JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ABEL SOUCHON

Sur une grande inégalité du moyen mouvement de la planète Concordia

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 6 (1880), p. 337-342.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1880_3_6__337_0>

Sur une grande inégalité du moyen mouvement de la planète Concordia;

PAR M. ABEL SOUCHON,
Membre adjoint du Bureau des Longitudes.

Il existe dans la théorie de la planète Concordia (58) troublée par Jupiter une inégalité fort remarquable, du cinquième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, et à laquelle la commensurabilité approchée des moyens mouvements n et n' de ces deux corps assigne une valeur sensible. On reconnaît, en effet, que l'excès de huit fois le moyen mouvement de Jupiter, moins trois fois celui de Concordia, est à fort peu près le $\frac{1}{62}$ de n', circonstance qui rend très petite la quantité $8n'-3n$ ($2110''$ environ) et qui peut, par suite, rendre considérable l'inégalité du moyen mouvement dépendante de cet angle, à cause de la grandeur du coefficient $\frac{n^2}{(8n'-3n)^2}$ qui affecte son expression.

Pour en déterminer les termes principaux, supposons que m se rapporte à Concordia, m' à Jupiter, et soient a, e, ω, φ, θ, ε, a', e', ω', φ', θ', ε' les autres éléments de leurs orbites elliptiques, ces quantités ayant une signification bien connue. Appelons γ l'inclinaison mutuelle des orbites, laquelle, à l'époque que nous adoptons, a pour valeur $4°34'11''$, et soit τ la longitude du nœud de l'orbite de m rapportée au plan de l'orbite de m'. Posons en outre

$$l = nt + \varepsilon, \quad l' = n't + \varepsilon'.$$

D'après la théorie des perturbations planétaires, on sait que les inégalités de l'espèce de celle que nous considérons sont au moins du cinquième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. Nous aurons donc tout d'abord à développer jusqu'aux termes de cet ordre la fonction R qui exprime l'action réciproque des deux planètes. Or, en s'aidant pour cela des formules générales que l'on trouve au Livre VI de la *Théorie analytique du système du monde,* il n'est pas difficile de voir qu'on aura, dans le cas qui nous occupe :

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & \mathrm{M}^{(0)} e^5 \cos(8l' - 3l - 5\omega) \\
& + \mathrm{M}^{(1)} e^4 e' \cos(8l' - 3l - 4\omega - \omega') \\
& + \mathrm{M}^{(2)} e^3 e'^2 \cos(8l' - 3l - 3\omega - 2\omega') \\
& + \mathrm{M}^{(3)} e^2 e'^3 \cos(8l' - 3l - 2\omega - 3\omega') \\
& + \mathrm{M}^{(4)} e e'^4 \cos(8l' - 3l - \omega - 4\omega') \\
& + \mathrm{M}^{(5)} e'^5 \cos(8l' - 3l - 5\omega') \\
& + \mathrm{N}^{(0)} e^3 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos(8l' - 3l - 3\omega - 2\tau) \\
& + \mathrm{N}^{(1)} e^2 e'^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos(8l' - 3l - 2\omega - \omega' - 2\tau) \\
& + \mathrm{N}^{(2)} e e'^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos(8l' - 3l - \omega - 2\omega' - 2\tau) \\
& + \mathrm{N}^{(3)} e'^3 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos(8l' - 3l - 3\omega' - 2\tau) \\
& + \mathrm{N}^{(4)} e \sin^4 \frac{\gamma}{2} \cos(8l' - 3l - \omega - 4\tau) \\
& + \mathrm{N}^{(5)} e' \sin^4 \frac{\gamma}{2} \cos(8l' - 3l - \omega' - 4\tau).
\end{aligned}$$

$\mathrm{M}^{(0)}, \mathrm{M}^{(1)}, \ldots$ et $\mathrm{N}^{(0)}, \mathrm{N}^{(1)}, \ldots$ sont des coefficients fonctions des éléments des orbites; et, si après avoir posé

$$\mathrm{R} = \mathrm{K} \sin(8l' - 3l) + \mathrm{K}' \cos(8l' - 3l)$$

on compare cette seconde forme de R avec la première, on en conclura, pour la variation $\delta\rho$ du moyen mouvement de Concordia ou pour la valeur de l'intégrale double $-\iint 3an\,d\mathrm{R}\,dt$,

$$\delta\rho = \frac{9am'n^2}{(8l'-3l)^2}[\mathrm{K}'\sin(8l'-3l) - \mathrm{K}\cos(8l'-3l)],$$

expression dans laquelle on a

$$\begin{aligned}
a'm'\mathrm{K}' = {} & \frac{m'}{3840}\Bigg[129168\,b_{\frac{1}{2}}^{(8)} + 70065\,\alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(8)}}{d\alpha} + 14220\,\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(8)}}{d\alpha^2} \\
& \qquad + 1350\,\alpha^3\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(8)}}{d\alpha^3} + 60\,\alpha^4\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(8)}}{d\alpha^4} + \alpha^5\frac{d^5b_{\frac{1}{2}}^{(8)}}{d\alpha^5}\Bigg]e^5\cos 5\omega \\
& - \frac{m'}{768}\Bigg[145215\,b_{\frac{1}{2}}^{(7)} + 78993\,\alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{d\alpha} + 15858\,\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{d\alpha^2} \\
& \qquad + 1470\,\alpha^3\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{d\alpha^3} + 63\,\alpha^4\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{d\alpha^4} + \alpha^5\frac{d^5b_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{d\alpha^5}\Bigg]e^4e'\cos(4\omega+\omega') \\
& + \frac{m'}{384}\Bigg[162408\,b_{\frac{1}{2}}^{(6)} + 88848\,\alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha} + 17754\,\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^2} \\
& \qquad + 1597\,\alpha^3\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^3} + 66\,\alpha^4\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^4} + \alpha^5\frac{d^5b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^5}\Bigg]e^3e'^2\cos(3\omega+2\omega') \\
& - \frac{m'}{384}\Bigg[180150\,b_{\frac{1}{2}}^{(5)} + 99594\,\alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha} + 19607\,\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^2} \\
& \qquad + 1731\,\alpha^3\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^3} + 69\,\alpha^4\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^4} + \alpha^5\frac{d^5b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^5}\Bigg]e^2e'^3\cos(\omega+4\omega') \\
& + \frac{m'}{768}\Bigg[197184\,b_{\frac{1}{2}}^{(4)} + 111120\,\alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} + 21728\,\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} \\
& \qquad + 1872\,\alpha^3\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3} + 72\,\alpha^4\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^4} + \alpha^5\frac{d^5b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^5}\Bigg]ee'^4\cos(\omega+4\omega') \\
& - \frac{m'}{3840}\Bigg[210968\,b_{\frac{1}{2}}^{(3)} + 123240\,\alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} + 24020\,\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} \\
& \qquad + 2020\,\alpha^3\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} + 75\,\alpha^4\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^4} + \alpha^5\frac{d^5b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^5}\Bigg]e'^5\cos 5\omega' \\
& - \frac{m'\alpha}{96}\Bigg[1103\,b_{\frac{3}{2}}^{(7)} + 339\,\alpha\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(7)}}{d\alpha} + 33\,\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(7)}}{d\alpha^2} + \alpha^3\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(7)}}{d\alpha^3}\Bigg]e^3\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma\cos(3\omega+2\tau)
\end{aligned}$$

$$+\frac{m'\alpha}{32}\left[1488\,b_{\frac{3}{2}}^{(6)}+433\,\alpha\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{d\alpha}+38\,\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{d\alpha^2}+\alpha^3\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{d\alpha^3}\right]e^2e'\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma\cos(2\omega+\omega'+2\tau)$$

$$-\frac{m'\alpha}{32}\left[2088\,b_{\frac{3}{2}}^{(5)}+552\,\alpha\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{d\alpha}+43\,\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{d\alpha^2}+a^3\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{d\alpha^3}\right]ee'\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma\cos(\omega+2\omega'+2\tau)$$

$$+\frac{m'\alpha}{96}\left[3008\,b_{\frac{3}{2}}^{(4)}+696\,\alpha\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha}+48\,\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2}+\alpha^3\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3}\right]e'^3\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma\cos(3\omega'+2\tau)$$

$$-\frac{3m'\alpha^2}{16}\left[10\,b_{\frac{5}{2}}^{(6)}+\alpha\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(6)}}{d\alpha}\right]e\sin^4\tfrac{1}{2}\gamma\cos(\omega+4\tau)$$

$$+\frac{3m'\alpha^2}{16}\left[17\,b_{\frac{5}{2}}^{(5)}+a\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(5)}}{dx}\right]e'\sin^4\tfrac{1}{2}\gamma\cos(\omega'+4\tau).$$

On aurait une expression semblable pour $a'm'\mathrm{K}$, mais dans laquelle les cosinus seraient remplacés par des sinus.

Voici maintenant le Tableau des valeurs numériques des quantités $b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$, $b_{\frac{3}{2}}^{(i)}$, $b_{\frac{5}{2}}^{(i)}$ et de leurs dérivées, valeurs qui ont été obtenues en prenant $\alpha=0{,}5190232$, ce qui suppose $a=2{,}700374$, $a'=5{,}202798$:

i.	$b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$.	$\alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha}$.	$\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha^2}$.	$\alpha^3\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha^3}$.	$\alpha^4\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha^4}$.	$\alpha^5\frac{d^5b_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha^5}$.
0........	2,175248	0,382592	0,695927	1,418373	4,886528	21,30524
1........	0,582491	0,737137	0,603703	1,544781	4,838756	21,69372
2........	0,229762	0,527720*	0,865194	1,508133	5,072619	21,85271
3........	0,100052	0,331498	0,850314	1,864913	5,215977	22,75349
4........	0,045626	0,197266	0,695052	2,048834	5,988863	23,56074
5........	0,021373	0,113928	0,512448	1,952738	6,759491	26,02948
6........	0,010189	0,064555	0,353596	1,671312	7,059161	28,59313
7........	0,004918	0,036097	0,233326	1,322485	6,645832	31,76985
8........	0,002396	0,022238	0,148977	0,987079	5,834711	31,18750

i.	$b_{\frac{3}{2}}^{(i)}$	$\alpha\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(i)}}{d\alpha}$.	$\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(i)}}{d\alpha^2}$.	$\alpha^3\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(i)}}{d\alpha^3}$.	$b_{\frac{5}{2}}^{(i)}$	$\alpha\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(i)}}{d\alpha}$.
0....	4,003632	6,428376	21,07848	87,87080	»	»
1....	2,815115	6,755295	20,36714	87,81594	»	»
2....	1,759069	5,832454	19,94401	85,41839	»	»
3....	1,044387	4,459008	18,29182	82,34706	»	»

i.	$b_{\frac{3}{2}}^{(i)}$.	$\alpha \dfrac{db_{\frac{3}{2}}^{(i)}}{d\alpha}$.	$\alpha^2 \dfrac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(i)}}{d\alpha^2}$.	$\alpha^3 \dfrac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(i)}}{d\alpha^3}$.	$b_{\frac{5}{2}}^{(i)}$	$\alpha \dfrac{db_{\frac{5}{2}}^{(i)}}{d\alpha}$.
4....	0,602454	3,156870	15,46554	77,36035	»	»
5....	0,341120	2,121746	12,25274	68,71771	2,402061	17,87391
6....	0,190661	1,373584	9,16269	58,74700	1,513699	12,74584
7....	0,105545	0,864820	6,58974	46,82979	»	»

En adoptant, pour les éléments elliptiques des deux planètes à l'époque 7,0 janvier 1865, les valeurs suivantes :

Concordia.	$n = 292052'',59$	$\varpi = 189°10'\ 5''$	$e = 0,0425625$	$\theta = 161°19'50''$	$\varphi = 5°\ 1'51''$
Jupiter...	$n' = 109256'',00$	$\varpi' = 12°\ 9'28''$	$e' = 0,0482627$	$\theta' = 99°\ 5'23''$	$\varphi' = 1°18'37''$

on en déduit

$$\tau = 176°2'37'',\quad \gamma = 4°34'11''.$$

Par suite, on a, en prenant $m' = \frac{1}{1050}$ et effectuant la réduction en secondes,

$$\begin{aligned}
a'm'K' = &+ \bar{5},6099052\cos(5\omega)\\
&- \bar{5},9042964\cos(4\omega + \omega')\\
&+ \bar{7},1895661\cos(3\omega + 2\omega')\\
&- \bar{7},4819416\cos(2\omega + 3\omega')\\
&+ \bar{7},4729955\cos(\omega + 4\omega')\\
&- \bar{7},0643160\cos(5\omega')\\
&- \bar{6},2278212\cos(3\omega + 2\tau)\\
&+ \bar{7},0399799\cos(2\omega + \omega' + 2\tau)\\
&- \bar{7},3798305\cos(\omega + 2\omega' + 2\tau)\\
&+ \bar{7},2468543\cos(3\omega' + 2\tau)\\
&- \bar{5},5658626\cos(\omega + 4\tau)\\
&+ \bar{5},9438143\cos(\omega' + 4\tau).
\end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$\log n = 5,4654617,\quad \log n^2 = 10,9309234,$$
$$\log(8n' - 3n) = 3,3242825,\quad \log(8n' - 3n)^2 = 6,6485650,$$

en sorte que

$$\log \frac{9 \alpha n^2}{(8n' - 3n)^2} = 4{,}9517677;$$

et, si à ces nombres on associe ceux de $\log\cos 5\omega$, $\log\cos(4\omega + \omega')$, $\ldots$, $\log\cos(\omega' + 4\tau)$, $\log\sin 5\omega$, $\log\sin(4\omega + \omega')\ldots$ $\log\sin(\omega' + 4\tau)$, on obtient enfin pour la valeur numérique de l'inégalité $\delta\rho$ de Concordia, mise sous la forme d'un seul terme,

$$\delta\rho = 444'',4 \sin(8l' - 3l + 89°8'31'').$$

Le rapport $\frac{2\pi}{(8n' - 3n)}$ assigne à cette inégalité une période dont la durée est de 224970 jours moyens ou 615,96 années juliennes.