + f_1(a) + \frac{f(a)}{x-a};$$

pour des valeurs de x supérieures à a, le second membre est développable en une série convergente procédant suivant les puissances décroissantes de x, et l'on a

$$\frac{f(x)}{x-a} = f_m(a)x^{m-1} + f_{m-1}(a)x^{m-2} + \ldots$$
$$+ f_1(a) + \frac{f(a)}{x} + \frac{af(a)}{x^2} + \frac{a^2f(a)}{x^3} + \ldots.$$

Le nombre des valeurs de x pour lesquelles la série est convergente et a pour valeur zéro est précisément le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ qui sont plus grandes que a; ce nombre, en vertu de la proposition fondamentale que j'ai démontrée plus haut, est au plus égal au nombre des variations du second membre, lequel se réduit évidemment au nombre des variations des termes de la suite

$$f_m(a),\ f_{m-1}(a),\ f_{m-2}(a),\ \ldots,\ f_1(a),\ f(a),$$

d'où résulte le théorème énoncé précédemment.

Comme application, je considérerai l'équation

$$f(x) = x^5 - 3x^3 + x^2 - 8x - 10 = 0.$$

Elle n'a pas de racines négatives; en calculant successivement le résultat de la substitution dans le premier membre des nombres 1, 2 et 3, on forme le tableau suivant:

x	$f_4(x)$	$f_3(x)$	$f_2(x)$	$f_1(x)$	$f(x)$
+1	+1	−2	−1	−9	−19
+2	+1	+1	+3	−2	−14
+3	+1	+6	+19	+49	+137

Tous les nombres relatifs à $+3$ étant positifs, on en conclut d'abord qu'il n'y a aucune racine de l'équation qui soit supérieure à $+3$; de plus, les nombres relatifs à $+2$ présentant une seule variation, on est certain qu'il y a une racine comprise entre $+2$ et $+3$ et qu'il n'y en a qu'une. D'ailleurs, les nombres relatifs à $+1$ ne présentant non plus qu'une variation, on en conclut qu'il n'y a qu'une racine supérieure à $+1$: c'est précisément celle que nous avons séparée; si enfin on considère la transformée en $\frac{1}{x}$,

$$10x^5 + 8x^4 - x^3 + 3x^2 - 1 = 0,$$

la substitution de $+1$ donne la suite de nombres $+10$, $+18$, $+17$, $+20$, $+19$, qui ne présente aucune variation. L'équation n'a donc aucune racine inférieure à $+1$ et, par suite, a une seule racine positive comprise entre $+2$ et $+3$.

4. La proposition précédente peut encore s'énoncer d'une autre façon.

Le nombre a étant positif, il est clair que les quantités

$$A_0 a^m,\quad A_0 a^m + A_1 a^{m-1},\quad A_0 a^m + A_1 a^{m-1} + A_2 a^{m-2},\quad \ldots$$

ont respectivement le même signe que les quantités $f_m(a)$, $f_{m-1}(a)$, $f_{m-2}(a)$, ...; nous pouvons donc dire que le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ est au plus égal au nombre des variations des termes de la suite

$$A_0 a^m,\quad A_0 a^m + A_1 a^{m-1},\quad \ldots,\quad A_0 a^m + A_1 a^{m-1} + \ldots + A_{m-1} a + A_m.$$

En général, $P + Q + R + S + \ldots$ désignant une suite quelconque de termes, j'appellerai nombre des *alternances* de cette suite le nombre des variations de la suite

$$P,\quad P + Q,\quad P + Q + R,\quad P + Q + R + S,\quad \ldots.$$

Cette définition étant posée, le théorème précédent peut s'énoncer de la façon suivante :

Soit le polynôme

$$F(x) = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots + Lx^{\lambda},$$

où le second membre est ordonné suivant les puissances décroissantes de x, *le nombre des racines de l'équation* $F(x) = 0$, *qui sont supérieures au nombre positif* a, *est au plus égal au nombre des alternances de la suite*

$$Aa^{\alpha} + Ba^{\beta} + Ca^{\gamma} + \ldots + La^{\lambda},$$

et si ces deux nombres diffèrent, leur différence est un nombre pair.

La démonstration que j'ai donnée de ce théorème suppose évidemment que les nombres α, β, γ, ..., sont entiers et positifs, mais il est facile de voir que cette restriction est inutile.

En premier lieu, si quelques-uns étaient négatifs, en multipliant $F(x)$ par une puissance de x convenablement choisie (ce qui n'altère pas le nombre des racines positives de l'équation), on pourrait rendre tous ces exposants positifs.

En second lieu, si quelques-uns des nombres α, β, γ, ... étaient fractionnaires, on pourrait les rendre entiers en changeant x en x^{ω}, ω étant le plus petit commun multiple des dénominateurs des nombres α, β, γ, ... La proposition a donc lieu, même quand les exposants sont négatifs ou fractionnaires, et, par un raisonnement connu, on en déduit qu'elle subsiste encore lorsque les exposants sont incommensurables.

Rien n'empêche même de supposer que le nombre des termes de la fonction $F(x)$ soit illimité, pourvu que la série composée de ses termes soit convergente pour $x = a$.

5. On peut chercher une limite du nombre des racines positives d'une équation $f(x) = 0$, qui sont inférieures à un nombre positif a, en considérant l'expression $\frac{f(x)}{a - x}$ qui, pour toutes les valeurs de x comprises entre zéro et a, est développable en une série procédant suivant les puissances croissantes de la variable. La marche à suivre est exactement celle que j'ai suivie précédemment et, sans m'arrêter aux détails

de la démonstration, j'énoncerai de suite la proposition fondamentale suivante :

Étant donné le polynôme

$$F(x) = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots + Lx^\lambda,$$

où le second membre est ordonné suivant les puissances croissantes de x *et où d'ailleurs les exposants sont des quantités réelles quelconques, positives ou négatives, commensurables ou incommensurables, le nombre des racines positives de l'équation* $F(x) = 0$, *qui sont inférieures à un nombre positif donné* a, *est au plus égal au nombre des alternances de la suite*

$$Aa^\alpha + Ba^\beta + Ca^\gamma + \ldots + La^\lambda,$$

et, si ces deux nombres diffèrent, leur différence est un nombre pair.

Cette proposition subsiste quand le nombre des termes de $F(x)$ est illimité, pour que la série composée de ces termes soit convergente pour $x = a$; le nombre de ces variations sera du reste évidemment fini, si la série tend, pour $x = a$, vers une limite différente de zéro.

Je mentionnerai, comme cas particulier et à cause de son importance dans les applications, le corollaire suivant :

Le nombre des racines de l'équation $F(x) = 0$, *qui sont comprises entre* 0 *et* $+1$, *est au plus égal au nombre des alternances de la suite*

$$A + B + C + \ldots + L,$$

et, si ces deux nombres diffèrent, leur différence est un nombre pair.

---

(1) Le cas où $F(x)$ est ordonné suivant les puissances décroissantes de x donne également lieu à la proposition suivante :

Le nombre des racines positives de l'équation $F(x) = 0$ *qui sont supérieures à l'unité est au plus égal au nombre des alternances de la suite*

$$A + B + C + \ldots + L,$$

et, si ces deux nombres diffèrent, leur différence est un nombre pair.

6. Soit $f(x)$ un polynôme entier et posons.

$$F(x) = f(a+x) = f(a) + xf'(a) + \frac{x^2}{1.2}f''(a) + \ldots;$$

h désignant un nombre positif, il résulte de ce qui précède que le nombre des racines de l'équation $F(x) = 0$ qui sont comprises entre 0 et h, ou, en d'autres termes, le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ qui sont comprises entre a et $a + h$, est au plus égal au nombre des alternances de l'expression

$$f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1.2}f''(a) + \ldots.$$

En posant

$$F(x) = f(a - x) = f(a) - xf'(a) + \frac{x^2}{1.2}f''(a) + \ldots,$$

on verrait de même que, h étant une quantité positive, le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$, qui sont comprises entre a et $a - h$, est au plus égale au nombre des alternances de la suite

$$f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{1.2}f''(a) + \ldots.$$

On peut donc énoncer cette proposition :

$f(x)$ étant un polynôme entier, a et h deux nombres quelconques positifs ou négatifs, le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ qui sont comprises entre a et $a + h$ est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1.2}f''(a) + \ldots.$$

et, si ces deux nombres diffèrent, leur différence est un nombre pair.

Remarque. — Considérons les diverses quantités

$$f(a),\ f(a) + hf'(a),\ f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1.2}f''(a),\ \ldots,$$

dont la dernière est précisément $f(a+h)$, et soient respectivement P et Q la plus petite et la plus grande d'entre elles; toutes les expressions

$$f(a)-\mathrm{P},\; f(a)-\mathrm{P}+hf'(a),\; f(a)-\mathrm{P}+hf'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a),\; \ldots,$$

seront positives, il en résulte, si l'on pose $f(x)-\mathrm{P}=\varphi(x)$, que la suite

$$\varphi(a)+h\varphi'(a)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(a)+\ldots$$

ne présente pas d'alternance. L'équation $f(x)-\mathrm{P}=0$ n'a donc aucune racine comprise entre a et $a+h$; on prouverait également qu'il en est de même de l'équation $f(x)-\mathrm{Q}=0$; d'où cette conclusion importante :

Lorsque x varie depuis $x=a$ jusqu'à $x=a+h$, la valeur du polynôme $f(x)$ demeure constamment comprise entre les nombres P *et* Q.

7. Le théorème précédent n'est qu'un cas particulier d'une proposition plus générale, qu'il est facile d'établir directement et que l'on peut énoncer de la façon suivante :

$f(x)$ désignant un polynôme entier du degré n, soient ω un nombre arbitraire, a et b deux nombres quelconques ne comprenant pas entre eux le nombre ω; cela posé, si l'on désigne par V *le nombre des alternances que présente la suite*

$$(1)\quad f(x)+(\omega-x)f'(x)+\frac{(\omega-x)^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{(\omega-x)^n}{1.2\ldots n}f^n(x),$$

quand on y remplace x par a, et par V′ *le nombre des alternances de cette suite quand on y remplace x par b, le nombre des racines de l'équation $f(x)=0$ comprises entre a et b est au plus égal à la valeur absolue de la différence* V − V′. *Si les nombres a et b comprennent ω, le nombre des racines comprises entre a et b est au plus égal à la somme* V + V′; *dans les deux cas, la différence des deux nombres, si elle existe, est un nombre pair.*

Pour établir cette proposition, je remarquerai qu'en posant, pour abréger,

$$U_0 = f(x),\ U_1 = f(x) + (\omega - x) f'(x),\ \ldots,$$
$$U_i = f(x) + (\omega - x) f'(x) + \frac{(\omega - x)^2}{1.2} f''(x) + \ldots + \frac{(\omega - x)^i}{1.2\ldots i} f^i(x) \ldots,$$
$$U_n = f(\omega),$$

le nombre des alternances de la suite (1), pour une valeur donnée de x, est le nombre des variations des termes de la suite $U_0, U_1, \ldots, U_{i-1}, U_i, U_{i+1}, \ldots, U_n$, dont la dernière est la constante $f(\omega)$. En supposant, pour fixer les idées $a < b < \omega$, examinons comment peut se modifier ce nombre de variations, quand x croît d'une façon continue depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$. Soit une fonction intermédiaire U_i, qui s'annule pour une valeur α de x comprise entre a et b; le nombre des variations de la suite ne peut changer que si U_{i-1} et U_{i+1} sont de signe contraire. On a évidemment

$$U_{i+1}(\alpha) = \frac{(\omega - \alpha)^{i+1}}{1.2\ldots(i+1)} f^{i+1}(\alpha),$$

quantité qui a le même signe que $f^{i+1}(\alpha)$.

Un calcul facile donne d'ailleurs

$$U'_i(x) = \frac{(\omega - x)^i}{1.2\ldots i} f^{i+1}(x),$$

d'où l'on voit que $U'_i(\alpha)$ et $U_{i+1}(\alpha)$ sont de même signe. Si donc $U_{i-1}(\alpha)$ et $U_{i+1}(\alpha)$ sont positifs, $U'_i(\alpha)$ est également positif et $U_i(x)$ étant croissant, pour $x = \alpha$, passe du négatif au positif, ce qui fait perdre deux variations à la suite considérée. Si, au contraire, $U_{i-1}(\alpha)$ et $U_{i+1}(\alpha)$ sont négatifs, $U_i(x)$ passe du positif au négatif, ce qui fait perdre également deux variations. Il ne peut donc y avoir que des variations perdues, et en nombre pair, si l'une des fonctions intermédiaires s'annule quand x varie depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$.

Quand la fonction $U_0 = f(x)$ s'annule, on voit qu'il y a toujours une variation de perdue; la proposition est donc démontrée, dans le cas où

a et b sont tous deux inférieurs à ω, et une démonstration entièrement semblable à la précédente s'établira facilement dans les autres cas.

Remarque I. — Si le nombre arbitraire ω est supposé infiniment grand et positif, les fonctions $U_0, U_1, U_2, \ldots$ ont respectivement les mêmes signes que les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., et l'on retrouve ainsi le théorème de Budan.

Remarque II. — Le nombre ω étant une limite supérieure des racines de l'équation, la proposition précédente donne le nombre exact des racines de l'équation lorsque toutes les racines sont réelles et que les nombres a et b sont inférieurs à ω. La même chose a lieu, toutes les racines de l'équation étant réelles, lorsque ω est une limite inférieure des racines et que a et b sont supérieurs à ω.

8. La méthode que j'ai employée ci-dessus, pour obtenir une limite du nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$, qui sont supérieures à un nombre positif a, repose sur la remarque suivante, à savoir que l'équation $\frac{f(x)}{x-a} = 0$ a les mêmes racines et que le développement de $\frac{f(x)}{x-a}$ suivant les puissances décroissantes de x est convergent pour toutes les valeurs de x supérieures à a.

Il est clair que j'aurais pu faire également usage du développement de l'expression $\frac{f(x)}{(x-a)^p}$, où p désigne un nombre entier arbitraire, et il est même facile de prouver que l'on obtiendrait ainsi, en général, une limite plus approchée. En désignant, en effet, par $\Phi(x)$ une série procédant suivant les puissances entières (croissantes ou décroissantes) de x, on démontrera aisément que, α désignant un nombre positif quelconque, l'expression $\Phi(x)(x-\alpha)$ (laquelle est généralement une série, mais qui peut accidentellement se réduire à un polynôme entier) présente au moins autant de variations que la série $\Phi(x)$; la démonstration est entièrement semblable à celle du lemme de Segner sur lequel repose la démonstration que ce géomètre a donnée de la règle des signes de Descartes.

Il en résulte réciproquement que, $F(x)$ désignant un polynôme entier ou une série procédant suivant les puissances entières (croissantes ou décroissantes de x) et α désignant une quantité quelconque positive, le développement de l'expression $\frac{F(x)}{x-\alpha}$ présente, au plus, autant de variations que le développement de $F(x)$; on peut ajouter que, si les nombres de ces variations sont différents, leur différence est un nombre pair.

La même chose a évidemment lieu si l'on considère l'expression plus générale $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$, où $\varphi(x)$ est un polynôme quelconque décomposable en facteurs de la forme $x-\alpha$, α étant réel et positif.

Ayant fait cette remarque importante, je considère l'expression $\frac{f(x)}{(x-a)^p}$ où $f(x)$ désigne un polynôme entier, a un nombre positif et p un nombre entier arbitraire.

Soient n le nombre des racines de l'équation $f(x)=0$, qui sont supérieures à a, et V le nombre des variations que présente le développement de l'expression précédente, suivant les puissances décroissantes de x; il résulte, des propositions énoncées ci-dessus, que n est au plus égal à V (leur différence, s'il y en a une, étant d'ailleurs un nombre pair); le nombre V ne peut que diminuer quand le nombre entier p augmente : il ne peut pas d'ailleurs diminuer au-dessous d'une certaine limite, puisqu'il doit être toujours supérieur à n.

Le point essentiel dans cette méthode, pour en déduire le nombre n avec le plus d'approximation possible, serait de déterminer exactement cette limite du nombre V, lorsque p grandit indéfiniment; mais cette recherche paraît présenter de grandes difficultés.

Je ferai, de préférence, usage de la proposition suivante :

Si l'on met la fraction $\frac{f(x)}{(x-a)^p}$ *sous la forme suivante :*

$$Ax^\alpha + Bx^\beta + \ldots + Lx^\lambda + x^\lambda\left(\frac{\mathfrak{A}}{x-a} + \frac{\mathfrak{B}}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{\mathfrak{L}}{(x-a)^p}\right),$$

où les exposants $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ *vont en décroissant* (λ *pouvant être négatif*), *ce qui d'ailleurs peut se faire d'une infinité de manières, le nombre des racines de l'équation* $f(x)=0$ *qui sont supérieures au nombre positif* *a est au plus égal au nombre des variations des termes de la suite*

$$\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \ldots,\ \mathrm{L},\quad \mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \ldots,\ \mathfrak{L},$$

et, si ces deux nombres diffèrent, leur différence est un nombre pair.

Soient, en effet, n le nombre des racines de l'équation proposée qui sont supérieures à a, et V le nombre des variations que présente le développement de $\frac{f(x)}{(x-a)^p}$ suivant les puissances décroissantes de x, on a, comme je l'ai démontré,

$$n \leqq \mathrm{V}.$$

Désignons maintenant par V_0 le nombre des variations de la suite

$$\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \ldots,\ \mathrm{L},\ \mathfrak{A}$$

et par V_1 le nombre des variations que présente le développement en série de l'expression

$$(1) \qquad \frac{\mathfrak{A}}{x-a}+\frac{\mathfrak{B}}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{\mathfrak{L}}{(x-a)^p};$$

on aura évidemment

$$\mathrm{V}=\mathrm{V}_0+\mathrm{V}_1.$$

Il résulte de ce qui précède que V_1 est au plus égal au nombre des variations que présente le développement du produit par $(x-a)$ de l'expression (1), c'est-à-dire au nombre des variations du développement de

$$\mathfrak{A}+\frac{\mathfrak{B}}{(x-a)}+\frac{\mathfrak{C}}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{\mathfrak{L}}{(x-a)^{p-1}};$$

en désignant par $\mathrm{V}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ le nombre de variations que présentent les deux quantités $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ (nombre qui est d'ailleurs zéro ou l'unité), par V_2 le nombre des variations que présente le développement de l'expression

$$\frac{\mathfrak{B}}{x-a}+\frac{\mathfrak{C}}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{\mathfrak{L}}{(x-a)^{p-1}},$$

On aura donc

$$V_1 \leqq V(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) + V_2$$

et, de même,

$$V_2 \leqq V(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) + V_3,$$

V_3 désignant le nombre des variations que présente le développement de l'expression

$$\frac{\mathfrak{C}}{(x-a)} + \frac{\mathfrak{D}}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{\mathfrak{L}}{(x-a)^{p-2}};$$

d'où l'on déduira sans peine

$$V_1 \leqq V(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) + V(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) + \ldots + V(\mathfrak{K}, \mathfrak{L}),$$

et de là résulte immédiatement la proposition énoncée.

9. L'application du théorème précédent se fait de la façon la plus simple dans le cas où a est égal à l'unité, cas auquel se ramène aisément le cas général par un changement de variable, et en faisant usage d'un algorithme qui a déjà été employé par Horner et par Budan.

Cet algorithme consiste à former successivement, et par voie récurrente, les différents coefficients des développements de $\frac{f(x)}{x-1}$, $\frac{f(x)}{(x-1)^2}$, $\frac{f(x)}{(x-1)^3}$, ... suivant les puissances décroissantes de x.

Soit, pour fixer les idées,

$$f(x) = \alpha_0 x^5 + \alpha_1 x^4 + \alpha_2 x^3 + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x + \alpha_5;$$

on écrira d'abord (Tableau A) les coefficients de cette équation (les coefficients des puissances qui manquent étant remplacés par des zéros), en les faisant suivre d'une suite indéfinie de zéros.

Au-dessous, dans une première ligne horizontale, on écrira une suite de nombres $a_0, a_1, a_2, \ldots$, dont le premier est α_0, chacun des suivants étant formé en additionnant le terme précédent avec le terme de la suite précédente qui se trouve dans la même colonne verticale, en sorte que $a_1 = a_0 + \alpha_1$, $a_2 = a_1 + \alpha_2$, ...; on voit ainsi qu'à partir du terme a_4 les termes suivants a_5, a_6, a_7, ... sont tous égaux entre eux. Les nombres ainsi obtenus sont, comme il est facile de le voir, les coefficients du développement de $\frac{f(x)}{x-1}$ suivant les puissances décroissantes de x.

Au-dessous, dans une deuxième ligne horizontale, on écrira une suite de nombres b_0, b_1, b_2, ... déduits des nombres a_0, a_1, a_2, ... comme ceux-ci l'ont été de α_0, α_1, α_2, ..., en sorte que

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = b_0 + a_1, \quad b_2 = b_1 + a_2, \quad \ldots;$$

ces divers nombres sont les coefficients du développement de $\frac{f(x)}{(x-1)^2}$ suivant les puissances décroissantes de x.

En poursuivant en observant la même loi, on formera une suite de lignes horizontales

$$\begin{array}{cccccc} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \ldots, \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \ldots, \\ e_0 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & \ldots, \\ .. & .. & .. & .. & .. & \ldots, \end{array}$$

dont les divers termes donneront les coefficients des développements $\frac{f(x)}{(x-1)^3}$, $\frac{f(x)}{(x-1)^4}$, $\frac{f(x)}{(x-1)^5}$, ..., suivant les puissances décroissantes de x.

Si, en particulier, on considère les nombres a_5, b_4, c_3, d_2, e_1, f_0, il est aisé de voir qu'à des facteurs numériques près positifs, ils sont égaux à $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$, $f'''(1)$, $f^{\text{IV}}(1)$, $f^{\text{V}}(1)$; c'est dans le but de former ces nombres d'une façon commode et rapide que Budan faisait usage du Tableau précédent, et il résulte de son théorème que le nombre des variations, présenté par la suite de ces termes, donne une limite supérieure du nombre des racines de l'équation qui sont supérieures à l'unité. Mais, on peut faire usage de ce Tableau d'une infinité de manières et souvent d'une façon plus avantageuse.

Tableau A.

α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	o	o	o	...
a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	...
b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	...
c_0 ..	c_1 ..	c_2 ..	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	...
d_0 ..	d_1 ..	d_2 ..	d_3 ..	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	...
e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	...
f_0 ..	f_1 ..	f_2 ..	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	...
g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	...

En se reportant, en effet, à la façon dont a été construit ce Tableau, on voit sans peine que l'on a les identités suivantes :

$$\frac{f(x)}{(x-1)^3} = c_0x^2 + c_1x + c_2 + \frac{c_3}{x-1} + \frac{b_4}{(x-1)^2} + \frac{a_5}{(x-1)^3},$$

$$\frac{f(x)}{(x-1)^4} = d_0x + d_1 + \frac{d_2}{x} + \frac{d_3}{x^2} + \frac{d_4}{x^2(x-1)}$$
$$+ \frac{c_5}{x^2(x-1)^2} + \frac{b_6}{x^2(x-1)^3} + \frac{a_7}{x^2(x-1)^4};$$

d'où résulte, en vertu du théorème énoncé ci-dessus, que le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$, qui sont supérieures à l'unité, est au plus égal au nombre des variations que présente chacune des deux suites

$$c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ b_4,\ a_5$$

et

$$d_0,\ d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_5,\ c_4,\ b_6,\ a_7.$$

D'une façon générale, si l'on convient d'appeler diagonale principale la diagonale qui renferme les nombres a_3, b_4, c_3, d_2, e_1, f_0 et qui donne (à des facteurs numériques près positifs) les valeurs de $f(x)$ et de ses dérivées pour $x = 1$, on peut énoncer la proposition suivante :

Étant formé le Tableau A, *si l'on suit une ligne horizontale quelconque jusqu'à ce que l'on atteigne ou que l'on dépasse le terme correspondant de la diagonale principale et qu'ensuite on parcoure le Tableau obliquement et parallèlement à cette diagonale jusqu'à la première ligne horizontale, le nombre des racines de l'équation* $f(x) = 0$, *qui sont supérieures à l'unité, est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes du Tableau que l'on a rencontrés successivement pendant ce parcours ; et, si ces deux nombres diffèrent, leur différence est un nombre pair.*

En se reportant au Tableau précédent, on voit ainsi que le nombre des racines positives supérieures à l'unité est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes de la suite

$$f_0,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ e_4,\ d_5,\ c_6,\ b_7,\ a_8.$$

10. Quelques exemples ne seront pas inutiles pour éclaircir ce qui précède.

Exemple I. — Soit l'équation $x^3 - 4x + 6 = 0$; pour avoir une limite du nombre des racines supérieures à l'unité, on formera le Tableau suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & -4 & 6 & 0 \\
\hline
1 & 1 & -3 & 3 & 3 \\
1 & 2 & -1 & 2 & \\
1 & 3 & 2 & & \\
1 & & & &
\end{array}$$

La diagonale principale donne les termes 1, 3, -1, 3, qui présentent deux variations; l'application du théorème de Budan indiquerait donc la possibilité de deux racines.

Mais la suite 1, 3, 2, 2, 3, formée en suivant la troisième ligne horizontale jusqu'au terme $+2$ et en remontant parallèlement à la diagonale, n'offre aucune variation; l'équation n'a donc aucune racine supérieure à l'unité.

Pour voir si elle a des racines inférieures à l'unité, considérons la transformée en $\frac{1}{x}$,

$$6x^3 - 4x^2 + 1 = 0;$$

on formera le Tableau suivant :

6	−4	0	1
6	2	2	3

qui montre immédiatement que l'équation proposée n'a pas de racines positives; l'application de la règle des signes de Descartes à la transformée en $-x$ fait voir d'ailleurs qu'elle a une seule racine négative.

Exemple II. — Soit l'équation

$$x^4 - 5x^3 + 12x^2 - 15x + 9 = 0,$$

qui n'a évidemment aucune racine négative. Pour avoir une limite du nombre des racines supérieures à l'unité, nous formerons le Tableau suivant :

1	−5	12	−15	9	0
1	−4	8	−7	2	2
1	−3	5	−2	0	
1	−2	3	1		
1	−1	2			
1	0				

Les termes de la diagonale principale 1, -1, 3, -2, 2 offrent ici quatre variations, et par suite l'application du théorème de Budan permet de croire à l'existence de quatre racines; mais, la suite 1, 0, 2, 1, 0, 2 ne présentant aucune variation, on en conclut que l'équation n'a aucune racine supérieure à l'unité.

Pour rechercher les racines inférieures à l'unité, je considère la transformée en $\frac{1}{x}$,

$$9x^4 - 15x^3 + 12x^2 - 5x + 1 = 0,$$

qui donne le Tableau suivant :

9	−15	12	−5	1
9	−6	6	1	2
9	3	9	10	

comme la suite 9, 3, 9, 10, 2 n'a pas de variations, on voit que l'équation donnée n'a pas de racine positive inférieure à l'unité; toutes ses racines sont donc imaginaires.

Exemple III. — Soit l'équation $x^4 - 3x^3 + 9x - 9 = 0$, la transformée en $-x$,

$$x^4 + 3x^3 - 9x - 9 = 0,$$

montre immédiatement qu'elle a une seule racine négative. Pour avoir une limite du nombre des racines positives supérieures à l'unité, je forme le Tableau suivant :

1	−3	0	9	−9				
1	−2	−2	7	−2	−2	−2	−2	−2
1	−1	−3	4	2	0	−2	−4	
1	0	−3	1	3	3	1		
1	1	−2	−1	2	5			
1	2	0	−1	1				
1	3	3	2					

Les termes de la diagonale principale présentent trois variations, mais, la suite

$$1,\ 3,\ 3,\ 2,\ 1,\ 5,\ 1,\ -4,\ -2$$

n'en présentant qu'une, on voit que l'équation proposée a une seule racine supérieure à l'unité.

A l'égard des racines positives inférieures à l'unité, je considérerai la transformée en $\frac{1}{x}$,

$$9x^4 - 9x^3 + 4x - 1 = 0$$

qui donne le Tableau suivant :

$$\frac{9 \quad -9 \quad 4 \quad -1}{9 \quad\ 0 \quad\ 4 \quad\ 3},$$

d'où l'on conclut que l'équation n'a pas de racines inférieures à l'unité.

11. Soit $f(x)$ un polynôme entier; en désignant par ω une quantité positive et par m un nombre entier arbitraire, considérons le développement, suivant les puissances croissantes de x, de la fraction

$$\frac{f(x)}{\left(1-\frac{x}{\omega}\right)^m}.$$

Soit V le nombre des variations de ce développement; il résulte de ce qui précède que le nombre V ne peut que diminuer quand le nombre m augmente; il est d'ailleurs, au moins, égal au nombre p des racines positives de l'équation $f(x) = 0$, qui sont inférieures à ω. Cela posé, faisons croître indéfiniment les nombres ω et m, de telle sorte que le rapport $\frac{m}{\omega}$ ait pour limite un nombre donné positif z; $\frac{1}{\left(1-\frac{x}{\omega}\right)^m}$ ayant pour limite e^{zx}, on peut énoncer la proposition suivante :

z désignant un nombre positif, le nombre V des variations que présente le développement de $e^{zx} f(x)$ suivant les puissances croissantes de x

ne peut que diminuer, quand z augmente, et il est au moins égal au nombre p des racines positives de l'équation $f(x) = 0$.

Soient

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

et

$$e^{zx} f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 \frac{x^2}{1.2} + A_3 \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots;$$

on trouve aisément

$$A_0 = a_0, \quad A_1 = a_0 z + a_1, \quad A_2 = a_0 z^2 + 2 a_1 z + 2 a_2, \quad \ldots,$$

et, en général,

$$A_i = a_0 z^i + i a_1 z^{i-1} + i(i-1) a_2 z^{i-2} + i(i-1)(i-3) a_3 z^{i-3} + \ldots.$$

D'où l'on voit, z étant positif, que A_i est de même signe que l'expression

$$a_0 z^n + i a_1 z^{n-1} + i(i-1) a_2 z^{n-2} + i(i-1)(i-2) a_3 z^{n-3} + \ldots;$$

si donc on forme le polynôme

$$\begin{aligned} F(x) = a_0 z^n &+ a_1 z^{n-1} x + a_2 z^{n-2} x(x-1) + \ldots \\ &+ a_n x(x-1)\ldots(x-n+1), \end{aligned}$$

le nombre V est égal au nombre des variations de la suite

$$F(0), \; F(1), \; F(2), \; \ldots.$$

Posons $z = \frac{1}{\omega}$ et, en changeant x en $\frac{x}{\omega}$,

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} \Phi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x(x-\omega) + a_3 x(x-\omega)(x-2\omega) + \ldots \\ \qquad + a_n x(x-\omega)\ldots(x-\overline{n-1}\,\omega), \end{cases}$$

V est aussi égal au nombre des variations de la suite

$$\Phi(0), \; \Phi(\omega), \; \Phi(2\omega), \; \ldots.$$

En désignant par p' le nombre des racines positives de l'équation

$\Phi(x) = 0$, on a d'ailleurs $V \overline{<} p'$; d'où, en vertu de la relation $V \overline{>} p$,

$$p' \overline{>} p.$$

Ainsi l'équation $\Phi(x) = 0$ a au moins autant de racines positives que l'équation $f(x) = 0$; en particulier, si l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles et positives, il en est de même de l'équation

$$\Phi(x) = 0.$$

Je remarquerai, de plus, que, V étant dans ce cas égal à p, la substitution dans $\Phi(x)$ des nombres $0, \omega, 2\omega, \ldots$ doit précisément donner p variations; d'où il résulte que, i désignant un nombre entier quelconque, l'équation $\Phi(x) = 0$ a, au plus, une racine comprise entre $i\omega$ et $(i+1)\omega$.

Posons, par exemple,

$$f(x) = (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \ldots + x^n;$$

on aura

$$\Phi(x) = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x(x-\omega) + \ldots$$
$$+ x(x-\omega)\ldots(x - \overline{n-1}\,\omega).$$

On voit que l'équation $\Phi(x) = 0$ a toutes ses racines réelles et, de plus, qu'on peut toutes les séparer en substituant dans le polynôme $\Phi(x)$ la suite des nombres

$$0, \ \omega, \ 2\omega, \ 3\omega, \ \ldots.$$

12. Comme je l'ai démontré, le nombre V des variations des termes du développement de $e^{zx}f(x)$ est au moins égal au nombre p des racines positives de l'équation $f(x)=0$; ce nombre ne peut d'ailleurs que diminuer lorsque z prend des valeurs de plus en plus grandes. On peut se demander si, pour des valeurs suffisamment grandes de z (et, par conséquent, pour toutes les valeurs plus grandes), V sera précisément égal à p.

Supposons, ce qu'il est toujours permis de faire, que l'équation

$f(x) = 0$ n'ait pas de racine nulle. De ce que j'ai établi plus haut, il résulte, en supposant z positif, que V est au plus égal au nombre des racines positives de l'équation $\Phi(x) = 0$, où $\Phi(x)$ représente le polynôme qui figure dans l'égalité (A) (nº **11**).

Soit $\omega^k \Theta(\omega)$ le discriminant de ce polynôme; le nombre entier k sera généralement égal à zéro, sauf le cas où l'équation $f(x) = 0$ a des racines égales. Désignons par ω_1 un nombre positif inférieur à la plus petite racine positive de l'équation $\Theta(\omega) = 0$, et faisons varier par degrés insensibles ω, depuis o jusqu'à ω_1. L'équation $\Phi(x) = 0$ n'ayant jamais de racine nulle, puisque a_0 est différent de zéro, aucune racine négative ne pourra devenir positive; les racines qui étaient imaginaires pour $\omega = 0$ ne pourront pas devenir positives, car elles ne le pourraient qu'en devenant égales deux à deux, ce qui est impossible, puisque ω est plus petit que ω_1. Il pourrait se faire, si l'équation $f(x) = 0$ a des racines égales, que certaines racines positives multiples devinssent imaginaires; dans tous les cas, p' désignant le nombre des racines positives de l'équation $\Phi_1(x) = 0$, où $\Phi_1(x)$ désigne ce que devient le polynôme $\Phi(x)$ quand on y remplace ω par ω_1, on a $p' \overline{\gtrless} p$.

Or, on a $V \overline{\gtrless} p'$ et, par suite, $\overline{\gtrless} p$; d'autre part $V \overline{\gtrless} p$; de là, résulte $V = p$; ainsi le nombre ω_1 ayant été choisi comme je l'ai dit plus haut, si l'on pose $z = \frac{1}{\omega_1}$, on est assuré que pour cette valeur de z (et pour les valeurs plus grandes) le nombre des variations que présente le développement de $e^{zx} f(x)$ est exactement égal au nombre des racines positives de l'équation $f(x) = 0$.

Ce théorème subsiste évidemment si cette équation, contrairement à ce que j'ai supposé, avait des racines nulles.

Remarque. — De là résulte une méthode entièrement différente de celle de Lagrange et de celle de Sturm pour déterminer exactement le nombre des racines positives d'une équation.

Cette méthode exige seulement le calcul du discriminant $\omega^k \Theta(\omega)$ du polynôme $\Phi(x)$; mais, ce polynôme étant une fonction de la variable ω, le calcul de ce discriminant ne laisse pas que d'être très pénible.

On a ensuite à déterminer une limite inférieure ω_1 des racines positives de l'équation $\Theta(\omega) = 0$ et, cela posé, le nombre des variations vertu d'une proposition démontrée plus haut (n° 5), que le nombre des racines de l'équation (2) qui sont supérieures à l'unité est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$A_1\alpha_1^i + A_2\alpha_2^i + \ldots + A_n\alpha_n^i.$$

En désignant par R le nombre de ces alternances, on aura donc

$$V'' \leq R \quad \text{et} \quad V < V' + R;$$

d'où encore

$$p \leq V' + R.$$

14. Considérons, en particulier, le cas où l'on arrête la série (A) à son premier terme; il résulte de ce qui précède que p est au plus égal au nombre des racines de l'équation

$$A_1 z^{\log\alpha_1} + A_2 z^{\log\alpha_2} + \ldots + A_n z^{\log\alpha_n} = 0$$

qui sont supérieures à l'unité, et l'on peut énoncer cette proposition importante :

Théorème I. — *Le nombre des racines positives de l'équation*

$$A_1 F(\alpha_1 x) + A_2 F(\alpha_2 x) + \ldots + A_n F(\alpha_n x) = 0,$$

où les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des quantités positives rangées par ordre décroissant de grandeur, est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n.$$

15. On aurait pu, d'une façon plus générale, considérer l'équation

$$A_1 F(\alpha_1 x) + A_2 F(\alpha_2 x) + \ldots + A_n F(\alpha_n x) = \Phi(x),$$

où $\Phi(x)$ désigne un polynôme entier. Mais je crois inutile de m'étendre sur ce sujet; ce que j'ai dit plus haut suffit pour faire voir de quelle manière on pourrait traiter cette question.

et il résulte de la règle des signes de Descartes que le nombre p des racines positives de l'équation (1) [*c'est-à-dire le nombre des quantités positives qui annulent $f(x)$ et pour lequel le développement en série de cette fonction est convergent*] est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes de la série indéfinie

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \ldots + \mathrm{A}_n, \\ \mathrm{A}_1\alpha_1 + \mathrm{A}_2\alpha_2 + \ldots + \mathrm{A}_n\alpha_n, \\ \mathrm{A}_1\alpha_1^2 + \mathrm{A}_2\alpha_2^2 + \ldots + \mathrm{A}_n\alpha_n^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Pour avoir une limite supérieure du nombre de ces variations, arrêtons cette série au terme de rang i,

$$\mathrm{A}_1\alpha_1^i + \mathrm{A}_2\alpha_2^i + \ldots + \mathrm{A}_n\alpha'',$$

et désignons par V' le nombre des variations que présentent ces $i+1$ premiers termes.

En désignant par V'' le nombre des variations de la série indéfinie

$$\mathrm{A}_1\alpha_1^i + \mathrm{A}_2\alpha_2^i + \ldots + \mathrm{A}_n\alpha_n^i,\ \mathrm{A}_1\alpha_1^{i+1} + \mathrm{A}_2\alpha_2^{i+1} + \ldots + \mathrm{A}_n\alpha_n^{i+1},\ \ldots,$$

on a évidemment $\mathrm{V} = \mathrm{V}' + \mathrm{V}''$.

Or la seconde série se composant des valeurs que prend la fonction

$$\Phi(x) = \mathrm{A}_1\alpha_1^i\,\alpha_1^x + \mathrm{A}_2\alpha_2^i\,\alpha_2^x + \ldots + \mathrm{A}_n\alpha_n^i\,\alpha_n^x,$$

lorsqu'on y fait successivement $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, ..., le nombre des variations des termes de cette série est au plus égal au nombre des racines positives de l'équation $\Phi(x) = 0$, ou encore au nombre des racines supérieures à l'unité de l'équation

$$(2)\qquad \mathrm{A}_1\alpha_1^i z^{\log\alpha_1} + \mathrm{A}_2\alpha_2^i z^{\log\alpha_2} + \ldots + \mathrm{A}_n\alpha_n^i z^{\log\alpha_n} = 0,$$

que l'on déduit de la précédente en posant $e^x = z$.

Les nombres positifs α_1, α_2, ..., α_n allant en décroissant, il en est de même des exposants $\log\alpha_1$, $\log\alpha_2$, ..., $\log\alpha_n$; il en résulte, en vertu d'une proposition démontrée plus haut (n° 5), que le nombre des racines de l'équation (2) qui sont supérieures à l'unité est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$A_1\alpha_1^i + A_2\alpha_2^i + \ldots + A_n\alpha_n^i.$$

En désignant par R le nombre de ces alternances, on aura donc

$$V'' \leq R \quad \text{et} \quad V < V' + R;$$

d'où encore

$$p \leq V' + R.$$

14. Considérons, en particulier, le cas où l'on arrête la série (A) à son premier terme; il résulte de ce qui précède que p est au plus égal au nombre des racines de l'équation

$$A_1 z^{\log\alpha_1} + A_2 z^{\log\alpha_2} + \ldots + A_n z^{\log\alpha_n} = 0$$

qui sont supérieures à l'unité, et l'on peut énoncer cette proposition importante :

Théorème I. — *Le nombre des racines positives de l'équation*

$$A_1 F(\alpha_1 x) + A_2 F(\alpha_2 x) + \ldots + A_n F(\alpha_n x) = 0,$$

où les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des quantités positives rangées par ordre décroissant de grandeur, est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n.$$

15. On aurait pu, d'une façon plus générale, considérer l'équation

$$A_1 F(\alpha_1 x) + A_2 F(\alpha_2 x) + \ldots + A_n F(\alpha_n x) = \Phi(x),$$

où $\Phi(x)$ désigne un polynôme entier. Mais je crois inutile de m'étendre sur ce sujet; ce que j'ai dit plus haut suffit pour faire voir de quelle manière on pourrait traiter cette question.

III. — Sur l'équation $\int_a^b e^{-zx}\Phi(z)\,dz = 0$.

16. Appliquons les résultats précédents au cas où $F(x) = e^x$; le développement de cette fonction est, comme on le sait, convergent pour toutes les valeurs de la variable et ne présente que des coefficients positifs.

Soit l'équation

$$(1)\qquad A_1 e^{\alpha_1 x} + A_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots + A_n e^{\alpha_n x} = 0,$$

où les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ vont en décroissant et sont, du reste, positifs ou négatifs.

Cette équation a évidemment les mêmes racines que l'équation suivante :

$$A_1 e^{(k+\alpha_1)x} + A_2 e^{(k+\alpha_2)x} + \ldots + A_n e^{(k+\alpha_n)x} = 0,$$

où k désigne un nombre positif arbitraire que l'on pourra toujours choisir de telle sorte que les nombres $(k+\alpha_1)$, $(k+\alpha_2)$, ..., $(k+\alpha_n)$ soient tous positifs.

En faisant application du théorème I, on en conclut que l'équation (1) a au plus autant de racines positives que la suite

$$(A)\qquad A_1 + A_2 + \ldots + A_n$$

présente d'alternances.

Supposons maintenant que les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ soient les différents termes d'une progression arithmétique dont la raison soit très petite et dont le premier terme et le dernier terme soient respectivement $-a$ et $-b$; je suppose $a < b$. Les coefficients $A_0, A_1, \ldots$ étant complètement arbitraires, on voit que l'équation peut, quand la raison de la progression tend vers zéro, se mettre sous la forme

$$(2)\qquad \int_a^b e^{-zx}\Phi(z)\,dz = 0,$$

où $\Phi(z)$ désigne une fonction entièrement arbitraire, continue ou discontinue d'une façon quelconque, pouvant par exemple être nulle dans autant d'intervalles qu'on le veut.

D'autre part, le nombre des alternances de la suite (A) est au plus égal au nombre des racines de l'équation $\int_a^x \Phi(x)\,dx = 0$, qui sont comprises entre a et b (il pourrait lui être inférieur au cas où cette équation aurait dans cet intervalle des racines d'ordre pair de multiplicité); d'où la proposition suivante :

Le nombre des racines de l'équation (2) *est au plus égal au nombre des racines de l'équation* $\int_a^x \Phi(x)\,dx = 0$, *qui sont comprises entre* a *et* b.

On peut évaluer autrement le nombre des alternances de la suite (A); partageons à cet effet l'intervalle compris entre a et b en intervalles tels que, dans chacun d'eux, la fonction $\Phi(x)$ ne soit pas constamment nulle, soit continue et *de même signe*.

On pourra, en posant ainsi

$$\int_a^b e^{-zx}\Phi(z)\,dz$$
$$= \int_a^{a_1} e^{-zx}\Phi_1(z)\,dz + \int_{a_1}^{a_2} e^{-zx}\Phi_2(z)\,dz + \ldots + \int_{a_n}^{b} e^{-zx}\Phi_n(z)\,dz,$$

énoncer la proposition suivante :

Le nombre des racines positives de l'équation (2) *est au plus égal au nombre des alternances de la suite*

$$\int_a^{a_1} \Phi_1(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} \Phi_2(x)\,dx + \ldots + \int_{a_n}^{b} \Phi_n(x)\,dx.$$

17. Comme application des théorèmes précédents, posons $a = 0$, $b = \infty$ et

$$\Phi(z) = \frac{a_0}{\Gamma(\alpha_0)} z^{\alpha_0 - 1} + \frac{a_1}{\Gamma(\alpha_1)} z^{\alpha_1 - 1} + \ldots + \frac{a_n}{\Gamma(\alpha_n)} z^{\alpha_n - 1}.$$

où les α_i désignent des nombres positifs quelconques et Γ la fonction eulérienne de seconde espèce.

L'équation $\int_0^\infty e^{-zx}\Phi(z)\,dz = 0$ devient

$$\frac{a_0}{x^{\alpha_0}} + \frac{a_1}{x^{\alpha_1}} + \ldots + \frac{a_n}{x^{\alpha_n}} = 0,$$

et j'observe que le nombre de ses racines positives est précisément égal au nombre des racines positives de l'équation

$$(1)\qquad a_0 x^{\alpha_0} + a_1 x^{\alpha_1} + \ldots + a_n x^{\alpha_n} = 0.$$

D'autre part, l'équation $\int_0^x \Phi(x)\,dx = 0$ devient

$$(2)\qquad \frac{a_0 x^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0+1)} + \frac{a_1 x^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} + \ldots + \frac{a_n x^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n+1)} = 0,$$

et il résulte de la proposition précédente que le nombre des racines positives de l'équation (1) est au plus égal au nombre des racines positives de l'équation (2).

18. Considérons l'équation du degré n

$$(1)\qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0,$$

que je mettrai sous la forme

$$a_0 x^{\omega} + a_1 x^{1+\omega} + a_2 x^{2+\omega} + \ldots + a_n x^{n+\omega} = 0,$$

où ω désigne un nombre positif ou nul.

Il résulte de ce qui précède que l'équation (1) a au plus autant de racines positives que l'équation

$$\frac{a_0}{\Gamma(\omega+1)} + \frac{a_1 x}{\Gamma(\omega+2)} + \frac{a_2 x^2}{\Gamma(\omega+3)} + \ldots + \frac{a_n x^n}{\Gamma(\omega+n+1)} = 0,$$

ou encore que l'équation

$$(2)\quad a_0+\frac{a_1 x}{\omega+1}+\frac{a_2 x^2}{(\omega+1)(\omega+2)}+\ldots+\frac{a_n x^n}{(\omega+1)(\omega+2)\ldots(\omega+n)}=0\,;$$

ω désigne, comme je l'ai dit, une quantité positive quelconque ou zéro.

La même chose a lieu à l'égard des racines négatives, comme il est facile de le voir en considérant les transformées en $-x$. En particulier, on peut énoncer cette propriété importante :

Si l'équation (1) *a toutes ses racines réelles, l'équation* (2) *a également toutes ses racines réelles.*

19. Soit le polynôme $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$; formons le produit

$$e^{zx}(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)=\mathrm{U}_0+\mathrm{U}_1z+\mathrm{U}_2z^2+\ldots,$$

où les U_i sont des fonctions de z. Comme il est aisé de le prouver, on a généralement $\frac{d\mathrm{U}_i}{dz}=\mathrm{U}_{i-1}$, en sorte que toutes les fonctions d'indice inférieur à U_i sont les dérivées successives de cette fonction.

On a évidemment

$$\mathrm{U}_i=\frac{a_0x^i}{1.2\ldots i}+\frac{a_1x^{i-1}}{1.2\ldots(i-1)}+\frac{a^2x^{i-2}}{1.2\ldots(i-2)}+\frac{a_3x^{i-3}}{1.2\ldots(i-3)};$$

d'où l'on voit que l'équation $\mathrm{U}_i=0$ a autant de racines réelles distinctes de zéro que l'équation

$$a_3+\frac{a_2x}{i-2}+\frac{a_3x^2}{(i-2)(i-1)}+\frac{a_0x^3}{(i-2)(i-1)}=0.$$

Or cette équation a, en vertu du théorème précédent, toutes ses racines, réelles si $i-2$ est plus grand que zéro, et si l'équation $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=0$ a elle-même toutes ses racines réelles. L'équation $\mathrm{U}_i=0$ a donc également toutes ses racines réelles, si i est >2, et la même proposition a lieu à l'égard des équations $\mathrm{U}_2=0$, $\mathrm{U}_1=0$, puisque U_2 et U_1 sont les deux premières dérivées de U_3.

Cette démonstration s'étend d'elle-même à un polynôme de degré quelconque ; d'où le théorème suivant, qu'il est aisé, du reste, d'établir directement :

Soient $f(x)$ un polynôme quelconque décomposable en facteurs réels du premier degré et $F(x) = e^{zx} f(x) = U_0 + U_1 x + U_2 x^2 + \ldots$; cela posé, U_i désignant un des coefficients quelconques de ce développement, l'équation en z

$$U_i = 0$$

a toutes ses racines réelles.

20. $F(x)$ désignant, comme plus haut, la fonction $e^{zx} f(x)$, posons

$$F(x+h) = e^{zh} e^{zx} f(x+h) = V_0 + V_1 x + V_2 x^2 + \ldots,$$

et V_k désignant un quelconque des coefficients de ce développement, $V_k = \varphi(z)$, en sorte que $V_{k-1} = \varphi'(z)$, $V_{k-2} = \varphi''(z)$, ..., l'équation $\varphi(z+t) = 0$ a, quel que soit z, toutes ses racines réelles et elle peut s'écrire

$$\varphi(z) + t\varphi'(z) + \frac{t^2}{1.2}\varphi''(z) + \ldots + \frac{t^k}{1.2\ldots k}\varphi^{(k)}(z) = 0$$

ou

$$V_k + tV_{k-1} + \frac{t^2}{1.2}V_{k-2} + \ldots + \frac{t^k}{1.2\ldots k}V_0 = 0,$$

ou encore

$$\frac{F^{(k)}(h)}{1.2\ldots k} + \frac{F^{(k-1)}(h)}{1.2\ldots(k-1)} + \frac{t^2}{1.2}\,\frac{F^{(k-2)}(h)}{1.2\ldots(k-2)} + \ldots + \frac{t^k}{1.2\ldots k}F(h) = 0$$

ou enfin, en changeant h en x, t en $\frac{1}{t}$ et en chassant les dénominateurs,

$$F(x) + kF'(x)t + \frac{k(k-1)}{1.2}F''(x)t^2$$
$$+ \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}F'''(x)t^3 + \ldots + F^{(k)}(x)\,t^k = 0;$$

et l'on voit que cette équation en t a, quel que soit x, toutes ses racines réelles.

Si donc on écrit le système suivant d'équations,

$$F(x) + tF'(x) = 0,$$
$$F(x) + 2tF'(x) + t^2F''(x) = 0,$$
$$F(x) + 3tF'(x) + 3t^2F''(x) + t^3F'''(x) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

on voit que, pour toute valeur de x, elles ont leurs racines réelles. Il en serait de même des équations

$$F'(x)+tF''(x)=0,\quad F'(x)+2tF''(x)+t^2F'''(x)=0,\quad \ldots,$$
$$F''(x)+tF'''(x)=0,\quad F''(x)+2tF'''(x)+t^2F^{\text{IV}}(x)=0,\quad \ldots;$$

la dérivée $F(x)$ ayant pour valeur $e^{zx}[f(x)+zf'(x)]$ et l'équation $f(x)+zf'(x)=0$ ayant toutes ses racines réelles, il est clair en effet que $F'(x)$ est une fonction de la même espèce que $F(x)$, et il en est de même de toutes ses dérivées.

21. Les propositions précédentes s'établissent du reste très facilement quand on les suppose démontrées dans le cas où $F(x)$ est un polynôme entier; il suffit de remarquer que $e^{zx}f(x)$ peut être considéré comme la limite du polynôme $\left(1+\frac{zx}{n}\right)^n f(x)$, qui est décomposable en facteurs réels du premier degré.

La même chose a lieu à l'égard de la fonction $e^{-ux^2+nzx}f(x)$, où je suppose u positif; cette fonction peut être en effet considérée comme la limite de $\left(1-\frac{ux^2}{n}\right)^n\left(1+\frac{zx}{n}\right)f(x)$; mais les propositions précédentes ne s'appliqueraient pas à une fonction de la forme $e^{\varphi(x)}f(x)$, si le polynôme $\varphi(x)$ était d'un degré supérieur au second, ou si, étant du second degré, le coefficient de x^2 était positif.

Ces remarques très simples trouveront d'utiles applications dans la théorie des fonctions transcendantes.

22 En effectuant un changement de variable, le théorème établi au n° **18** peut s'énoncer ainsi qu'il suit : *L'équation*

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=0 \tag{1}$$

ayant toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation

$$a_0+\frac{a_1x}{\alpha+\omega}+\frac{a_2x^2}{(\alpha+\omega)(2\alpha+\omega)}+\frac{a_3x^3}{(\alpha+\omega)(2\alpha+\omega)(3\alpha+\omega)}+\ldots=0,$$

où α et ω désignent des quantités positives quelconques, la dernière *pouvant être nulle.* De là résulte que, étant donnée une équation ayant toutes ses racines réelles, on peut en déduire une infinité d'autres qui jouissent de la même propriété; en appliquant une seconde fois le théorème précédent, on voit, par exemple, que l'équation

$$\begin{aligned} a_0 &+ \frac{a_1 x}{(\alpha+\omega)(\alpha'+\omega')} + \frac{a_2 x^2}{(\alpha+\omega)(2\alpha+\omega)(\alpha'+\omega')(2\alpha'+\omega')} \\ &+ \frac{a_3 x^3}{(\alpha+\omega)(2\alpha+\omega)(\alpha'+\omega')(3\alpha+\omega)(2\alpha'+\omega')(3\alpha'+\omega')} + \ldots = 0 \end{aligned}$$

a toutes ses racines réelles, α' et ω' étant assujetties aux mêmes conditions que α et ω.

Soit, en général, $\theta(x)$ un polynôme d'un degré quelconque décomposable en facteurs réels du premier degré et ne devenant jamais négatif pour aucune valeur de la variable, en sorte que $\theta(x)$ soit de la forme

$$\theta(x) = x^p(ax+b)^q(a'x+b')^{q'}(a''x+b'')^{q''}, \quad \ldots,$$

les nombres p, q, q', q'', ... étant des nombres entiers ou étant égaux à zéro, a, a', a'', ..., et b, b', b'', ... étant des nombres positifs; on verra aisément par ce qui précède que l'équation

$$a_0 + \frac{a_1}{\theta(1)} + \frac{a_2 x^2}{\theta(1)\theta(2)} + \frac{a_3 x^3}{\theta(1)\theta(2)\theta(3)} + \ldots + \frac{a_n x^n}{\theta(1)\theta(2)\ldots\theta(n)} = 0$$

a toutes ses racines réelles.

Mais on peut donner une plus grande généralité à cette proposition: l'équation (1) ayant en effet toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation

$$a_0 + \frac{a_1 x}{1+\omega} + \frac{a_2 x^2}{(1+\omega)(1+2\omega)} + \frac{a_3 x^3}{(1+\omega)(1+2\omega)(1+3\omega)} + \ldots = 0,$$

par suite de l'équation

$$a_0 + \frac{a_1 x}{(1+\omega)^2} + \frac{a_2 x^2}{(1+\omega)^2(1+2\omega)^2} + \frac{a_3 x^3}{(1+\omega)^2(1+2\omega)^2(1+3\omega)^2} + \ldots = 0,$$

et en général de l'équation

$$a_0 + \frac{a_1 x}{(1+\omega)^k} + \frac{a_2 x^2}{(1+\omega)^k (1+2\omega)^k} + \frac{a_3 x^3}{(1+\omega)^k (1+2\omega)^k (1+3\omega)^k} + \ldots = 0,$$

où k désigne un nombre entier quelconque.

Faisons maintenant croître indéfiniment le nombre arbitraire positif $\frac{1}{\omega}$ et le nombre entier k, de telle sorte que $k\omega$ ait pour limite $\log \frac{1}{q}$, q désignant un nombre positif quelconque égal ou inférieur à l'unité.

L'équation précédente deviendra

$$a_0 + a_1 q x + a_2 q^3 x^2 + a_3 q^6 x^3 + \ldots + a_n q^{\frac{n(n+1)}{2}} x^n = 0,$$

et elle aura toutes ses racines réelles; il en est de même de l'équation obtenue en changeant q en ω^2 et x en $\frac{x}{\omega}$,

$$a_0 + a_1 \omega x + a_2 \omega^4 x^2 + a_3 \omega^9 x^3 + \ldots + a_n \omega^{n^2} x^n = 0;$$

ω désigne une quantité réelle quelconque, dont la valeur absolue est au plus égale à l'unité.

Des considérations que je viens d'exposer résulte immédiatement la proposition suivante :

L'équation (1) *ayant toutes ses racines réelles, l'équation*

$$a_0 + \frac{a_1 \omega x}{\theta(1)} + \frac{a_2 \omega^4 x^2}{\theta(1)\theta(2)} + \frac{a_3 \omega^9 x^3}{\theta(1)\theta(2)\theta(3)} + \ldots + \frac{a_n \omega^{n^2} x^n}{\theta(1)\theta(2)\ldots\theta(n)} = 0,$$

a également toutes ses racines réelles. $\theta(x)$ désigne un polynôme entier quelconque satisfaisant aux conditions ci-dessus énoncées, et ω une quantité réelle quelconque, dont la valeur absolue est égale ou inférieure à l'unité.

23. Soit, comme application de ce théorème, l'équation

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2} x^2 + \ldots + n x^{n-1} + x^n = 0;$$

je poserai, ω et $\theta(x)$ conservant la même signification que ci-dessus,

$$F(x) = 1 + \frac{n\omega x}{\theta(1)} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{\omega^4 x^2}{\theta(1)\theta(2)} + \ldots + \frac{\omega^{n^2} x^n}{\theta(1)\theta(2)\ldots\theta(n)}.$$

Les polynômes de cette forme jouissent des propriétés remarquables suivantes :

1° L'équation $F(x) = 0$ a toutes ses racines réelles.

2° Les diverses dérivées de $F(x)$ s'expriment au moyen de polynômes de la même espèce.

On a en effet

$$F'(x) = \frac{n\omega}{\theta(1)}\left| 1 + (n-1)\frac{\omega^3 x}{\theta(2)} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\frac{\omega^8 x^2}{\theta(2)\theta(3)} \right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}\frac{\omega^{15} x^3}{\theta(2)\theta(3)\theta(4)} + \ldots + \right|.$$

Si donc on pose $\theta(x+1) = \mathrm{H}(x)$ et

$$\Phi(x) = 1 + \frac{(n-1)\omega x}{\mathrm{H}(1)} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\frac{\omega^4 x^2}{\mathrm{H}(1)\mathrm{H}(2)}$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}\frac{\omega^9 x^3}{\mathrm{H}(1)\mathrm{H}(2)\mathrm{H}(3)} + \ldots,$$

il vient

$$F'(x) = \frac{n\omega}{\theta(1)}\Phi(\omega^2 x);$$

or $\Phi(x)$ est un polynôme de la même espèce que $F(x)$, puisque $\mathrm{H}(x)$ est décomposable en facteurs linéaires réels du premier degré et n'est jamais négatif pour aucune valeur positive de x.

Ce que je viens d'établir pour la première dérivée subsiste encore évidemment pour les dérivées suivantes.

3° Si l'on pose, en séparant la partie réelle de la partie imaginaire,

$$F(ix) = V(x) + iW(x),$$

les équations $V(x) = 0$ et $W(x) = 0$ ont toutes leurs racines réelles et, plus généralement, a désignant une constante réelle quelconque, l'équation

$$V(x) + aW(x) = 0$$

a toutes ses racines réelles.

Pour le démontrer, il suffit de remarquer que cette équation peut s'écrire

$$1 + \frac{n\omega x}{\theta(1)} a - \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{\omega^2 x^2}{\theta(1)\theta(2)}$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \frac{\omega^3 x^3}{\theta(1)\theta(2)\theta(3)} a + \ldots = 0,$$

et que l'équation

$$\left| 1 - \frac{n(n-1)}{1.2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} x^4 + \ldots \right|$$
$$+ a \left| nx - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^3 + \ldots + \right| = 0$$

a toutes ses racines réelles, quelle que soit la constante réelle a : c'est en effet l'équation qui détermine tang $\frac{\alpha}{n}$ quand n se donne tang α.

En particulier, si l'on fait $\theta(x) = x$ et $\omega = 1$, on a

$$F(x) = 1 + \frac{nx}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{x^2}{1.2}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n},$$

polynôme qui se présente dans plusieurs questions intéressantes de l'Analyse (¹).

(¹) Voir à ce sujet un Mémoire de M. Tchebychef (*Mélanges mathématiques et astronomiques*, t. II, p. 182. Saint-Pétersbourg, 1859), ma Note *Sur l'intégrale* $\int_0^x \frac{e^{-x}dx}{x}$ (*Bulletin de la Société mathématique*, t. VII, p. 72) et une Note de M. Halphen, *Sur une série pour développer les fonctions d'une variable* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 9 octobre 1882).

En faisant en second lieu $\theta(x) = 1$, on a

$$\mathrm{F}_n(x) = 1 + n\omega x + \frac{n(n-1)}{1.2}\omega^4 x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\omega^9 x^3 + \ldots + \omega^{n^2} x^n;$$

les polynômes ainsi définis satisfont à l'équation suivante:

$$\mathrm{F}_n(x) = n\omega\,\mathrm{F}_{n-1}(\omega^2 x).$$

24. Un cas particulièrement intéressant est celui où, dans l'équation $\int_a^b e^{-zx}\Phi(z)\,dz = 0$, on suppose que $\Phi(z)$ soit un polynôme entier dont la forme change successivement lorsque la variable z croît depuis a jusqu'à b.

Cette équation peut se mettre alors sous la forme suivante :

$$e^{\alpha_0 x} f_0(x) + e^{\alpha_1 x} f_1(x) + \ldots + e^{\alpha_n x} f_n(x) = 0,$$

les α_i désignant des constantes et les f_i des polynômes entiers.

Pour examiner le cas le plus simple, soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des quantités réelles quelconques rangées par ordre croissant de grandeur et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des quantités réelles quelconques ; posons, pour abréger,

$$\begin{aligned}
p_0 &= a_0,\\
p_1 &= a_0 + a_1,\\
p_2 &= a_0 + a_1 + a_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
p_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n,
\end{aligned}$$

et considérons l'équation

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} e^{-zx} p_0\,dz + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{-zx} p_1\,dz + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} e^{-zx} p_2\,dz + \ldots + \int_{\alpha_n}^{\infty} e^{-zx} p_n\,dz = 0.$$

En effectuant les intégrations, il est aisé de voir qu'elle devient simplement

$$a_0 e^{-\alpha_0 x} + a_1 e^{-\alpha_1 x} + a_2 e^{-\alpha_2 x} + \ldots + a_n e^{-\alpha_n x} = 0;$$

et le nombre p de ses racines positives est le même que celui des racines de l'équation

$$a_0 z^{\alpha_0} + a_1 z^{\alpha_1} + a_2 z^{\alpha_2} + \ldots + a_n z^{\alpha_n} = 0,$$

qui sont comprises entre 0 et $+1$. Cette équation résulte en effet de la première quand on y pose $e^{-x} = z$.

On sait d'ailleurs (nº **16**) que le nombre p est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} p_0\,dz + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p_1\,dz + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} p_2\,dz + \ldots + \int_{\alpha_n}^{x} p_n\,dz,$$

d'où les propositions suivantes :

Les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant rangés par ordre croissant de grandeur, le nombre des racines de l'équation

$$(1) \qquad a_0 z^{\alpha_0} + a_1 z^{\alpha_1} + a_2 z^{\alpha_2} + \ldots + a_n z^{\alpha_n} = 0$$

qui sont comprises entre 0 et $+1$ est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$(2) \quad p_0(\alpha_1 - \alpha_0) + p_1(\alpha_2 - \alpha_1) + \ldots + p_{n-1}(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + p_n.\infty \ \text{(1)},$$

où $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ ont la signification donnée ci-dessus ;

et encore (ce qui est le même théorème sous une autre forme) :

Si les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont rangés par ordre décroissant de grandeur, le nombre des racines de l'équation (1) *qui sont plus grandes que l'unité est au plus égal au nombre des alternances de la suite* (2).

25. J'ai fait voir plus haut (nº **14**) que le nombre des racines posi-

(1) D'après la définition des alternances d'une suite, il est clair que le nombre des alternances de la suite $a + b + c + d.\infty$ est le nombre des variations des termes de la suite

$$a, \quad a+b, \quad a+b+c, \quad d$$

tives de l'équation

$$(1)\quad A_0 F(\alpha_0 x) + A_1 F(\alpha_1 x) + A_2 F(\alpha_2 x) + \ldots + A_n F(\alpha_n x) = 0$$

était au plus égal au nombre des racines de l'équation

$$A_0 z^{\log\alpha_0} + A_1 z^{\log\alpha_1} + \ldots + A_n z^{\log\alpha_n} = 0,$$

qui sont supérieures à l'unité; d'ailleurs les nombres $\log\alpha_0$, $\log\alpha_1$,..., $\log\alpha_x$ vont en décroissant.

Posons maintenant

$$\begin{aligned} p_0 &= A_0, \\ p_1 &= A_0 + A_1, \\ p_2 &= A_0 + A_1 + A_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n &= A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n; \end{aligned}$$

il résulte, de ce qui précède, que *le nombre des racines positives de l'équation* (1) *est au plus égal au nombre des alternances de la suite*

$$p_0 \log\frac{\alpha_1}{\alpha_0} + p_1 \log\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \ldots + p_{n-1}\log\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} + p_n . \infty .$$

IV. — Sur les équations de la forme.

$$\frac{a_0}{(x-\alpha_0)^\omega} + \frac{a_1}{(x-\alpha_1)^\omega} + \frac{a_2}{(x-\alpha_2)^\omega} + \ldots + \frac{a_n}{(x-\alpha_n)^\omega} = 0.$$

26. Soit l'équation

$$(1)\quad \frac{a_0}{(x-\alpha_0)^\omega} + \frac{a_1}{(x-\alpha_1)^\omega} + \frac{a_2}{(x-\alpha_2)^\omega} + \ldots + \frac{a_n}{(x-\alpha_n)^\omega} = 0,$$

où les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont rangés par ordre décroissant de grandeur et ω un nombre positif arbitraire.

Choisissons un nombre positif k assez grand pour que toutes les quantités $k+\alpha_0, k+\alpha_1, \ldots, k+\alpha_n$ soient positives et formons la transformée en $y=x+k$,

$$\frac{a_0}{[y-(k+\alpha_0)]^{\omega}}+\frac{a_1}{[y-(k+\alpha_1)]^{\omega}}+\ldots+\frac{a_n}{[y-(k+\alpha_n)]^{\omega}}=0,$$

ou, pour abréger l'écriture,

$$\frac{a_0}{(y-\alpha_0')^{\omega}}+\frac{a_1}{(y-\alpha_1')^{\omega}}+\ldots+\frac{a_n}{(y-\alpha_n')^{\omega}}=0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$(2)\qquad \frac{a_0}{\left(1-\frac{\alpha_0'}{y}\right)^{\omega}}+\frac{a_1}{\left(1-\frac{\alpha_1'}{y}\right)^{\omega}}+\ldots+\frac{a_n}{\left(1-\frac{\alpha_n'}{y}\right)^{\omega}}=0.$$

Soit

$$\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-\omega}=1+\frac{M_1}{y}+\frac{M_2}{y^2}+\frac{M_3}{y^3}+\ldots=F\left(\frac{1}{y}\right),$$

l'équation précédente peut se mettre sous la forme

$$F\left(\frac{\alpha_0'}{y}\right)+F\left(\frac{\alpha_1'}{y}\right)+\ldots+F\left(\frac{\alpha_n'}{y}\right)=0,$$

où le premier membre est convergent pour toutes les valeurs de y plus grandes que α_0'.

Si l'on observe maintenant que tous les coefficients M_i sont positifs, on établira, comme ci-dessus (nº **13**), que le nombre des racines de l'équation (2) qui sont supérieures à α_0' est au plus égal au nombre des racines de l'équation

$$a_0 x^{\log\alpha_0'}+a_1 x^{\log\alpha_1'}+\ldots+a_n x^{\log\alpha_n'}=0,$$

qui sont supérieures à l'unité; ce nombre est donc au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$a_0+a_1+\ldots+a_n.$$

D'ailleurs le nombre des racines de l'équation (2) qui sont supérieures à α'_0, c'est-à-dire à $\alpha_0 + k$, est précisément égal au nombre des racines de l'équation (1) qui sont supérieures à α_0. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Les quantités $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ étant rangées par ordre décroissant de grandeur, le nombre des racines de l'équation

$$\frac{a_0}{(x-\alpha_0)^\omega} + \frac{a_1}{(x-\alpha_1)^\omega} + \ldots + \frac{a_n}{(x-\alpha_n)^\omega} = 0$$

qui sont supérieures à α_0 est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n.$$

Le nombre des alternances est pair ou impair, suivant que les deux quantités a_0 et $(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)$ sont de même signe ou de signe contraire; il en est de même du nombre des racines de l'équation supérieures à α_0, comme on le voit en substituant successivement dans le premier membre de l'équation $+\infty$ et la quantité $\alpha_0 + \varepsilon$, où ε désigne une quantité infiniment petite. Ceci ne s'applique pas au cas où l'on aurait $a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 0$; ce cas écarté, on peut dire que :

Si le nombre des racines de l'équation supérieure à α_0 et le nombre des alternances de la suite formée par les coefficients diffèrent, leur différence est un nombre pair.

28. Laissant de côté, pour l'instant, le cas général, je m'occuperai en particulier de l'équation

$$(1) \qquad \frac{a_0}{x-\alpha_0} + \frac{a_1}{x-\alpha_1} + \frac{a_2}{x-\alpha_2} + \ldots + \frac{a_n}{x-\alpha_n} = 0.$$

Dans l'intervalle compris entre α_i et α_{i+1}, intercalons deux nombres ξ et ξ', de telle sorte que les nombres

$$(A) \qquad \alpha_0, \ \ldots, \ \alpha_i, \ \xi, \ \xi', \ \alpha_{i+1}, \ \ldots, \ \alpha_n$$

soient rangés par ordre croissant ou décroissant de grandeur, et faisons la substitution

$$x = \frac{X\xi - \xi'}{X - 1},$$

d'où l'on déduit

$$X = \frac{x - \xi'}{x - \xi}.$$

Aux quantités du Tableau (A) correspondent les quantités suivantes :

$$\alpha'_0, \ldots, \alpha'_i, \infty, 0, \alpha'_{i+1}, \alpha'_n,$$

qui seront rangées par succession de grandeur ([1]).

On voit aisément que toutes les quantités α'_k sont positives : α'_i est donc la plus grande d'entre elles; l'équation (1) devient, en effectuant la substitution indiquée ci-dessus,

$$\sum \frac{a_k}{\frac{X\xi - \xi'}{X - 1} - \alpha_k} = 0$$

ou encore

$$\sum \frac{a_k}{X(\xi - \alpha_k) - (\xi' - \alpha_k)} = \sum \frac{a_k}{\xi - \alpha_k} \frac{1}{X - \alpha'_k}.$$

([1]) Il est bon de préciser ce que j'entends par là. Des quantités sont dites rangées par succession croissante ou décroissante de grandeur si une quantité variable, qui varie toujours dans le même sens, prend successivement les valeurs des termes de la suite de ces quantités, en passant par l'infini, si cela est nécessaire.

Ainsi les quantités

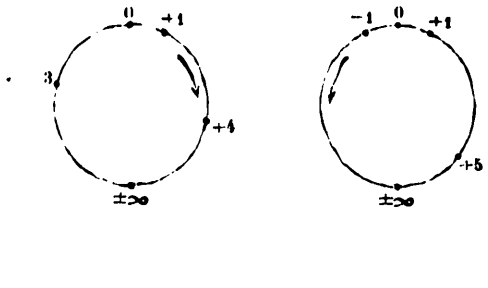
$$+4, \ -3, \ 0, \ +1$$

sont rangées par succession croissante de grandeur, et les quantités

$$1, \ 0, \ -1, \ +5$$

par succession décroissante de grandeur.

Au lieu de ranger les quantités sur une ligne droite, on peut les ranger sur un cycle de la façon suivante :



Or. α'_i étant le plus grand des nombres α'_k qui sont tous positifs, en appliquant la proposition démontrée précédemment, on voit que le nombre des racines de l'équation

$$(2) \qquad \sum \frac{a_k}{\xi - \alpha_k} \frac{1}{X - \alpha'_k} = 0$$

qui sont supérieures à α'_k, c'est-à-dire le nombre des racines de l'équation (1) qui sont comprises dans l'intervalle (ξ, α_i) (¹), est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$\frac{a_i}{\xi - \alpha_i} + \frac{a_{i-1}}{\xi - \alpha_{i-1}} + \frac{a_{i-2}}{\xi - \alpha_{i-2}} + \ldots + \frac{a_{i+2}}{\xi - \alpha_{i+2}} + \frac{a_{i+1}}{\xi - \alpha_{i+1}}.$$

29. Comme application, considérons l'équation

$$(1) \qquad \frac{14}{x+2} - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{14}{x-2} = 0.$$

Les quantités

$$-2, \ -1, \ 0, \ +1, \ +2$$

étant rangées par succession de grandeur, nous aurons à considérer les cinq intervalles

$$(-2, -1), \ (-1, 0), \ (0, +1), \ (+1, +2), \ (+2, -2),$$

dont le dernier renferme l'infini.

En désignant par ξ une quantité réelle quelconque, nous déduisons, de ce qui précède, les conséquences suivantes :

1° ξ étant dans l'intervalle $(-2, -1)$, le nombre des racines de

(¹) Des quantités $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu, \ldots, \tau, \omega$ étant rangées par succession de grandeur, j'appelle intervalle (λ, μ) celui des intervalles déterminés par ces deux nombres qui ne renferme aucun des autres nombres. Cet intervalle peut renfermer l'infini si λ et μ sont de signe contraire ; ainsi, étant donnée la suite

$$+4, \ -3, \ 0, \ +1,$$

l'intervalle $(+4, -3)$ renferme l'infini.

l'équation (1) qui sont comprises entre ξ et -2 est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$\frac{14}{\xi+2}+\frac{14}{\xi-2}-\frac{1}{\xi-1}+\frac{2}{\xi}-\frac{1}{\xi+1},$$

et le nombre des racines qui sont comprises entre ξ et -1, au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$-\frac{1}{\xi+1}+\frac{2}{\xi}-\frac{1}{\xi-1}+\frac{14}{\xi-2}+\frac{14}{\xi+2}.$$

En particulier, faisons, dans la première suite, $\xi=-1-\varepsilon$, ε désignant une quantité infiniment petite positive; la suite devient

$$14-\frac{14}{3}+\frac{1}{2}-2+\infty;$$

comme elle ne présente pas d'alternance, on en conclut que l'équation (1) n'a pas de racine dans l'intervalle $(-2, -1)$.

2° ξ étant dans l'intervalle $(-1, 0)$, le nombre des racines de l'équation qui sont comprises entre ξ et -1 est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$-\frac{1}{\xi+1}+\frac{14}{\xi+2}+\frac{14}{\xi-2}-\frac{1}{\xi-1}+\frac{2}{\xi},$$

et le nombre des racines qui sont comprises entre ξ et 0 au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$(2)\qquad \frac{2}{\xi}-\frac{1}{\xi-1}+\frac{14}{\xi-2}+\frac{14}{\xi+2}-\frac{1}{\xi+1}.$$

Faisons, en particulier, dans la première suite, $x=-\varepsilon$; la suite devient

$$-1+7-7+1-\infty;$$

comme elle présente deux alternances, on voit que l'intervalle $(-1, 0)$ comprend deux racines ou n'en comprend pas.

3° ξ étant dans l'intervalle $(0, +1)$, le nombre des racines de l'équation qui sont comprises entre 0 et ξ est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$(3) \qquad \frac{2}{\xi} - \frac{1}{\xi+1} + \frac{14}{\xi+2} + \frac{14}{\xi-2} - \frac{1}{\xi-1},$$

et celui des racines qui sont comprises entre ξ et $+1$, au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$-\frac{1}{\xi-1} + \frac{14}{\xi-2} + \frac{14}{\xi+2} - \frac{1}{\xi+1} + \frac{2}{\xi}.$$

Faisons, par exemple, $\xi = 1 - \varepsilon$, la première suite devient

$$2 - \frac{1}{2} + \frac{14}{3} - 14 + \infty;$$

elle présente deux alternances : donc l'équation a dans l'intervalle $(0, +1)$ un nombre de racines égal à 0 ou à 2.

On arrive à la même conclusion en substituant dans la seconde suite $+\varepsilon$; elle devient, en effet,

$$+1 - 7 + 7 - 1 + \infty,$$

et cette suite présente également deux alternances.

4° ξ étant dans l'intervalle $(+1, +2)$, le nombre des racines qui sont comprises entre ξ et $+1$ est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$-\frac{1}{\xi-1} + \frac{2}{\xi} - \frac{1}{\xi+1} + \frac{14}{\xi+2} + \frac{14}{\xi-2},$$

et le nombre des racines qui sont comprises entre ξ et $+2$, au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$\frac{14}{\xi-2} + \frac{14}{\xi+2} - \frac{1}{\xi+1} + \frac{2}{\xi} - \frac{1}{\xi-1}.$$

Faisons, par exemple, dans la deuxième suite $\xi = 1 + \varepsilon$, elle devient

$$-14+\frac{14}{3}-\frac{1}{2}+2-\infty;$$

comme elle ne représente aucune alternance, l'équation n'a aucune racine dans l'intervalle considéré.

5° Considérons enfin l'intervalle $(+2, -2)$ qui contient l'infini; ξ étant dans cet intervalle, le nombre des racines qui sont comprises entre ξ et $+2$ est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$\frac{14}{\xi-2}-\frac{1}{\xi-1}+\frac{2}{\xi}-\frac{1}{\xi+1}+\frac{14}{\xi+2},$$

et le nombre des racines qui sont comprises entre ξ et -2, au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$\frac{14}{\xi+2}-\frac{1}{\xi+1}+\frac{2}{\xi}-\frac{1}{\xi-1}+\frac{14}{\xi-2}.$$

Faisons, par exemple, dans la deuxième suite, $\xi=2+\varepsilon$, elle devient

$$\frac{7}{2}-\frac{1}{3}+1-1+\infty;$$

et, comme elle ne présente aucune alternance, l'équation proposée n'a aucune racine dans l'intervalle $(+2, -2)$.

30. L'équation précédente ne peut donc avoir de racines que dans les intervalles $(-1, 0)$ et $(0, +1)$.

Faisons $\xi=-\frac{3}{4}$ dans la suite (2), elle devient

$$-\frac{8}{3}+\frac{4}{7}-\frac{14.4}{11}+\frac{14.4}{5}-4,$$

et présente une alternance; l'équation a donc une racine et une seule comprise entre 0 et $-\frac{3}{4}$ et, par suite, une et une seule comprise entre $-\frac{3}{4}$ et -1.

En second lieu, faisons, dans la suite (3), $\xi = \frac{3}{4}$, elle devient

$$\frac{8}{3} - \frac{4}{7} + \frac{14.4}{11} - \frac{14.4}{5} + 4;$$

et comme elle ne présente qu'une alternance, il en résulte que l'intervalle $\left(0, \frac{3}{4}\right)$ comprend une seule racine et il en est de même, par suite, de l'intervalle $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$.

On voit ainsi que l'équation proposée a toutes ses racines réelles; la première est comprise entre -1 et $-\frac{3}{4}$, la deuxième entre $-\frac{3}{4}$ et 0, la troisième entre zéro et $+\frac{3}{4}$, et la quatrième entre $+\frac{3}{4}$ et $+1$.

C'est ce qu'il est, du reste, aisé de vérifier, l'équation mise sous forme entière étant

$$(2x^2 - 1)(7x^2 - 4) = 0.$$