JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. RESAL

Formules approchées relatives à l'équilibre d'une portion de chaîne ou de corde pesante, comprise entre deux appuis, et très tendue

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 8 (1882), p. 383-388.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1882_3_8__383_0>

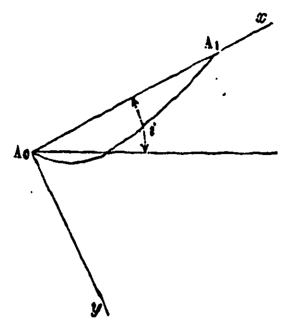
Formules approchées relatives à l'équilibre d'une portion de chaîne ou de corde pesante, comprise entre deux appuis, et très tendue;

PAR M. H. RESAL.

---

1. Soient

A_0, A_1 l'appui inférieur et l'appui supérieur;
x_1 la distance de ces appuis;
i l'inclinaison sur l'horizon de la droite A_0A_1 prise pour axe des x;



A_0y la perpendiculaire en A_0 à cette droite comprise dans le plan vertical de A_0A_1;
p le poids de l'unité de longueur de la chaîne;
T la tension en un point quelconque (x, y) de l'arc A_0A_1;
ds l'élément de cet arc.

Nous distinguerons respectivement par les indices o et 1 les quantités qui se rapportent aux points A_0 et A_1. Le poids p ayant pour composantes $-p\sin i$, $p\cos i$ suivant A_0x, A_0y, nous aurons, d'après des formules connues,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\mathrm{T}\dfrac{dx}{ds}}{ds}=p\sin i,\\ &\frac{d\mathrm{T}\dfrac{dy}{ds}}{ds}=-p\cos i.\end{aligned}\right.$$

Nous supposerons, pour des motifs que nous ferons connaître plus loin, que $\frac{dy}{dx}$ et p, qui sont du même ordre de grandeur, sont assez petits pour que l'on puisse négliger celles de leurs puissances qui sont supérieures à la seconde, ce qui nous conduit à prendre

$$(2)\qquad \frac{dx}{ds}=1-\frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx^2}.$$

A ce degré d'approximation, nous pourrons substituer aux équations (1) les suivantes :

$$\mathrm{T}\frac{dx}{ds}=\mathrm{T}_0\left(\frac{dx}{ds}\right)_0+xp\sin i,$$

$$\mathrm{T}\frac{dy}{ds}=-xp\cos i+\mathrm{C},$$

en désignant par C une constante arbitraire. On en déduit

$$(4)\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{-p\cos i+\mathrm{C}}{\mathrm{T}_0\left(\dfrac{dx}{ds}\right)_0+xp\sin i}.$$

Nous allons maintenant avoir recours à la méthode des approximations successives.

2. *Première approximation.* — En négligeant les termes du second

ordre et supposant par suite $\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 = 1$, l'équation (4) nous donne

$$(4') \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-p\cos i + C}{T_0 + xp\sin i} = -\frac{p\cos i}{T_0}x + \frac{C}{T_0}\left(1 - \frac{p\sin i}{T_0}x\right);$$

d'où, en exprimant que $y = 0$ pour $x = 0$,

$$y = -x^2\frac{p\cos i}{2T_0} + \frac{Cx}{T_0}\left(1 - \frac{p\sin i}{2T_0}x\right).$$

Mais on doit avoir $y = 0$ pour $x = x_1$; par suite,

$$(5) \qquad \frac{C}{T_0} = \frac{x_1 p\cos i}{2T_0\left(1 - \frac{p\sin i}{2T_0}x_1\right)} = \frac{p\cos i}{2T_0}x_1,$$

et l'équation (4′) se réduit à la suivante :

$$(4'') \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{p\cos i}{T_0}\left(\frac{x_1}{2} - x\right).$$

Il est clair, d'après ce que nous venons de voir, que nous avons supposé implicitement, dès le début, que la chaîne est assez tendue et que la longueur de l'arc A_0A_1 est assez restreinte pour que le rapport $\frac{px_1}{T_0}$, qui est sensiblement celui du poids de cet arc à sa tension en A_0, soit petit.

3. *Deuxième approximation.* — En conservant maintenant les termes du second ordre, la première des équations (2) donne successivement

$$T\left(1 - \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx^2}\right) = T_0\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{dy^2}{dx^2}\right)_0\right] + xp\sin i,$$

$$T = T_0\left\{1 + \frac{1}{2}\left[\frac{dy^2}{dx^2} - \left(\frac{dy^2}{dx^2}\right)_0\right]\right\} + xp\sin i;$$

d'où, en ayant égard à la valeur (4″),

$$(6) \qquad T = T_0\left[1 - \frac{p^2\cos^2 i}{2T_0^2}x(x_1 - x)\right] + xp\sin i.$$

La plus grande valeur de la tension correspond évidemment à $x = x_1$, et a pour expression

$$T_1 = T_0 + x_1 p \sin i. \tag{6'}$$

Comme, d'après la formule (5), $\frac{C}{T_0}$ est du premier ordre, il nous est permis de supposer $\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 = 1$ dans l'équation (4) qui devient

$$(4''')\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{T_0}\frac{-xp\cos i + C}{1 + \frac{p\sin i}{T_0}x} \\ &= -\frac{p\cos i}{T_0}x + x^2\frac{p^2}{T_0^2}\sin i\cos i + \frac{C}{T_0}\left(1 - \frac{p\sin i}{T_0}x\right); \end{aligned}\right.$$

d'où

$$y = -x^2\frac{p\cos i}{2T_0} + x^3\frac{p^2}{3T_0^2}\sin i\cos i + \frac{Cx}{T_0}\left(1 - \frac{p\sin i}{2T_0}x\right).$$

En exprimant que $y = 0$ pour $x = x_1$, on trouve

$$\frac{C}{T_0} = \frac{\frac{p\cos i}{2T_0}x_1 - x_1^2\frac{p^2\sin i\cos i}{3T_0^2}}{1 - x\frac{p\sin i}{2T_0}} = x_1\frac{p\cos i_1}{2T_0}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{p\sin i}{T_0}x_1\right),$$

et l'équation (4''') devient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p\cos i}{T_0}\left[\frac{x_1}{2} - x + \frac{p\sin i}{T_0}\left(x^2 - \frac{xx_1}{2} - \frac{x_1^2}{12}\right)\right]. \tag{7}$$

On voit facilement que nous avons substitué à l'arc de chaînette A_0A_1 un arc de parabole du troisième degré.

Soient ε_0 l'inclinaison de la tangente en A_0 sur l'axe Ox, et ε_1 l'angle aigu formé par la tangente en A_1 avec le même axe; nous avons

$$\operatorname{tang}\varepsilon_0 = \left(\frac{dx}{dy}\right)_0 = \frac{px_1\cos i}{2T_0}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{p\sin i}{T_0}x_1\right),$$

$$\operatorname{tang}\varepsilon_1 = -\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \frac{px_1\cos i}{2T_0}\left(1 - \frac{5}{6}\frac{p\sin i}{T_0}x_1\right).$$

Si l'on remarque que l'on peut écrire

$$\varepsilon_0 = \operatorname{tang}\varepsilon_0 - \frac{1}{3}\operatorname{tang}^2\varepsilon_0,$$

on trouve

$$(8) \qquad \varepsilon_0 = \frac{px_1 \cos i}{2T_0}\left[1 - \frac{px_1}{6T_0}\left(\sin i + \frac{\cos i}{2}\right)\right],$$

et de même

$$(9) \qquad \varepsilon_1 = \frac{px_1 \cos i}{2T_0}\left[1 - \frac{px_1}{6T_0}\left(5\sin i + \frac{\cos i}{2}\right)\right],$$

par suite,

$$(10) \qquad \varepsilon_0 - \varepsilon_1 = \frac{p^2 x_1^2 \sin 2i}{6T_0}.$$

4. Les considérations précédentes s'appliquent évidemment au cas d'une chaîne reposant sur deux poulies d'un petit diamètre dont les axes horizontaux seraient projetés en A_0, A_1, et l'on peut ainsi tenir compte dans la théorie de la grue du poids de la partie inclinée de la chaîne.

Le point A_0 peut aussi être l'attache de la chaîne à une masse résistante, comme cela a lieu dans le halage des bateaux et dans les ponts-levis.

Si les formules (8) et (9) présentent quelques différences avec celles de MM. Peaucelier et Wagner, résultant de considérations géométriques, et que nous avons reproduites dans notre *Traité de Mécanique générale* (t. VI), cela tient à la régularité avec laquelle nous avons conduit les approximations.

La théorie que nous venons d'exposer n'offre d'ailleurs de l'intérêt que lorsque la tension est voisine du maximum qu'elle doit atteindre et qui est fixé d'avance; quand on emploie le fer, on a à peu près

$\frac{p}{T_0} = \frac{8}{6 \times 1000} = 0,00133$, et, en supposant même $x_1 = 30^m$, on voit que $\frac{p x_1}{T_0}$ serait de l'ordre $\frac{4}{100}$, fraction dont on peut, dans les applications, négliger le carré, et *a fortiori* le cube, devant l'unité.