JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. DAWIDOFF

Sur une formule générale des intégrales définies

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 8 (1882), p. 389-412.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1882_3_8__389_0>

Sur une formule générale des intégrales définies;

Par M. A. DAWIDOFF,

Président de la Société mathématique et professeur à l'Université de Moscou.

J'ai l'intention d'indiquer dans cet article un procédé pouvant avoir un assez grand nombre d'applications. Il permet de rapprocher entre elles plusieurs propositions isolées de l'analyse et de les réunir sous un même point de vue.

1. Soient $F(x)$ une fonction algébrique quelconque entière de degré n et $f(x)$ une autre fonction algébrique entière de degré moindre que n. Supposons que les n racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de l'équation

$$F(x) = 0$$

soient toutes différentes entre elles et différentes des racines de l'équation $f(x) = 0$.

Décomposons la fraction rationnelle

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

en fractions simples

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \sum \frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)} \frac{1}{x-\alpha},$$

où la somme $\sum$ s'étend à toutes les racines α. En multipliant les deux membres de cette égalité par $F(x)$, nous avons

$$f(x) = \sum \frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)} \frac{F(x)}{x-\alpha}.$$

Désignons par $\varphi(x)$ une fonction quelconque, dont le module ρ de discontinuité soit plus grand que le module des racines α; $\varphi(x)$ alors peut être développée en série suivant les puissances croissantes de x, dans les limites des racines de l'équation $F(x) = 0$.

Soient $f(x)$ la somme des n premiers termes de ce développement et ε_x le reste, qui tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment :

$$\varphi(x) = f(x) + \varepsilon_x.$$

Si dans l'équation précédente on remplace $f(x)$ par $\varphi(x) - \varepsilon_x$, on a

$$\text{(I)} \qquad \varphi(x) = \sum \frac{\varphi(\alpha)}{F'(\alpha)} \frac{F(x)}{x-\alpha} + e$$

où

$$e = \varepsilon_x - \sum \frac{\varepsilon_\alpha F(x)}{F'(\alpha)(x-\alpha)}.$$

Si, n augmentant indéfiniment, $F(x)$ reste finie, le reste e tendra vers zéro et sera de même ordre de grandeur que ε_x. Cela résulte de ce que la somme des termes

$$\frac{F(x)}{F'(\alpha)(x-\alpha)},$$

étendue à toutes les racines de l'équation $F(x) = 0$, est égale à 1, mais, étendue seulement à quelques-unes d'entre elles, conserve une valeur finie.

L'équation (I) fait voir que la somme

$$\sum \frac{\varphi(\alpha)}{F'(\alpha)} \frac{F(x)}{x-\alpha}$$

exprime $\varphi(x)$ avec la précision des n premiers termes de son développement.

Soient a et b deux quantités moindres aussi que le module ρ; multiplions les deux membres de l'équation (I) par dx et intégrons entre les limites a et b; nous trouvons

$$\text{(II)} \qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum \frac{\varphi(\alpha)}{F'(\alpha)} \int_a^b \frac{F(x)\,dx}{x-\alpha} + e_1,$$

où e_1 est une quantité tendant vers zéro si n augmente indéfiniment.

L'équation (II) fait aussi voir que la somme

$$\sum \frac{\varphi(\alpha)}{F'(\alpha)} \int_a^b \frac{F(x)\,dx}{x-\alpha}$$

exprime l'intégrale

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

avec la précision de n termes de développement de la fonction sous-intégrale.

2. En désignant par z une quantité dont le module soit plus grand que le plus grand des modules des racines α, posons

$$\varphi(x) = \frac{1}{z-x}.$$

L'égalité (I) devient alors

$$\frac{1}{z-x} = \sum \frac{1}{F'(\alpha)(z-\alpha)} \frac{F(x)}{x-\alpha}$$

et fait voir que les développements suivant les puissances croissantes de x et les puissances décroissantes de z de la fraction $\frac{1}{z-x}$ et de la somme

$$\sum \frac{1}{F'(\alpha)(z-\alpha)} \frac{F(x)}{x-\alpha}$$

coïncident dans les premiers n termes.

L'équation (II), en supposant que les limites a et b soient moindres que z, conduit à l'expression

$$\log \frac{z-a}{z-b} = \sum \frac{1}{F'(\alpha)(z-\alpha)} \int_a^b \frac{F(x)\,dx}{x-\alpha}$$

qui fait voir que, tout arbitraire que soit la fonction $F(x)$, le développement de la somme

$$\sum \frac{1}{F'(\alpha)(z-\alpha)} \int_a^b \frac{F(x)\,dx}{x-\alpha}$$

suivant les puissances décroissantes de z, coïncide dans ses n premiers termes, c'est-à-dire jusqu'à $\frac{1}{z^n}$, avec le développement

$$\log \frac{z-a}{z-b}$$

suivant les puissances décroissantes de z.

Les égalités (I) et (II), par suite de leur dépendance de la fonction arbitraire $F(x)$, peuvent avoir des applications très variées.

Faisant un choix convenable du polynôme $F(x)$ et passant à la limite $n=\infty$, on en déduit presque tous les théorèmes connus sur les intégrales définies. Je m'arrêterai à quelques-unes de ces applications, basées sur un choix particulier de la fonction $F(x)$.

3. Soit p un nombre, compris entre ρ et la plus grande des limites a et b, et faisons

$$F(x) = x^n - p^n.$$

Si l'on désigne par $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les $n^{\text{ièmes}}$ racines de l'unité, les racines de l'équation $F(x)=0$ pourront être exprimées par $\alpha = pr$, et le terme général de la seconde partie de l'égalité (II) sera alors

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(pr)}{F'(pr)}\int_a^b \frac{F(x)\,dx}{x-pr} &= \frac{\varphi(pr)}{n(pr)^{n-1}}\int_a^b [x^{n-1}+(pr)x^{n-2}+(pr)^2x^{n-3}\ldots+(pr)^{n-1}]dx \\ &= \frac{pr\varphi(pr)}{n}\left[\frac{x}{pr}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{pr}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{pr}\right)^3+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{x}{pr}\right)^n\right]_a^b.\end{aligned}$$

Mais pour tout x compris entre les limites a et b, nous avons

$$\frac{x}{pr}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{pr}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{pr}\right)^3+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{x}{pr}\right)^n = -\log\left(1-\frac{x}{pr}\right)+e_x,$$

où e_x désigne une quantité tendant vers zéro si n augmente indéfiniment. De là on a

$$\frac{\varphi(pr)}{F'(pr)}\int_a^b \frac{F(x)dx}{x-pr} = \frac{pr\varphi(pr)}{n}\left(\log\frac{pr-a}{pr-b}+e_b-e_a\right),$$

et l'équation (II) conduit à l'expression suivante

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \frac{1}{n}\Big[pr_1\varphi(pr_1)\log\frac{pr_1-a}{pr_1-b} + pr_2\varphi(pr_2)\log\frac{pr_2-a}{pr_2-b}+\cdots+pr_n\varphi(pr_n)\log\frac{pr_n-a}{pr_n-b}\Big]+e_1,$$

où e_1 désigne une quantité, tendant vers zéro si n augmente indéfiniment.

4. Soit p un nombre moindre que le module de discontinuité de la fonction donnée $\varphi(x)$ et posons

$$F(x) = x^n - p^n.$$

Désignons par r_k l'une des racines de degré n de l'unité et posons

$$\sqrt{-1} = i.$$

Alors

$$r_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}},$$

où k désigne un des nombres entiers depuis 0 à $n-1$; nous aurons (équat. I)

$$\varphi(x) = \sum \frac{\varphi(pr_k)}{n(pr_k)^{n-1}}\,\frac{x^n-p^n}{x-pr_k}.$$

En faisant $x=0$, on a

$$\varphi(0) = \frac{1}{n}\sum\varphi\left(pe^{\frac{2k\pi i}{n}}\right).$$

Faisant enfin $\frac{2\pi k}{n} = u$ et passant à la limite $n=\infty$, nous remplaçons la somme depuis o à $n-1$ par une intégrale entre les limites o et 2π et posons $\frac{2\pi}{n} = du$.

Nous obtenons de cette manière le théorème connu de Cauchy sur les intégrales définies

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(pe^{ui})\, du.$$

5. En désignant par m un nombre quelconque et par n un nombre augmentant indéfiniment, posons

$$F(x) = \lim_{n=\infty} mx \left[1 - \left(\frac{mx}{\pi}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{mx}{2\pi}\right)^2\right] \cdots \left[1 - \left(\frac{mx}{n\pi}\right)^n\right] = \sin mx.$$

Les racines de l'équation $F(x) = 0$, au nombre de $2n+1$, sont comprises dans l'expression $\alpha_k = \frac{k\pi}{m}$, si l'on donne à k toutes les valeurs entières depuis $-n$ jusqu'à $+n$. Remarquons que $-n\pi$ et $+n\pi$ représentent les limites de la variabilité possible du produit mx, de manière que, m croissant indéfiniment, x doit être compris entre les limites $-\frac{n\pi}{m}$ et $+\frac{n\pi}{m}$.

Désignons par p une quantité positive moindre que $\frac{n\pi}{m}$

$$p < \frac{n\pi}{m},$$

nous trouvons (équat. I)

$$\varphi(x-p) = \frac{1}{m} \sum_{-n}^{+n} \frac{\varphi(\alpha_k - p) \sin mx}{\cos m\alpha_k (x - \alpha_k)}.$$

Mais, comme

$$\frac{\sin mx}{\cos m\alpha_k} = \frac{\sin[m(x-\alpha_k) + m\alpha_k]}{\cos m\alpha_k} = \sin m(x - \alpha_k),$$

en posant $x = p$, nous trouvons

$$\varphi(0) = \frac{1}{m} \sum_{-n}^{+n} \varphi(\alpha_k - p) \frac{\sin m(p - \alpha_k)}{p - \alpha_k}.$$

Passant maintenant à la limite $m = \infty$, posons $\alpha_k - p = u$ et $\frac{\pi}{m} = du$. L'expression $\frac{n\pi}{m}$ devient alors une quantité positive indéterminée, de sorte que, en posant

$$\frac{n\pi}{m} + p = a, \quad \frac{n\pi}{m} - p = b,$$

a et b peuvent être considérées comme des quantités positives tout à fait arbitraires.

L'équation précédente se réduit donc à ce qui suit

$$\lim \int_{-a}^{b} \varphi(u) \sin mu \frac{du}{u} = \pi\varphi(0),$$

à la condition que $\varphi(x)$ soit développable en série entre les limites $-a$ et b.

En désignant par a_1 et b_1 deux quantités positives, nous trouvons, par suite de ce qui précède,

$$\lim \int_{b}^{b_1} \varphi(u) \sin mu \frac{du}{u} = 0, \quad \lim \int_{-a}^{-a_1} \varphi(u) \sin mu \frac{du}{u} = 0.$$

Prenant

$$\varphi(x) = 1,$$

nous avons

$$\lim \int_{-a}^{a} \sin mu \frac{du}{u} = 2 \lim \int_{0}^{a} \sin mu \frac{du}{u} = \pi$$

ou

$$\lim \int_{0}^{a} \sin mu \frac{du}{u} = \frac{\pi}{2}.$$

Désignant ensuite par ε une quantité positive décroissant indéfiniment, nous trouvons

$$\lim \int^{a} \varphi(u) \sin mu \frac{du}{u} = \lim \int^{a} \varphi(u) \sin mu \frac{du}{u} + \lim \int_{0}^{\varepsilon} \varphi(u) \sin mu \frac{du}{u}.$$

Mais, comme

$$\lim \int_{\varepsilon}^{a} \varphi(u) \sin mu \frac{du}{u} = 0$$

et

$$\lim \int_{0}^{\varepsilon} \varphi(u) \sin mu \frac{du}{u} = \varphi(0) \lim \int_{0}^{\varepsilon} \sin mu \frac{du}{u} = \frac{\pi}{2} \varphi(0),$$

nous avons

$$\lim \int_{0}^{a} \varphi(u) \sin mu \frac{du}{u} = \frac{\pi}{2} \varphi(0).$$

6. Soit

$$F(x) = \lim x \left[1 - \left(\frac{x}{\pi}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right] \cdots \left[1 - \left(\frac{x}{n\pi}\right)^2\right] = \sin x,$$

et désignons les racines de l'équation $F(x) = 0$ par $\alpha_k = k\pi$, en étendant k de $-n$ à $+n$.

Nous avons, par l'équation I,

$$\varphi(x) = \sum \frac{\varphi(\alpha) \sin x}{\cos \alpha (x - \alpha)}.$$

Soit h une quantité positive quelconque et m un nombre impair croissant indéfiniment. En multipliant les deux membres de l'équation précédente par $\frac{\sin mx}{\sin x} dx$, intégrons entre les limites 0 et h. Nous trouvons

$$\int_{0}^{h} \frac{\varphi(x) \sin mx \, dx}{\sin x} = \sum \frac{\varphi(\alpha)}{\cos \alpha} \int_{0}^{h} \frac{\sin mx}{x - \alpha} dx.$$

Mais, m étant impair,

$$\frac{\sin mx}{\cos \alpha} = \frac{\sin[m(x - \alpha) + m\alpha]}{\cos \alpha} = \sin m(x - \alpha) \frac{\cos m\alpha}{\cos \alpha} = \sin m(x - \alpha);$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} \lim \int_{0}^{h} \frac{\varphi(x) \sin mx \, dx}{\sin x} &= \lim \sum \varphi(\alpha) \int_{0}^{h} \frac{\sin m(x - \alpha)}{x - \alpha} dx \\ &= \lim \sum \varphi(\alpha) \int_{-\alpha}^{h-\alpha} \sin mu \frac{du}{u}. \end{aligned}$$

En remarquant que l'intégrale

$$\lim \int_{-\alpha}^{h-\alpha} \sin mu \frac{du}{u}$$

est égale à $\frac{\pi}{2}$ quand $\alpha = 0$, égale à π lorsque $\alpha < h$ et se réduit à zéro quand $\alpha > h$, désignons par $p\pi$ le plus grand multiple de π qui est moindre que h.

L'équation précédente nous conduit alors au théorème connu

$$\lim \int_0^h \varphi(x) \frac{\sin mx}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2} [\varphi(0) + 2\varphi(\pi) + 2\varphi(2\pi) + \ldots + 2\varphi(p\pi)]$$

ayant lieu pour toute fonction $\varphi(x)$, développable en série entre les limites 0 et h.

7. Faisons dans l'équation (I)

$$F(x) = \cos nx.$$

Désignant les racines de l'équation $\cos nx = 0$ par $\alpha = \frac{2k+1}{n} \frac{\pi}{2}$ et comprenant par k tout nombre entier depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, nous trouvons

$$\varphi(x) = -\frac{1}{n} \sum \frac{\varphi(\alpha)}{\sin n\alpha} \frac{\cos nx}{x-\alpha}.$$

Mais, remarquant que

$$\frac{\cos nx}{\sin n\alpha} = \frac{\cos[n(x-\alpha)+n\alpha]}{\sin n\alpha} = -\sin n(x-\alpha)$$

et que

$$\frac{\sin n(x-\alpha)}{x-\alpha} = \frac{1}{2} \int_{-n}^{+n} \cos u(x-\alpha)\, du,$$

passons à la limite $n = \infty$, en faisant $d\alpha = \frac{\pi}{n}$ et désignant par a une quantité arbitraire positive; nous trouvons

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{+a} \varphi(\alpha)\, d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \cos u(x-\alpha)\, du,$$

à la condition que x soit compris entre $-a$ et $+a$.

Pour $a=\infty$ on trouve le théorème connu de Fourier

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\,d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\cos u(x-\alpha)\,du.$$

8. En désignant par n un nombre impair, posons

$$F(x)=x^n-1.$$

Les racines du polynôme $F(x)$ seront

$$\alpha=e^{\frac{2k\pi i}{n}},$$

si l'on désigne par k tous les nombres entiers depuis $-\frac{n-1}{2}$ jusqu'à $\frac{n-1}{2}$. Soit $\varphi(x)$ une fonction donnée, développable en série entre les limites $q-1$ et $q+1$, on a alors (équat. I)

$$\varphi(x+q)=\frac{1}{n}\sum\frac{\varphi\left(q+e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right)}{e^{\frac{2(n-1)k\pi i}{n}}}\,\frac{x^n-1}{x-e^{\frac{2k\pi i}{n}}}.$$

Désignant par p un nombre moindre que 1 et faisant $x=p$ et $\frac{2k\pi}{n}=u$, passant à la limite $n=\infty$, nous trouvons, en remarquant que $\frac{2\pi}{n}=du$,

$$\text{(A)}\quad\left\{\begin{aligned}\varphi(p+q)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\varphi(q+e^{ui})\,du}{1-pe^{-ui}}\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\varphi(q+e^{ui})}{1-pe^{-ui}}+\frac{\varphi(q+e^{-ui})}{1-pe^{ui}}\right]du.\end{aligned}\right.$$

Sous les mêmes conditions on trouve (équat. I)

$$\frac{\varphi(x+q)}{1-px}=\frac{1}{n}\sum\frac{\varphi\left(q+e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right)}{\left(1-pe^{\frac{2k\pi i}{n}}\right)e^{\frac{2(n-1)k\pi i}{n}}}\,\frac{x^n-1}{x-e^{\frac{2k\pi i}{n}}}.$$

Faisant $x = 0$, $\frac{2k\pi}{n} = u$ et passant à la limite, on a

$$(\mathrm{B}) \qquad \varphi(q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\varphi(q+e^{ui})}{1-pe^{ui}} + \frac{\varphi(q+e^{-ui})}{1-pe^{-ui}}\right]du.$$

Les équations (A) et (B) constituent le théorème connu de Poisson sur les intégrales définies [1]. Elles ont lieu pour $p < 1$ et à la condition que la fonction $\varphi(x)$ soit développable en série entre les limites $q-1$ et $q+1$.

9. Soit n un nombre impair, et faisons

$$\mathrm{F}(x) = x^n + 1.$$

Les racines de l'équation $\mathrm{F}(x) = 0$ seront

$$\alpha = -e^{\frac{2k\pi i}{n}} = -e^{2a_k i}$$

où $a_k = \frac{\pi k}{n}$ et k est un nombre entier quelconque depuis $-\frac{(n-1)}{2}$ jusqu'à $\frac{n-1}{2}$. Appliquons l'équation (I) à l'intégrale

$$\int_0^1 x^{m-1}\varphi[u(1-x)]\,dx,$$

où m désigne une quantité réelle quelconque.

Soit $m = p + r$, où p est le plus grand des nombres entiers compris dans m, et r une quantité positive moindre que 1. L'équation (I) conduit à l'égalité suivante :

$$x^{p-1}\varphi[u(1-x)] = -\frac{\cos p\pi}{n}\sum e^{2pa_k i}\varphi[u(1+e^{2a_k i})]\frac{x^n+1}{x+e^{2a_k i}}.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par x^r, nous trou-

---

[1] Bertrand, *Calcul intégral*, p. 169.

vons

$$x^{m-1}\varphi[u(1-x)] = -\frac{\cos p\pi}{n}\sum e^{2pa_k i}\varphi[u(1+e^{2a_k i})]\frac{x^r(x^n+1)}{x+e^{2a_k i}}.$$

Passant à la limite $n=\infty$, posons $a_k = v$ et $\frac{\pi}{n} = dv$, nous avons, pour $x < 1$,

$$x^{m-1}\varphi[u(1-x)] = -\frac{\cos p\pi}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{2pvi}\varphi[u(1+e^{2vi})]\frac{x^r\,dv}{x+e^{2vi}}.$$

Mais, remarquant que pour $x < 1$ l'intégrale

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{2pvi}\varphi[u(1+e^{2vi})]\frac{dv}{1+xe^{2vi}}$$

se réduit à zéro, parce que la fonction sous-intégrale peut être développée en série suivant les puissances croissantes de e^{2vi}, remplaçons l'équation précédente par

$$x^{m-1}\varphi[u(1-x)] = -\frac{\cos p\pi}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{2pvi}\varphi[u(1+e^{2vi})]\left(\frac{x^r}{x+e^{2vi}}+\frac{x^{-(r+1)}}{1+xe^{2vi}}\right)dv.$$

En multipliant ensuite par dx, nous intégrons entre les limites 0 et 1. Remarquons que x, étant remplacé par $\frac{1}{x}$, donne

$$\int_0^1 \frac{x^{-(r+1)}\,dx}{1+x\,e^{2vi}} = \int_1^\infty \frac{x^r\,dx}{x+e^{2vi}};$$

par conséquent,

$$\int_0^1 x^{m-1}\varphi[u(1-x)]\,dx = -\frac{\cos p\pi}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{2pvi}\varphi[u(1+e^{2vi})]\,dv\int_0^\infty \frac{x^r\,dx}{x+e^{2vi}}.$$

Enfin, remplaçant dans le second membre de cette équation x par

$x e^{2vi}$ et remarquant que

$$\int_0^\infty \frac{x^r\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin(r+1)\pi} = \frac{\pi}{\sin(m-p+1)\pi} = -\frac{\pi}{\sin m\pi \cos p\pi}$$

et que

$$1 + e^{2vi} = 2\cos v\, e^{vi},$$

nous trouvons l'équation suivante

$$\int_0^1 x^{m-1}\varphi[u(1-x)]\,dx = \frac{1}{\sin m\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \varphi(2u\cos v\, e^{vi})\,e^{2mvi}\,dv,$$

connue sous le nom de *formule de Kummer* (1).

Quand m est nombre entier, le second membre se réduit à $\frac{0}{0}$. Mais, en prenant le rapport des dérivées du numérateur et du dénominateur suivant m, nous trouvons, pour m entier,

$$\int_0^1 x^{m-1}\varphi[u(1-x)]\,dx = \frac{2i\cos m\pi}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(2u\cos v\, e^{vi})\,e^{2mvi}\,v\,dv.$$

Ce résultat peut d'ailleurs être obtenu directement de l'équation (II) pour m entier

$$\int_0^1 x^{m-1}\varphi[u(1-x)]\,dx$$
$$= -\frac{\cos m\pi}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi[u(1+e^{2vi})]\,e^{2mvi}\,dv \int_0^1 \frac{dx}{x+e^{2vi}}.$$

En remarquant que l'intégrale

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi[u(1+e^{2vi})]\,e^{2mvi}\,\frac{dv}{x+e^{-2vi}},$$

(1) Bertrand, *Calcul intégral*, p. 175.

se réduit à zéro, parce que la fonction sous-intégrale peut être développée en série suivant les puissances croissantes de e^{2vi}, représentons l'égalité précédente par

$$\int_0^1 x^{m-1}\varphi[u(1-x)]\,dx$$

$$= -\frac{\cos m\pi}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2mvi}\varphi[u(1+e^{2vi})]\,dv\int_0^1\left(\frac{1}{x+e^{2vi}}-\frac{1}{x+e^{-2vi}}\right)dx$$

$$= \frac{2i\cos m\pi}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2mvi}\varphi(2u\cos v e^{vi})v\,dv.$$

Les résultats obtenus ci-dessus découvrent un rapport intime entre les formules de Cauchy, de Poisson et de Kummer et leur dépendance des racines de l'unité.

10. Les équations (I) et (II) conduisent de même aux formules connues du calcul approché des intégrales définies.

Supposons que les limites de l'intégration a et b soient, par l'introduction d'une nouvelle variable y,

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}y,$$

réduites à -1 et $+1$, et appliquons l'équation (II) à la fonction de Legendre

$$\Phi(x) = \mathrm{N}\,d_x^n(x^2-1)^n,$$

à la condition que $\Phi(1)=1$. Comme $\Phi(x)$ ne contient que les degrés pairs ou impairs de x, suivant que n est pair ou impair, $\Phi(-1)$ sera égale à $+1$ ou -1.

Notons que $\Phi(x)$ se distingue par deux propriétés principales : 1° que toutes les n racines de l'équation $\Phi(x)=0$ sont réelles, différentes entre elles et comprises entre -1 et $+1$; 2° que pour toute fonction algébrique entière $f_1(x)$ de degré moindre que n,

$$\int_{-1}^{+1}\Phi(x)f_1(x)\,dx = 0.$$

Désignons par $f(x)$ un polynôme de degré n, dont toutes les racines seraient différentes entre elles, différentes des racines du polynôme $\phi(x)$ et comprises aussi entre -1 et $+1$. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les racines de l'équation $\phi(x)=0$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ les racines de l'équation $f(x)=0$, et prenons dans l'équation (II), pour $F(x)$, le polynôme $\phi(x).f(x)$ de degré $2n$:

$$F(x)=\phi(x).f(x).$$

Cette équation s'exprimera alors par

$$\int_{-1}^{+1}\varphi(x)\,dx=\sum\frac{\varphi(\alpha)}{f(\alpha)\,\phi'(\alpha)}\int_{-1}^{+1}\frac{f(x)\,\phi(x)\,dx}{x-\alpha}$$
$$+\sum\frac{\varphi(\beta)}{f'(\beta)\,\phi(\beta)}\int_{-1}^{+1}\frac{f(x)\,\phi(x)\,dx}{x-\beta}.$$

Comme $f(x)$ se divise par $x-\beta$ et que le quotient obtenu est un polynôme de degré $n-1$, alors

$$\int_{-1}^{+1}\frac{f(x)}{x-\beta}\,\phi(x)\,dx=0;$$

par conséquent, la partie de l'équation précédente, dépendant des racines β, s'évanouit.

Quant à la seconde partie, supposons qu'en divisant $f(x)$ par $x-\alpha$ on obtienne au quotient le polynôme $f_1(x)$ de degré $n-1$:

$$\frac{f(x)}{x-\alpha}=f_1(x)+\frac{f(\alpha)}{x-\alpha}.$$

Par suite,

$$\int_{-1}^{+1}\frac{f(x)}{x-\alpha}\,\phi(x)\,dx=\int_{-1}^{+1}f_1(x)\,\phi(x)\,dx$$
$$+f(\alpha)\int_{-1}^{+1}\frac{\phi(x)}{x-\alpha}\,dx=f(\alpha)\int_{-1}^{+1}\frac{\phi(x)\,dx}{x-\alpha},$$

et l'équation précédente devient

$$\int_{-1}^{+1}\varphi(x)\,dx=\sum\frac{\varphi(\alpha)}{\phi'(\alpha)}\int_{-1}^{+1}\frac{\phi(x)\,dx}{x-\alpha}.$$

Elle ne dépend ni des racines β, ni du polynôme f et prouve que l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx,$$

correspondant à $2n$ termes de développement de la fonction sous-intégrale, s'exprime par la somme seulement de n termes.

L'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\psi(x)\,dx}{x-\alpha}$$

peut être calculée de la manière suivante.

Remarquons que

$$\frac{1}{\psi(x)} = \frac{1}{\psi'(\alpha_1)(x-\alpha_1)} + \frac{1}{\psi'(\alpha_2)(x-\alpha_2)} + \cdots + \frac{1}{\psi'(\alpha_n)(x-\alpha_n)}.$$

En multipliant les deux parties de cette égalité par $\frac{[\psi(x)]^2}{x-\alpha_1}dx$ et intégrant entre les limites -1 et $+1$, nous trouvons

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\psi(x)\,dx}{x-\alpha_1} = \int_{-1}^{+1} \frac{[\psi(x)]^2\,dx}{\psi'(\alpha_1)(x-\alpha_1)^2} + \int_{-1}^{+1} \frac{[\psi(x)]^2\,dx}{\psi'(\alpha_2)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)} + \cdots + \int_{-1}^{+1} \frac{[\psi(x)]^2\,dx}{\psi'(\alpha_n)(x-\alpha_1)(x-\alpha_n)}.$$

Mais, comprenant par k et l des nombres différents entre eux, on a généralement

$$\int_{-1}^{+1} \frac{[\psi(x)]^2\,dx}{(x-\alpha_k)(x-\alpha_l)} = \frac{1}{\alpha_k-\alpha_l}\int_{-1}^{+1} \frac{[\psi(x)]^2\,dx}{x-\alpha_k} - \frac{1}{\alpha_k-\alpha_l}\int_{-1}^{+1} \frac{[\psi(x)]^2\,dx}{x-\alpha_l} = 0,$$

$\frac{\psi(x)}{x-\alpha_k}$ et $\frac{\psi(x)}{x-\alpha_l}$ étant toujours des polynômes de degré $n-1$.

Par suite, la seconde partie de l'équation précédente ne conservera que le terme dont la fonction sous-intégrale aura pour diviseur $(x-\alpha_1)^2$:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\phi(x)\,dx}{x-\alpha_1}=\frac{1}{\phi'(\alpha_1)}\int_{-1}^{+1}\frac{[\phi(x)]^2\,dx}{(x-\alpha_1)^2}.$$

En intégrant par parties, on trouve

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\phi(x)\,dx}{x-\alpha_1}=-\frac{2}{(1-\alpha_1^2)\,\phi'(\alpha_1)}+\frac{2}{\phi'(\alpha_1)}\int_{-1}^{+1}\frac{\phi(x)\,\phi'(x)\,dx}{x-\alpha_1}.$$

Mais, en divisant $\phi'(x)$ par $x-\alpha_1$ on obtient pour quotient un polynôme de degré $n-2$ et pour reste $\phi'(\alpha_1)$. La partie de l'intégrale dépendante du quotient devient zéro, et de là

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\phi(x)\,dx}{x-\alpha_1}=-\frac{2}{(1-\alpha_1^2)\,\phi'(\alpha_1)}+2\int_{-1}^{+1}\frac{\phi(x)\,dx}{x-\alpha_1}$$

ou

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\phi(x)\,dx}{x-\alpha_1}=\frac{2}{(1-\alpha_1^2)\,\phi'(\alpha_1)}.$$

Par conséquent l'équation obtenue ci-dessus et servant à déterminer l'intégrale prend la forme suivante

$$\int_{-1}^{+1}\varphi(x)\,dx=2\sum\frac{\varphi(\alpha)}{(1-\alpha^2)[\phi'(\alpha)]^2}$$

ou, posant

$$\frac{2}{(1-\alpha_k^2)[\phi'(\alpha_k)]^2}=A_k,$$

on a

$$\int_{-1}^{+1}\varphi(x)dx=A_1\varphi(\alpha_1)+A_2\varphi(\alpha_2)+\ldots+A_n\varphi(\alpha_n).$$

Les coefficients A_1, A_2, $\ldots$, A_n ont été déterminés par Gauss [1] pour différentes valeurs de n.

---

[1] *Methodus nova*... (*Comment. Soc. Goetting.*, 1815).

Si les limites de l'intégrale sont o et 1, on peut se servir du polynôme

$$\Phi(x) = d_x^n [x^n (x-1)^n]$$

comme ayant des propriétés analogues au polynôme $d_x^n (x^2 - 1)^n$, à la seule différence près que ses racines seront comprises entre o et 1. L'équation (II) donne alors

$$\int_0^1 \varphi(x)\, dx = \sum \frac{\varphi(\alpha)}{\Phi'(\alpha)} \int_0^1 \frac{\Phi(x)\, dx}{x - \alpha_j}.$$

Nous avons ensuite, comme dans le cas précédent,

$$\int_0^1 \frac{\Phi(x)\, dx}{x-\alpha} = \frac{1}{\Phi'(\alpha)} \int_0^1 \frac{[\Phi(x)]^2\, dx}{(x-\alpha)^2},$$

et, intégrant par parties,

$$\int_0^1 \frac{\Phi(x)\, dx}{x-\alpha} = -\frac{1}{\Phi'(\alpha)} \left\{ \frac{[\Phi(0)]^2}{\alpha} + \frac{[\Phi(1)]^2}{1-\alpha} \right\} + 2\int_0^1 \frac{\Phi(x)\, dx}{x-\alpha},$$

par conséquent

$$\int_0^1 \frac{\Phi(x)\, dx}{x-\alpha} = \frac{1}{\Phi'(\alpha)} \left\{ \frac{[(\Phi(0)]^2}{\alpha} + \frac{[\Phi(1)]^2}{1-\alpha} \right\}.$$

Si l'on pose

$$\frac{1}{[\Phi'(\alpha_k)]^2} \left\{ \frac{[\Phi(0)]^2}{\alpha_k} + \frac{[\Phi(1)]^2}{1-\alpha_k} \right\} = A_k,$$

on a, pour calculer l'intégrale, l'expression suivante

$$\int_0^1 \varphi(x)\, dx = A_1 \varphi(\alpha_1) + A_2 \varphi(\alpha_2) + \ldots + A_n \varphi(\alpha_n).$$

On trouve les coefficients A_1, A_2, ..., A_n pour les six premières valeurs de n dans le *Calcul intégral* de M. Bertrand, page 343.

11. Appliquons l'équation (I) à la détermination de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

en prenant

$$F(x) = x^n - \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2}(1-x^2) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} x^{n-4}(1-x^2)^2 \ldots = \cos(n \arccos x).$$

En supposant $\varphi(x)$ développable en série entre les limites -1 et $+1$, nous comprendrons sous $\varphi(x)$ la somme des premiers $2n$ termes du développement de cette fonction. Divisant dans cette supposition $\varphi(x)$ par $F(x)$, soient $f_1(x)$ le quotient et $f(x)$ le reste qui sera un polynôme de degré $n-1$

$$\varphi(x) = f_1(x) F(x) + f(x).$$

En divisant par $\sqrt{1-x^2}$ et intégrant entre les limites -1 et $+1$, nous trouvons

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{+1} \frac{f_1(x).F(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Posons, dans le premier terme du second membre de cette équation,

$$x = \cos u;$$

nous aurons

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f_1(x).F(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi f_1(\cos u) \cos nu\, du.$$

Le second membre de cette égalité se compose des termes du type

$$A \int_0^\pi \cos^k u \cos nu\, du.$$

à la condition que $k < n$. Mais, en remarquant que

$$\cos^k u \cos nu = \frac{1}{2^k}\Big[\cos(n+k)u + k\cos(n+k-2)u + \frac{k(k-1)}{1.2}\cos(n+k-4)u + \ldots + \cos(n-k)u\Big],$$

nous trouvons, pour $k < n$,

$$\int_0^\pi \cos^k u \cos nu\, du = 0;$$

par conséquent

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

et de cette manière l'intégrale, dont la fonction sous-intégrale consisterait dans la somme de $2n$ termes, se réduit à une intégrale, dont la fonction sous-intégrale contient n termes seulement.

C'est à cette dernière intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

que nous appliquerons l'équation (I).

Désignant les racines de l'équation

$$F(x) = \cos(n \arccos x) = 0$$

par

$$\alpha_k = \cos\frac{2k+1}{2n}\pi = \cos a_k,$$

prenant pour k tous les nombres de 0 à $n-1$ et remarquant que

$$f(\alpha) = \varphi(\alpha),$$

nous trouvons (équat. I)

$$f(x) = \frac{1}{n}\sum_0^{n-1} \frac{\varphi(\cos a_k)\sin a_k}{\sin n a_k}\,\frac{\cos(n \arccos x)}{x - \cos a_k}.$$

En divisant par $\sqrt{1-x^2}$ et intégrant, nous trouvons

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1} \frac{\varphi(\cos a_k)\sin a_k}{\sin n a_k} \int_{-1}^{+1} \frac{\cos(n \operatorname{arc}\cos x)\,dx}{(x-\cos a_k)\sqrt{1-x^2}},$$

Il est aisé de calculer l'intégrale du second membre de cette équation. En y faisant à cet effet $x = \cos u$:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\cos(n \operatorname{arc}\cos x)\,dx}{(x-\cos a_k)\sqrt{1-x^2}} = \int_{0}^{\pi} \frac{\cos nu\,du}{\cos u - \cos a_k};$$

remarquons que, $\cos a_k$ étant une des racines du numérateur $\cos nu$ considéré comme fonction de $\cos u$, $\cos nu$ se divisera par

$$\cos u - \cos a_k$$

et donnera au quotient un polynôme de degré $n-1$ relativement à $\cos u$. Par suite, on peut poser

$$\frac{\cos nu}{\cos u - \cos a_k} = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + \ldots + A_{n-1}\cos(n-1)u.$$

Chassant le dénominateur, remplaçant le produit des cosinus par la somme des cosinus et comparant les coefficients, on obtient les $n+1$ équations suivantes :

$$\begin{aligned}
&A_1 = A_0 \cos a_k,\\
&A_2 + A_0 = 2A_1 \cos a_k,\\
&A_3 + A_1 = 2A_2 \cos a_k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&A_{n-1} + A_{n-3} = 2A_{n-2}\cos a_k,\\
&A_{n-2} = 2A_{n-1}\cos a_k,\\
&A_{n-1} = 2.
\end{aligned}$$

Des premières $n-1$ équations nous avons, pour tout s, depuis 1 jusqu'à $n-1$,

$$A_s = A_0 \cos(s a_k).$$

Mais la dernière nous donne

$$A_0 = \frac{2}{\cos(n-1)a_k} = \frac{2}{\cos na_k \cos a_k + \sin na_k \sin a_k} = \frac{2}{\sin na_k \sin a_k},$$

Quant à l'avant-dernière équation

$$A_{n-2} = 2A_{n-1}\cos a_k,$$

elle est satisfaite par elle-même, si l'on y remplace A_{n-2} et A_{n-1} par les valeurs obtenues plus haut.

On trouve, d'après ce qui vient d'être dit,

$$\frac{\cos nu}{\cos u - \cos a_k} = \frac{2}{\sin na_k \sin a_k}\Big[\frac{1}{2} + \cos a_k \cos u + \cos 2a_k \cos 2u + \ldots + \cos(n-1)a_k \cos(n-1)u\Big],$$

et, intégrant entre les limites o et π, on a

$$\int_0^\pi \frac{\cos nu\, du}{\cos u - \cos a_k} = \frac{\pi}{\sin na_k \sin a_k}.$$

Par suite, l'équation déterminant l'intégrale cherchée conduit à l'expression

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n}\sum_0^{n-1}\varphi(\cos a_k),$$

où

$$a_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}.$$

Cette équation détermine l'intégrale qui correspond à $2n$ termes du développement de la fonction sous-intégrale $\varphi(x)$ par la somme seulement de n termes.

12. Prenons pour $F(x)$ le polynôme de degré $n+1$

$$F(x) = nx(nx-1)(nx-2)\ldots(nx-n)$$

qui a pour racines $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1$, et supposons que les limites de l'intégration soient o et 1; alors (équat. II)

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \sum_0^n \frac{\varphi\left(\frac{k}{n}\right)}{F'\left(\frac{k}{n}\right)} \int_0^1 \frac{F(x)\,dx}{x-\frac{k}{n}},$$

ou, posant

$$\frac{1}{F'\left(\frac{k}{n}\right)} \int_0^1 \frac{F(x)\,dx}{x-\frac{k}{n}} = A_k,$$

nous avons

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = A_0\varphi(0) + A_1\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + A_2\varphi\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + A_n\varphi(1).$$

Pour déterminer les coefficients A, remarquons que, pour tout s moindre que $n+1$, on a (équat. I)

$$x^s = \sum_0^n \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^s}{F'\left(\frac{k}{n}\right)} \frac{F(x)}{x-\frac{k}{n}}$$

et, intégrant entre les limites o et 1,

$$\frac{1}{s+1} = \sum_0^n \left(\frac{k}{n}\right)^s A_k.$$

Faisant s consécutivement égal à $0, 1, 2, \ldots, n$, nous trouvons le système des équations

$$\begin{aligned}
A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n &= 1,\\
A_1 + 2A_2 + \ldots + nA_n &= \frac{n}{2},\\
A_1 + 2^2A_2 + \ldots + n^2A_n &= \frac{n^2}{3},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots,\\
A_1 + 2^nA_2 + \ldots + n^nA_n &= \frac{n^n}{n+1},
\end{aligned}$$

servant à déterminer tous les coefficients A.

On trouve ainsi :

Pour $n = 1$.............. $A_0 = A_1 = \frac{1}{2}$;

Pour $n = 2$.............. $A_0 = A_2 = \frac{1}{6}$, $A_1 = \frac{2}{3}$;

Pour $n = 3$.............. $A_0 = A_3 = \frac{1}{8}$, $A_1 = A_2 = \frac{3}{8}$,

et ainsi de suite ([1]).

([1]) *Voir* Bertrand, *Calcul intégral*, p. 333.