JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

CH. MÉRAY

Démonstration générale de l'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 6 (1880), p. 235-266.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1880_3_6__235_0>

Démonstration générale de l'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles (¹);

PAR M. CH. MÉRAY,

Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.

1. J'ai fait connaître il y a quelques années (²) une méthode qui permet de traiter désormais les détails les plus minutieux et les plus variés de l'analyse des fonctions avec la rigueur et la simplicité qui jusqu'alors étaient restées l'apanage à peu près exclusif des Mathématiques élémentaires. Pour arriver à ce résultat, il m'a suffi d'abandonner les notions vagues et tout à fait insuffisantes qui sont restées trop longtemps les bases traditionnelles des raisonnements, et de revenir aux idées de Lagrange, c'est-à-dire de prendre *invariablement* pour point de départ cette propriété universelle et très nette des fonctions, d'être développables en séries *entières* (*P*. 34) (³) dans toutes

(¹) Les énoncés des théorèmes contenus dans ce Mémoire ont été communiqués à l'Académie des Sciences de Paris, dans sa séance du 8 février 1875; mais, au dernier moment, je m'étais aperçu que ma démonstration principale laissait échapper certains cas particuliers (qu'il serait assez long et peu utile de préciser ici) et j'avais renoncé à la publier, quoiqu'elle s'étendît alors bien au delà du cas d'un système d'équations aux dérivées partielles simultanées, ayant même plus d'une variable *principale*. Le texte actuel, qui semble ne laisser plus rien à désirer sous ce rapport, a été présenté à l'Académie le 5 août 1878.

(²) *Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale*. Paris, août 1872.

(³) Je renverrai ainsi à l'Ouvrage cité, qui renferme sous la forme la mieux appropriée à mes recherches actuelles les propositions sur lesquelles j'aurai à m'appuyer. Un simple numéro se rapportera aux divisions du présent Mémoire.

les circonstances où les théorèmes généraux du Calcul infinitésimal leur sont applicables.

Une partie essentielle de ma tâche consistait donc à établir solidement la réalité de cette propriété fondamentale des fonctions. J'y suis parvenu, non plus en cherchant, comme on le faisait avant moi, à la déduire de quelque autre plus simple en apparence, telle que la continuité (il me semble absolument impossible de conduire à bonne fin une pareille entreprise), mais en la rattachant à la nature intime des opérations générales qui introduisent des fonctions nouvelles dans les spéculations mathématiques. J'ai pu ainsi, en combinant mes propres efforts avec les travaux antérieurs, traiter complètement la question pour la composition des fonctions, la formation des fonctions implicites, l'intégration des équations différentielles ordinaires et aux différentielles totales, simples ou simultanées; mais j'ai laissé entièrement de côté la théorie des équations aux dérivées partielles, nonobstant sa grande importance, car je ne possédais alors sur cette matière que des résultats incomplets et des démonstrations détournées.

Aujourd'hui, je puis combler cette lacune d'une manière satisfaisante, et je viens précisément établir un théorème tout à fait général, qui renferme dans un seul énoncé et dans une seule démonstration, les principes de la théorie de toutes les équations différentielles, dont celles connues sous le nom d'*équations aux dérivées partielles* ne forment qu'une classe très restreinte, comme on le verra ci-après.

Avant d'entrer en matière, il est juste de faire remarquer que ma démonstration de la convergence des intégrales a pour élément principal l'artifice si habilement utilisé par MM. Briot et Bouquet pour les équations différentielles ordinaires.

Définition d'un système d'équations différentielles immédiat.

2. On sait qu'un système quelconque d'équations différentielles simultanées se ramène au premier ordre, en ce sens que l'adjonction de fonctions inconnues auxiliaires permet toujours de former un certain système d'équations du premier ordre parmi les solutions duquel se trouvent celles du proposé (*P.* 231). Nous n'avons donc pas à nous occuper des systèmes d'ordres supérieurs; quant à ceux du premier ordre, il convient tout d'abord de porter exclusivement notre attention sur les systèmes *immédiats*, en qualifiant ainsi ceux qui satisfont aux deux conditions suivantes, et dont la théorie renferme celle de tous les autres.

I. *Les équations différentielles d'un système de cette espèce expriment immédiatement quelques dérivées (premières) des fonctions inconnues, en fonctions composées de ces mêmes fonctions, de leurs autres dérivées (premières) et des variables indépendantes.*

Ces fonctions composées (ou plutôt leurs composantes) sont ce que je nommerai les *seconds membres* des équations différentielles; les premiers ne contiennent, bien entendu, que les dérivées dont ces équations fournissent de telles expressions.

Il importe essentiellement de distinguer pour chaque fonction inconnue les variables indépendantes par rapport auxquelles sont prises les dérivées qui figurent dans les premiers membres des équations différentielles, de celles qui sont étrangères à la formation des dérivées dont il s'agit. Les premières seront pour nous les variables *principales* de la fonction considérée, les dernières ses variables *paramétriques*. Il va de soi qu'une même variable peut être à la fois principale pour quelque fonction et paramétrique pour quelque autre.

Il faut aussi donner des noms différents aux dérivées de tous ordres d'une même fonction inconnue, selon que les différentiations d'où elles proviennent intéressent ses *variables paramétriques seules*, ou bien, soit avec elles, soit sans elles, *quelque variable principale*. Ce seront respectivement les *dérivées paramétriques* et les *dérivées principales* de la fonction considérée.

D'après cela, *les équations d'un système immédiat expriment les dérivées principales premières des fonctions inconnues en fonctions composées des variables indépendantes, de ces mêmes fonctions inconnues, et de leurs dérivées paramétriques premières.*

Pour plus de clarté, il faut, par la pensée, distribuer les équations d'un système immédiat dans les compartiments d'un tableau rectangulaire divisé en cases de nombre égal au produit du nombre des fonctions inconnues par celui des variables indépendantes, cela en plaçant dans une même colonne toutes les équations dont les premiers membres sont les dérivées d'une même fonction inconnue, et dans une même ligne toutes celles où ces premiers membres sont des dérivées prises par rapport à une même variable.

Le tableau du système peut contenir des cases vides réparties d'une manière quelconque ; pour une colonne donnée, elles sont en nombre égal à celui des variables paramétriques de la fonction correspondante. Quand le tableau ne contient aucune case vide, il n'y a point de variables paramétriques, les seconds membres ne contiennent aucune dérivée et l'on a des équations simultanées aux différentielles totales; c'est le cas traité au n° **139** de mon Ouvrage. S'il renferme une seule colonne n'ayant elle-même qu'une seule case pleine, le système immédiat proposé se réduit à une équation aux dérivées partielles du premier ordre. S'il se réduisait à une seule ligne, on aurait un système d'équations différentielles ordinaires, complet ou incomplet (*P*. **233**, **256**), etc.

La notation générale d'un semblable système d'équations différentielles présente des difficultés matérielles qui me font renoncer à l'entreprendre; chacun d'ailleurs conçoit aisément ce dont il s'agit.

II. *Les seconds membres des équations d'une colonne quelconque ne contiennent aucune dérivée de toute fonction inconnue dont quelque variable principale serait paramétrique pour la fonction dont les équations considérées expriment les dérivées principales.*

Cette restriction est essentielle; sa nécessité apparaîtra d'elle-même quand nous aurons à établir les propositions fondamentales des n^{os} **4**, **6**, **7**, **9** (*inf.*).

3. Les *intégrales* d'un ensemble quelconque d'équations différentielles simultanées, c'est-à-dire les fonctions dont la substitution transforme toutes ces équations en de simples identités entre les variables indépendantes, ne peuvent être conçues autrement qu'*olotropes* (*P*. **45**) dans les limites des valeurs des variables où elles peuvent exister (*P*. **136**). Celles d'un système immédiat se partagent en deux classes très distinctes :

I. Les intégrales *ordinaires*, caractérisées par cette circonstance que, *pour les valeurs correspondantes des variables, desdites intégrales et de leurs dérivées paramétriques premières, les seconds membres des équations différentielles deviennent toutes fonctions olotropes de ces trois sortes de quantités considérées un instant comme autant de variables indépendantes.*

II. Les intégrales *singulières,* qui, dans les mêmes circonstances, *font au contraire cesser l'olotropie de quelque second membre.*

Nous étudierons d'abord celles de la première classe et, pour faciliter le langage, nous distribuerons en *genres* les dérivées principales (**2**) d'un même ordre n, d'un groupe déterminé d'intégrales simultanées, d'après les nombres relatifs de différentiations *principales* qui concourent à leur formation.

Les dérivées du *premier genre* seront bien de l'ordre total n par rapport à l'ensemble des variables indépendantes, mais du premier ordre seulement par rapport aux variables principales des fonctions correspondantes. Celles du *second genre* seront d'ordre 2 par rapport aux variables principales et d'ordre $n-2$ par rapport aux variables paramétriques, etc. Enfin le $n^{\text{ième}}$ genre renferme toutes les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ n'impliquant dans leur formation aucune différentiation *paramétrique*. Quelquefois aussi, nous considérerons les dérivées paramétriques comme formant les genres o de tous les ordres.

Pour une fonction, relativement à laquelle toutes les variables seraient principales, le genre n dans l'ordre n contiendrait seul quelque dérivée. Si, au contraire, toutes les variables étaient paramétriques pour la fonction considérée, toutes les dérivées seraient paramétriques et l'ordre n ne comprendrait que le genre o.

4. Théorème. — *Quand un système immédiat* (a) *possède quelque groupe d'intégrales ordinaires, leurs dérivées principales d'ordre* n *et de genre* ν *sont indéfiniment exprimables en fonctions composées olotropes des variables, des intégrales considérées elles-mêmes, de leurs dérivées* (*quelconques*) *d'ordres inférieurs à* n *et de leurs dérivées d'ordre* n, *mais de genres inférieurs à* ν.

En effet, la substitution des intégrales dont l'existence est admise dans une colonne quelconque de (a) transforme les équations qui la composent en autant d'identités entre les seules variables indépendantes; et les seconds membres de ces identités sont des fonctions composées olotropes des variables, des intégrales et de leurs dérivées paramétriques premières, tant par leurs composantes que par leurs fonctions simples (P. 94), ce qui vérifie déjà notre théorème pour les dérivées principales du premier ordre.

Nous pouvons ensuite exécuter sur chacune des identités résultantes les $n-1$ différentiations capables de faire naître de leurs premiers membres les dérivées d'ordre n et de genre ν de l'intégrale correspondante u (P. 96). Les seconds membres se compliqueront de dérivées de toutes les intégrales d'ordres inférieurs à n et de quelques-unes de l'ordre n; mais ces dernières, provenant exclusivement de la différentiation des dérivées premières qui figurent dans les seconds membres, sont paramétriques, ou bien principales, mais de genres inférieurs à ν. Car les dérivées premières en question sont essentiellement paramétriques, et leur présence dans les seconds membres des équations que l'on a différentiées exige que les variables qui sont paramétriques pour u le soient aussi pour les intégrales auxquelles elles appartiennent (**2**, II). Les dérivées d'ordre n qui en naissent impliquent donc nécessairement une différentiation paramétrique de plus, au moins, que les dérivées d'ordre n et de genre ν qui se sont formées dans les premiers membres; car toute différentiation qui est paramétrique pour ces dernières l'est aussi pour les premières, et les premières proviennent de dérivées principales, tandis que les autres proviennent de dérivées paramétriques.

Cela posé, les nouvelles identités fournies par ces $n-1$ différentiations donnent précisément aux dérivées d'ordre n et de genre ν de l'intégrale u la forme voulue par l'énoncé.

5. Nous désignerons par (A) les identités du premier ordre résultant de la substitution des intégrales dans le système immédiat proposé (a), et par (B) toutes celles subséquentes résultant de la différentiation indéfinie des premières et fournissant pour les dérivées principales des intégrales les expressions dont nous venons de parler.

En disposant ces relations par ordres et genres croissants, leurs seconds membres ne contiendront ainsi pour chacune, outre les dérivées purement paramétriques, que des dérivées principales antérieurement obtenues, et l'élimination partielle ou totale de ces dernières fournira pour les dérivées principales d'ordres supérieurs une multitude de représentations analogues à celles que donnent les identités primitives (B). Mais nous n'avons à noter que celles dont il est question ci-après.

6. Théorème. — *Les dérivées principales d'ordre n d'un groupe d'intégrales ordinaires du système immédiat* (a) *s'expriment, sans distinction de genres, en fonctions composées olotropes, des variables indépendantes, des intégrales elles-mêmes et de leurs dérivées paramétriques d'ordres égaux ou inférieurs à n.*

Effectivement, dans le premier genre de l'ordre n, les expressions des dérivées principales données par les identités (B) renferment seulement des dérivées quelconques d'ordres inférieurs à n et des dérivées paramétriques $n^{\text{ièmes}}$ (4). Celles du second genre contiennent les mêmes dérivées et, en outre, celles du premier genre; ces dernières disparaîtront donc, si on leur substitue les fonctions composées qui leur sont équivalentes. Les deux premiers genres se trouvant ainsi débarrassés des dérivées principales $n^{\text{ièmes}}$, on passera au troisième, puis au quatrième, ..., puis enfin au $n^{\text{ième}}$ d'où l'on chassera successivement de la même manière toutes les dérivées principales d'ordre n.

Dans chaque ordre, cette opération ne laisse subsister, en fait de dérivées principales, que celles des ordres inférieurs. Si donc on reprend successivement tous les ordres pour chasser de chacun les dérivées principales des ordres inférieurs, toutes les dérivées principales des intégrales revêtiront la forme voulue.

Je désignerai par (C) l'ensemble des identités qui fournissent ces nouvelles représentations des dérivées principales d'ordres supérieurs. Quant aux expressions des dérivées principales premières, elles se tireront toujours des identités primitives (A).

7. Théorème. — *Soient x_0, y_0, z_0, ... des valeurs particulières attribuées aux variables indépendantes x, y, z, ... dans les limites d'olotropie d'un groupe donné d'intégrales ordinaires du système immédiat* (a); *si l'on connaît seulement les valeurs que prennent ces intégrales et leurs dérivées paramétriques de tous ordres pour $x = x_0$,*

$y = y_0$, $z = z_0, \ldots$, *on pourra calculer les valeurs correspondantes de leurs dérivées principales de tous ordres, et par suite construire les développements de ces intégrales en séries entières par rapport à* $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0, \ldots$.

Effectivement, puisqu'il s'agit d'intégrales ordinaires, les valeurs en $x_0, y_0, z_0, \ldots$ des variables, des intégrales considérées et de leurs dérivées paramétriques premières tombent dans les limites d'olotropie des seconds membres des équations (a); on peut donc faire usage des relations (A), (C) pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots$. Les formules $(\mathrm{A})_0$, $(\mathrm{C})_0$ qui en résultent donnent évidemment les valeurs correspondantes des dérivées principales exprimées seulement au moyen de celles des variables, des intégrales et de leurs dérivées paramétriques, c'est-à-dire au moyen de quantités qui par hypothèse sont connues.

8. Selon l'usage, nous nommerons valeurs *initiales* des variables indépendantes des valeurs particulières telles que $x_0, y_0, z_0, \ldots$, à partir desquelles on développe simultanément, par la formule de Taylor, des intégrales ordinaires du système (a). Nous donnerons la même qualification aux valeurs que prennent, pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots$, les intégrales et leurs dérivées de tous ordres.

Nous appellerons aussi *détermination initiale* de chaque intégrale la fonction de ses seules variables paramétriques, à laquelle elle se réduit quand ses variables principales prennent leurs valeurs initiales.

9. Théorème. — *On peut également former les développements d'un groupe d'intégrales ordinaires dont on connaît seulement les déterminations initiales.*

Effectivement, les valeurs initiales des dérivées de tous ordres des déterminations initiales de nos intégrales sont évidemment les mêmes que celles de ces intégrales et de leurs dérivées paramétriques de tous ordres. La connaissance des déterminations initiales équivaut donc à celle des quantités au moyen desquelles les formules $(\mathrm{A})_0$, $(\mathrm{C})_0$ du n° **7** permettent d'écrire les développements dont il s'agit.

10. Il faut noter qu'en appelant $(\mathrm{B})_0$ ce que deviennent les relations (B) du n° **5**, pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots$, l'ensemble des formules $(\mathrm{A})_0$, $(\mathrm{B})_0$ équivaut tout à fait à celui des formules $(\mathrm{A})_0$, $(\mathrm{C})_0$

pour le calcul des valeurs initiales d'intégrales ordinaires à déterminations initiales connues. La seule différence consiste en ce que les premières ne peuvent être résolues que successivement par ordres et genres croissants, tandis que cette nécessité n'existe pas pour les seconds, où l'élimination des dérivées principales d'ordres et de genres moindres a précédé la réalisation de l'hypothèse particulière $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, ...

La structure sensiblement moins compliquée des formules $(B)_0$ nous les fera préférer plus tard (n° **15**, IV, 4°, 5°, 6° *inf.*).

Systèmes immédiats passifs.

11. L'algorithme indéfini contenu dans les formules $(A)_0$, $(C)_0$ du n° **7** permet, comme nous venons de le voir, de reconstituer en quelque sorte, au moyen des équations différentielles (a), un groupe d'intégrales ordinaires dont on connaîtrait seulement les déterminations initiales.

Mais on peut évidemment l'appliquer aussi à un groupe de fonctions arbitrairement choisies, en même nombre que les fonctions inconnues du système (a) et ne dépendant respectivement que des variables paramétriques de ces dernières, *quand bien même on ignorerait que ces fonctions arbitraires sont les déterminations initiales de quelque groupe d'intégrales ordinaires*.

Effectivement, pour que les formules $(A)_0$, $(C)_0$ ne soient pas illusoires, il suffit simplement que chacune des fonctions arbitraires soit olotrope quand ses variables prennent les valeurs qu'elles ont dans la suite $x_0, y_0, z_0, \ldots$, et que l'attribution de ces valeurs initiales aux variables indépendantes, des valeurs initiales correspondantes des fonctions arbitraires et de leurs dérivées premières aux fonctions inconnues et à leurs dérivées paramétriques premières, considérées un instant les unes et les autres comme autant d'autres variables indépendantes, rende tous olotropes les seconds membres des équations (a) [*P*. 96].

Cela posé, il y a lieu de se demander si, dans tous les cas, les développements obtenus de cette manière convergent et représentent des intégrales simultanées des équations différentielles proposées. La solution de cette question exige une distinction fort importante qu'il faut faire avant tout.

12. La construction de celle des relations (C) qui correspond à une dérivée principale déterminée d'une intégrale hypothétique présente deux phases : 1° la différentiation de l'une des équation (A) convenablement choisie, opération qui conduit à la relation correspondante dans (B); 2° l'élimination des dérivées principales de genres et d'ordres moindres qui figurent dans cette relation.

Quand les dérivées dont il s'agit est *simple*, c'est-à-dire quand les différentiations que comporte sa formation n'intéressent (avec les variables paramétriques) qu'*une seule* variable principale de l'intégrale hypothétique correspondante, le choix de l'équation (A) à différentier n'a rien d'arbitraire; on ne peut évidemment partir que de celle qui exprime la dérivée première de l'intégrale prise par rapport à la même variable principale.

Mais quand cette dérivée est *complexe*, c'est-à-dire quand elle provient de différentiations intéressant à la fois *plusieurs* variables principales distinctes, il est évident que ce choix peut se faire de plusieurs manières, et que plusieurs relations existent dans le groupe (B) pour cette même dérivée. On peut effectivement partir de l'une quelconque de celles des identités (A) qui ont pour premiers membres les dérivées premières, de l'intégrale hypothétique, prises par rapport à l'une ou à l'autre des variables principales dont il s'agit.

Toute dérivée complexe d'une intégrale hypothétique a donc déjà plusieurs formes primitives, c'est-à-dire de la nature de celles que donnent les relations (B), par cela seul que ces formes peuvent être tirées par différentiation de plusieurs des identités (A). Mais cette multiplicité s'accroît encore dans une mesure de plus en plus considérable par l'arbitraire qui préside au choix des expressions multiples à substituer aux dérivées complexes antérieures pour les éliminer. Quelquefois même, elle s'introduit pour la même cause, jusque dans les expressions définitives des dérivées simples dont les formes primitives peuvent contenir des dérivées complexes et partant susceptibles de plusieurs modes d'élimination.

Ainsi, en réalité, le groupe (C) peut contenir plus d'une relation pour une même dérivée principale, et par suite les formules $(C)_0$ donner de plusieurs manières la valeur initiale d'une semblable dérivée. A la vérité, cette particularité ne peut troubler en rien notre algorithme, quand on part de fonctions arbitraires *que l'on sait être réellement les déterminations initiales de quelque groupe d'intégrales ordinaires;* car alors les diverses relations qui existent pour chaque dérivée s'accordent de toute nécessité, au moins *numériquement,* sinon algébriquement. Mais cette diversité combinée avec l'indétermination des fonctions arbitraires fait concevoir la possibilité du contraire. Quand cette circonstance se présente, l'existence des intégrales admettant pour déterminations initiales les fonctions arbitraires choisies devient absolument impossible. Car si deux des formules $(C)_0$ seulement donnent des résultats différents pour la valeur initiale d'une même dérivée principale, le groupe des équations proposées (a), dont la différentiation et la transformation ont engendré celle des deux formules à laquelle on n'aura pas emprunté la valeur initiale adoptée, ne sera certainement pas satisfait.

L'équivalence *numérique* qui est ainsi préalablement nécessaire entre toutes celles des formules $(C)_0$ qui sont relatives à une même dérivée peut résulter de deux causes bien différentes : 1° pour certains systèmes immédiats, d'un choix de fonctions arbitraires spécialement appropriées à leur nature et aux valeurs initiales des variables; 2° pour d'autres systèmes, de leur constitution intime qui, à elle seule et indépendamment de toute hypothèse sur la nature des fonctions arbitraires et sur les valeurs initiales des variables, assure l'identité *algébrique* des relations (C) ayant pour formes initiales les formules $(C)_0$ dont il s'agit, et par suite la coïncidence numérique de ces dernières.

Je nommerai *passifs* les systèmes immédiats de la seconde classe, qui sont de beaucoup les plus importants à considérer. La proposition suivante fournit le moyen de les distinguer des autres.

13. Théorème. — *Pour que le système immédiat (a) soit passif, il est nécessaire et suffisant que les deux expressions fournies par les relations (C) pour toute dérivée complexe seconde d'une fonction inconnue quelconque soient, dans tous les cas, des fonctions identiquement égales des variables $x, y, z, \ldots$, des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques premières et secondes, ces trois dernières sortes de quantités étant, bien entendu, considérées pour un moment comme autant d'autres variables indépendantes.*

En effet, dans les formules $(C)_0$ les valeurs initiales des variables, des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques entrent exactement de la même manière que les valeurs générales de ces trois espèces de quantités dans les relations correspondantes de (C). Donc, en particulier, comme les deux valeurs initiales d'une même dérivée complexe seconde doivent être numériquement égales dans tous les cas, il faut bien que ces deux expressions générales, fournies par les relations (C) en fonction des variables indépendantes, des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques des deux premiers ordres, soient égales entre elles, quelles que soient les valeurs particulières attribuées à ces quantités indépendamment les unes des autres, c'est-à-dire identiquement.

Nous prouverons maintenant que cette condition est suffisante, en montrant qu'elle entraîne entre les expressions multiples de toutes les autres dérivées l'identité qu'elle exprime pour les dérivées complexes du second ordre.

I. *Dans le calcul de chacune des identités* (B), *les différentiations à exécuter sur celle des identités* (A) *d'où elle se tire peuvent être interverties d'une manière quelconque.* Ce premier point est évident,

II. Par conséquent, *deux expressions transitoires fournies par les relations* (B) *pour une même dérivée complexe quelconque peuvent être déduites, par des différentiations identiques, de deux semblables choisies convenablement parmi celles que les mêmes relations* (B) *fournissent pour la dérivée complexe du second ordre dont la proposée peut être considérée comme étant une dérivée.*

III. *Quand deux expressions* $F_1(U_1, V_1, \ldots)$, $F_2(U_2, V_2, \ldots)$ *se réduisent à une même fonction composée* $f(u, v, \ldots)$ *des fonctions simples* $u, v, \ldots,$ *par la substitution à* $U_1, V_1, \ldots,$ *d'une part, à* $U_2, V_2, \ldots,$ *d'autre part, de certaines fonctions composées* $\upsilon_1(u, v, \ldots)$, $\varphi_1(u, v, \ldots)\ldots$, $\upsilon_2(u, v, \ldots)$, $\varphi_2(u, v, \ldots)\ldots$, *des mêmes fonctions simples, les dérivées semblables de* F_1, F_2 *prises par rapport aux variables indépendantes, et exprimées selon les règles de la différentiation des fonctions composées au moyen des dérivées indéterminées de* $U_1, V_1, \ldots$ $U_2, V_2, \ldots$ *deviennent respectivement aussi identiques entre elles* (*et* *à la dérivée semblable de f) par la substitution de $v_1, \varphi_1, \ldots, v_2, \varphi_2, \ldots$ et de leurs dérivées, à $U_1, V_1, \ldots, U_2, V_2, \ldots$, et à leurs dérivées.*

C'est une conséquence évidente de la loi de formation des dérivées des fonctions composées.

IV. *Si notre proposition est vraie jusqu'au genre ν de l'ordre n inclusivement, elle l'est aussi pour les dérivées complexes de genre $\nu + 1 (\leqq n)$ du même ordre.*

Soient, en effet, Δ_1, Δ_2 deux expressions fournies pour une même dérivée complexe d'ordre n et de genre $\nu + 1$ par les relations (B), et δ_1, δ_2 celles semblables dans le second ordre, d'où on peut les tirer par des différentiations identiques (II) (différentiations en nombre évidemment égal à $n - 2$). Remplaçons en outre par autant de lettres différentes, savoir $U_1, V_1, \ldots$ pour δ_1, $U_2, V_2, \ldots$ pour δ_2, les variables, les fonctions inconnues et leurs dérivées figurant dans ces deux expressions. Δ_1 et Δ_2 se présenteront immédiatement sous forme d'expressions renfermant seulement, l'une $U_1, V_1, \ldots$ et leurs dérivées (encore indéterminées), l'autre $U_2, V_2, \ldots$ et leurs dérivées (également indéterminées). Mais, comme δ_1, δ_2 deviennent identiques par hypothèse quand on substitue à $U_1, V_1, \ldots$ d'une part, à $U_2, V_2, \ldots$ d'autre part, leurs expressions en $u, v, \ldots$, lettres par lesquelles nous représenterons un instant les variables indépendantes $x, y, z, \ldots$, les fonctions inconnues et leurs dérivées paramétriques des deux premiers ordres, Δ_1 et Δ_2, s'identifieront aussi par la même substitution étendue aux dérivées qui s'y sont introduites (III).

Ainsi Δ_1, Δ_2 sont maintenant des expressions identiques en $u, v, \ldots$ et en quelques-unes de leurs dérivées; elles le seront donc encore après la substitution finale à ces dernières quantités de leurs expressions au moyen des variables, des fonctions inconnues et de leurs dérivées *paramétriques* d'ordres égaux à n ou moindres. Car les seules quantités chassées par cette substitution, qui soient susceptibles d'expressions multiples, sont des dérivées principales d'ordres et de genres au plus égaux à n et à ν, dont, par hypothèse, les expressions de toutes origines sont identiques.

V. *Quand la proposition est vraie jusqu'à la même limite que ci-dessus,* *elle l'est aussi pour les dérivées simples de genre $\nu + 1$ et d'ordre n, si $\nu + 1 \leqq n$, et pour celles du premier genre de l'ordre $n + 1$, si $\nu = n$.*

Effectivement, nous avons fait remarquer déjà (**12**) que les relations (B) ne peuvent donner plus d'une représentation pour chaque dérivée simple, et que la multiplicité des relations (C), se rapportant à une même dérivée de cette espèce, ne pouvait provenir que de la diversité des formes fournies par les mêmes relations, pour les dérivées de genres et d'ordres moindres, qu'il faut en éliminer. L'individualité constante que notre hypothèse attribue aux dérivées d'ordres et de genres non supérieurs à n et à ν, qui sont seules à chasser des expressions primitives des dérivées simples d'ordre n et de genre $\nu + 1$ ou d'ordre $n + 1$ et de genre 1, assure donc celle de ces dernières.

VI. Notre proposition est vraie d'elle-même pour les dérivées principales premières et pour celles qui appartiennent au premier genre du second ordre; elle est vraie par hypothèse pour les dérivées complexes du second ordre (elles appartiennent au genre 2) : donc *elle est générale*.

Car l'emploi alternatif des lemmes (IV) et (V) permet de l'étendre successivement aux dérivées simples du genre 2 du second ordre, à celles du genre 1 du troisième ordre (les premiers genres ne contiennent aucune dérivée complexe), aux dérivées complexes, puis aux dérivées simples du second genre dans le troisième ordre, ... etc., et indéfiniment, en passant toujours d'un genre au suivant dans le même ordre, ou au premier de l'ordre suivant, quand le genre considéré est le dernier de son ordre.

14. La passivité d'un système immédiat est ainsi subordonnée à l'existence de certaines identités entre des expressions impliquant les variables, les fonctions inconnues et leurs dérivées paramétriques des deux premiers ordres, expressions dont les rapports avec les seconds membres des équations différentielles données sont établis par les considérations des n^{os} **6** et **12**; je nommerai ces identités les *conditions de passivité* [1] du système de ces équations.

---

[1] Cette dénomination me semble préférable à celle de *conditions d'intégrabilité*,

Comme chaque dérivée complexe seconde en donne une, leur nombre est égal à celui de ces dérivées, c'est-à-dire à la somme des nombres qui pour chaque fonction inconnue expriment combien ses variables principales offrent des combinaisons deux à deux.

Pour des nombres donnés de variables indépendantes et de fonctions inconnues, les conditions de passivité sont en nombre maximum quand les variables sont toutes principales pour chacune des fonctions, c'est-à-dire quand les équations proposées sont aux différentielles totales (*P*. 259).

Le système proposé est au contraire passif sans conditions, quand chaque fonction n'a pas plus d'une variable principale, ce qui arrive par exemple pour un système d'équations différentielles ordinaires et pour une seule équation aux dérivées partielles.

15. Voici enfin la proposition qui assure l'existence des intégrales ordinaires d'un système immédiat passif :

THÉORÈME. — *Considérons un instant dans le système* (*a*) *les variables, les fonctions inconnues et leurs dérivées paramétriques premières, comme autant de variables indépendantes distinctes, représentées graphiquement, selon l'usage, par des points en même nombre rapportés chacun dans son plan à un couple d'axes rectangulaires.*

Si, pour toutes les valeurs de ces quantités tombant à l'intérieur d'aires limitatives (S) *données dans les plans coordonnés, les seconds membres des équations* (*a*) *en sont fonctions olotropes, et si les conditions de passivité sont satisfaites* (**14**), *ces équations admettent en* x_0, y_0, z_0, ..., *valeurs initiales des variables prises à volonté dans celles des aires* (S) *qui leur correspondent, un groupe* (*unique*) *d'intégrales ordinaires* (*olotropes*) *ayant pour déterminations initiales des fonctions olotropes de leurs variables paramétriques, choisies arbitrairement sous la simple condition que leurs valeurs initiales et celles de leurs dérivées premières tombent dans celles des aires* (S) *qui sont relatives aux fonctions inconnues et à leurs dérivées paramétriques premières.*

---

parce que des intégrales peuvent exister sans que ces conditions soient satisfaites. C'est ce que j'ai déjà fait voir pour les équations différentielles totales (*P*. 263).

Pour démontrer ce théorème, il suffit évidemment d'établir les deux points suivants :

1° *Les séries entières en $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, ..., construites à l'aide des formules indéfinies* $(A)_0$, $(C)_0$ *du* n° **7** *sont toutes convergentes pour des modules suffisamment petits de ces différences.*

2° *Les sommes de ces séries sont effectivement des intégrales des équations différentielles proposées* (a).

La vérification du second point ne présente aucune difficulté, le premier une fois acquis; car les formules $(A)_0$, $(B)_0$ d'où peuvent aussi être tirés les coefficients inconnus des divers termes de nos séries (**10**) expriment évidemment qu'après la substitution des sommes de celles-ci dans le système proposé (a), les deux membres de chaque équation différentielle deviennent des fonctions de $x, y, z, \ldots$, égales, elles et toutes leurs dérivées, pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, ..., c'est-à-dire des fonctions des seules variables indépendantes, identiquement égales l'une à l'autre (*P*. 73).

Nous n'avons plus à nous occuper que du premier point, c'est-à-dire de la convergence des développements des intégrales; je raisonnerai comme il suit, en rappelant d'abord certains principes particuliers sur lesquels j'aurai à m'appuyer.

I. *Soient* 1° $f(u, x, y, z, \ldots)$ *une fonction olotrope dans des aires données avec des olomètres* (*P*. 45) *supérieurs à la quantité positive* r; 2° M *une limite supérieure du module de cette fonction, tant dans ces aires que dans les espaces extérieurs contigus dont tous les points se trouvent, relativement à quelques points des aires considérées, à des distances comprises entre* r *et les olomètres correspondants* (*P*. 47, 3° *et* 65); 3° g, h *des quantités positives quelconques supérieures à* $\frac{1}{r}$; 4° p, q *des entiers positifs quelconques.*

En $u_0, x_0, y_0, z_0, \ldots$, *valeurs particulières des variables prises à volonté dans les aires en question, le module d'une dérivée d'ordre quelconque de* $f(u, x, y, z, \ldots)$ *est inférieur à la valeur (évidemment positive) que prend en* $u_0, x_0, y_0, z_0, \ldots$ *la dérivée semblable de la fonction*

$$(1)\quad M : \{[1 - g(u - u_0)]^p [1 - h(x - x_0 + y - y_0 + z - z_0 + \ldots)]^q\}.$$

Cette proposition est contenue dans celle du n° 137 de mon Ouvrage, qui est elle-même l'extension d'une autre due à Cauchy.

II. *L'équation*

$$(2) \qquad \psi^s = 1 + \tau,$$

s désignant un entier quelconque, est satisfaite identiquement par la substitution à ψ *d'une certaine fonction de* τ, $\psi_s(\tau)$, *olotrope en* $\tau = 0$, *s'y réduisant à* 1, *et y ayant un olomètre égal à* 1 (*P.* 138).

III. *En conservant aux lettres p, q les mêmes significations que ci-dessus* (I), *en supposant* $q > 1$, *et en appelant* μ, γ, η *des constantes positives quelconques, l'équation différentielle*

$$(3) \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\mu}{(1-\gamma\omega)^p(1-\eta t)^q}$$

admet pour ω *une intégrale* (3), *fonction de t, qui est olotrope et s'annule pour* $t = 0$, *et dont les dérivées y prennent toutes des valeurs positives.*

La fonction composée de t,

$$(4) \qquad \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\psi_{p+1}\left\{\frac{(p+1)\gamma}{(q-1)\eta}\mu\left[1 - \frac{1}{(1-\eta t)^{q-1}}\right]\right\},$$

où ψ_{p+1} désigne la détermination de la fonction olotrope $\psi_s(\tau)$ du lemme précédent qui correspond à $s = p + 1$, est évidemment olotrope au point $t = 0$ en vertu de la théorie des fonctions composées (*P.* 91), puisque la fonction simple

$$\frac{(p+1)\gamma}{(q-1)\eta}\mu\left[1 - \frac{1}{(1-\eta t)^{q-1}}\right]$$

est olotrope et s'annule en $t = 0$, et que la composante $\psi_{p+1}(\tau)$ est olotrope en $\tau = 0$.

Cette fonction composée, qui s'annule évidemment avec t, satisfait identiquement à l'équation (3); car, en la désignant par ω, on trouve immédiatement

$$1 - \gamma\omega = \psi_{p+1}\left\{\frac{(p+1)\gamma}{(q-1)\eta}\mu\left[1 - \frac{1}{(1-\eta t)^{q-1}}\right]\right\},$$

d'où, conformément à la définition de ψ_{p+1},

$$(1 - \gamma\omega)^{p+1} = 1 + \frac{(p+1)\gamma}{(q-1)\eta}\mu\left[1 - \frac{1}{(1-\eta t)^{q-1}}\right],$$

puis, en différentiant par rapport à t,

$$(1 - \gamma\omega)^{p}\frac{d\omega}{dt} = \frac{\mu}{(1-\eta t)^{q}},$$

relation équivalente à l'équation différentielle proposée.

Maintenant, en vertu du théorème du n° 4 appliqué à l'équation différentielle (3), la dérivée d'ordre $n+1$ de la fonction $\omega(t)$ ainsi déterminée s'exprime au moyen de t, ω, $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d^2\omega}{dt^2}$, $\cdots$, $\frac{d^n\omega}{dt^n}$ seulement; et, en vertu de la théorie des fonctions composées, cette expression est un polynôme entier en $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d^2\omega}{dt^2}$, $\cdots$, $\frac{d^n\omega}{dt^n}$, dont les coefficients sont les produits, par certains facteurs numériques, de quelques dérivées partielles du second membre de l'équation (3), où t, ω seraient considérées un instant comme deux variables indépendantes distinctes; et les termes de ce polynôme sont tous précédés du signe $+$.

Pour $t = 0$, avons-nous dit, on a $\omega = 0$, et pour $t = \omega = 0$ les dérivées partielles du second membre de (3) sont évidemment positives. Donc il est certain que $\frac{d^{n+1}\omega}{dt^{n+1}}$ est aussi positive pour $t = 0$, si $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d^2\omega}{dt^2}$, $\cdots$, $\frac{d^n\omega}{dt^n}$ le sont toutes pour cette même valeur de t, et par suite que les dérivées de $\omega(t)$ sont indéfiniment positives pour $t = 0$, comme nous voulons le constater, si la première seulement jouit de cette propriété. Or, c'est ce qui a lieu, puisque l'équation (3) donne immédiatement $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_0 = \mu$ à cause de $\omega(0) = 0$.

Cette propriété des valeurs initiales des dérivées de $\omega(t)$ se déduirait facilement encore de l'étude directe de l'expression (4), faite en tenant compte de la nature spéciale de la fonction ψ_{p+1} (II).

Pour limite inférieure de l'olomètre de $\omega(t)$ en $t=0$, on peut prendre toute quantité positive ρ telle que, pour mod. $t<\rho$, on ait

$$\text{mod.}\left\{\frac{(p+1)\gamma}{(q-1)\eta}\mu\left[1-\frac{1}{(1-\eta t)^{q-1}}\right]\right\}<1.$$

Mais il nous est inutile de pousser cette recherche jusqu'au bout.

IV. *La convergence des développements des intégrales des équations différentielles proposées* (a) *a lieu conformément à l'énoncé général ci-dessus formulé, quand ces équations sont linéaires par rapport aux dérivées paramétriques des fonctions inconnues.*

1° Pour fixer les idées, et pour ne pas obscurcir le raisonnement par les signes très compliqués qui seraient nécessaires à la notation générale du système (a), je considérerai seulement un cas particulier : il suffira amplement à montrer comment la démonstration doit se faire dans tout autre cas.

A cet effet, je prendrai un système (α) renfermant seulement deux variables indépendantes x, y et huit fonctions inconnues

$$u_{00},\ v_{00},\ u_{01},\ v_{01},\ u_{10},\ v_{10},\ u_{11},\ v_{11}.$$

Pour les deux premières de ces fonctions, x, y seront toutes deux paramétriques; pour les deux suivantes, x sera paramétrique et y principale; pour les deux suivantes, x sera principale et y paramétrique; pour les deux dernières enfin, les deux variables seront principales. Aux termes de la définition générale (2), le système immédiat (α) ne contient aucune équation différentielle ayant pour premier membre l'une ou l'autre des dérivées soit de u_{00}, soit de v_{00}; mais il s'y trouve deux équations exprimant (linéairement) $\frac{du_{01}}{dy}$, $\frac{dv_{01}}{dy}$ au moyen de

$$\frac{du_{00}}{dx},\ \frac{du_{00}}{dy},\ \frac{dv_{00}}{dx},\ \frac{dv_{00}}{dy},\ \frac{du_{01}}{dx},\ \frac{dv_{01}}{dx};$$

deux autres exprimant (de même) $\frac{du_{10}}{dx}$, $\frac{dv_{10}}{dx}$ au moyen de

$$\frac{du_{00}}{dx}, \frac{du_{00}}{dy}, \frac{dv_{00}}{dx}, \frac{dv_{00}}{dy}, \frac{du_{10}}{dy}, \frac{dv_{10}}{dy},$$

et quatre autres enfin exprimant (de même) $\frac{du_{11}}{dx}$, $\frac{du_{11}}{dy}$, $\frac{dv_{11}}{dx}$, $\frac{dv_{11}}{dy}$ au moyen de

$$\frac{du_{00}}{dx}, \frac{du_{00}}{dy}, \frac{dv_{00}}{dx}, \frac{dv_{00}}{dy}, \frac{du_{01}}{dx}, \frac{dv_{01}}{dx}, \frac{du_{10}}{dy}, \frac{dv_{10}}{dy}.$$

Dans toutes les expressions linéaires qui constituent les seconds membres de nos huit équations, les coefficients de ces huit dérivées paramétriques sont des fonctions de x, y, u_{00}, ..., v_{11} qui, en y considérant un instant ces dix quantités comme des variables indépendantes, sont olotropes dans autant d'aires données (Σ).

J'appellerai r, M deux quantités positives, la première inférieure à tous les olomètres de ces fonctions dans les dix espaces (Σ), la seconde supérieure à la fois à 1 et aux modules de toutes les valeurs que peuvent acquérir les fonctions dont il s'agit, tant dans les aires (Σ) que dans les espaces extérieurs contigus dont les points sont séparés de quelques points de ces aires par des distances supérieures à r, mais inférieures aux olomètres ci-dessus mentionnés.

Cela posé, je poursuis ma démonstration.

2° *En posant, pour abréger,*

$$\begin{aligned} M : & \left\{\left[1 - \frac{1}{r}(\Upsilon_{00} + \Phi_{00} + \Upsilon_{01} + \Phi_{01} + \Upsilon_{10} + \Phi_{10} + \Upsilon_{11} + \Phi_{11})\right]\left[1 - \frac{1}{r}(x+y)\right]\right\} \\ & = \Theta(x, y, \Upsilon_{00}, \Phi_{00}, \Upsilon_{01}, \Phi_{01}, \Upsilon_{10}, \Phi_{10}, \Upsilon_{11}, \Phi_{11}), \end{aligned}$$

le système (β), *formé par les seize équations différentielles totales qui égalent à* $9\Theta^2$ (*le nombre* 9 *représente ici le nombre total des dérivées paramétriques premières de* u_{00}, ..., v_{11} *augmenté de* 1) *les seize dérivées premières par rapport à* x *et à* y *des huit fonctions inconnues* Υ_{00}, ..., Φ_{11}, *admet un système d'intégrales qui, en* $x = y = 0$, *sont fonctions olotropes de* x, y, *s'annulent et ont des dérivées de tous ordres essentiellement positives.*

On obtient évidemment ces intégrales en faisant, dans l'équation (3),

$$\mu = 9M^2, \quad \gamma = \frac{8}{r}, \quad \eta = \frac{1}{r}, \quad p = q = 2,$$

en prenant l'intégrale $\Omega(t)$ de cette équation déterminée par la condition initiale $\Omega(0) = 0$, et en répétant huit fois la fonction $\Omega(x + y)$.

3° Étant donné un système immédiat quelconque d'équations différentielles (passif ou non), et des fonctions arbitraires des variables convenablement choisies, on peut, avons-nous dit, construire, à l'aide des formules $(A)_0$, $(B)_0$ du n° **10**, des séries entières dont les sommes coïncident avec les intégrales qui ont ces fonctions arbitraires pour déterminations initiales, quand il existe toutefois de semblables intégrales. Puis nous avons remarqué (**12**) que ces formules [au fond elles sont équivalentes aux formules $(A)_0$, $(C)_0$] donnent de plusieurs manières les valeurs initiales des dérivées complexes des fonctions inconnues.

Chaque fois que la marche du calcul amènera une nouvelle dérivée complexe, choisissons arbitrairement pour sa valeur initiale une des quantités fournies par nos formules, que ces quantités soient égales ou ne le soient pas; mais, ce choix fait une première fois, *adoptons définitivement cette valeur pour l'application des formules subséquentes au calcul des dérivées d'ordres supérieurs*. Il est clair que les séries formées de cette manière ne donneront pas en général des intégrales du système quelconque dont nous parlons en ce moment (**12**); mais, quand elles seront convergentes, nous nommerons leurs sommes des *intégrales fictives* du système en question, *satisfaisant aux conditions initiales données*.

Ces intégrales fictives sont ainsi des fonctions olotropes dont les valeurs *initiales*, à elles et à toutes leurs dérivées, sont fournies, non par la totalité des formules $(A)_0$, $(B)_0$, *mais par un groupe partiel indéfini de ces formules, qui, à lui seul, suffit exactement à la construction des intégrales véritables de mêmes déterminations initiales, quand il y en a*. Dans ce dernier cas, nos intégrales fictives deviennent évidemment des intégrales véritables.

4° Appelons $\Upsilon'_{00}, \ldots, \Phi'_{11}$ *huit nouvelles fonctions inconnues de* x, y ; Θ' *l'expression* $\Theta(x, y, \Upsilon'_{00}, \ldots, \Phi'_{11})$, *et considérons le système* *immédiat* (β') *semblable à* (β), *formé par les seize équations qui égalent*

$$\frac{d\Upsilon'_{00}}{dx},\ \frac{d\Upsilon'_{00}}{dy},\ \frac{d\Phi'_{00}}{dx},\ \frac{d\Phi'_{00}}{dy}\ \text{ à }\ \Theta'.$$

$$\frac{d\Upsilon'_{01}}{dx},\ \frac{d\Phi'_{01}}{dx}\ \text{ à }\ \Theta',\ \text{ et }\ \frac{d\Upsilon'_{01}}{dy},\ \frac{d\Phi'_{01}}{dy}\ \text{ à }\ 7\Theta'^2,$$

$$\frac{d\Upsilon'_{10}}{dx},\ \frac{d\Phi'_{10}}{dx}\ \text{ à }\ 7\Theta'^2,\ \text{ et }\ \frac{d\Upsilon'_{10}}{dy},\ \frac{d\Phi'_{10}}{dy}\ \text{ à }\ \Theta',$$

$$\frac{d\Upsilon'_{11}}{dx},\ \frac{d\Upsilon'_{11}}{dy},\ \frac{d\Phi'_{11}}{dx},\ \frac{d\Phi'_{11}}{dy}\ \text{ à }\ 9\Theta'^2$$

(*les coefficients* 7, 7, 9 *ont été pris égaux respectivement aux nombres totaux des dérivées paramétriques premières de* u_{00}, v_{00}, u_{01}, v_{01}, *de* u_{00}, v_{00}, u_{10}, v_{10}, *de* u_{00}, v_{00}, u_{01}, v_{01}, u_{10}, v_{10}, *tous augmentés de* 1).

Le système (β') *ainsi défini admet des intégrales fictives* (3°) *satisfaisant aux conditions initiales* $\Upsilon'_{00} = \ldots = \Phi'_{11} = 0$ *pour* $x = y = 0$, *dont les diverses dérivées ont des valeurs initiales toutes positives, et inférieures ou au plus égales à celles des dérivées semblables des intégrales correspondantes du système* (β) (2°).

Il résulte de l'hypothèse $M > 1$ et de la nature relative tant des fonctions Θ, Θ' que des équations (β) (β'), que, pour

$$x = y = \Upsilon'_{00} = \ldots = \Phi'_{11} = 0,$$

les dérivées partielles de tous ordres des seconds membres de (β') sont essentiellement positives et inférieures, ou égales au plus, aux valeurs prises en $x = y = \Upsilon_{00} = \ldots = \Phi_{11} = 0$ par les dérivées semblables des seconds membres des équations correspondantes dans (β).

Cela posé, le point en question devient évident, si l'on applique à la recherche successive des valeurs initiales des dérivées des intégrales $\Upsilon_{00}, \ldots, \Phi_{11}$ du système (β) celles des formules $(A)_0$ $(B)_0$ que l'on aura employées pour calculer les valeurs initiales des dérivées semblables des intégrales fictives $\Upsilon'_{00}, \ldots, \Phi'_{11}$ du système (β').

5° *Appelons* $v_{00}, \ldots, \varphi_{11}$ *huit autres fonctions inconnues, et posons* $\Theta'(x, y, v_{00}, \ldots, \varphi_{11}) = \theta$; *le système immédiat* (α'), *que forment huit équations différentielles égalant*

$$\frac{dv_{01}}{dy}\ \text{ et }\ \frac{d\varphi_{01}}{dy}$$

à

$$\theta^2 + \theta\frac{dv_{00}}{dx} + \theta\frac{dv_{00}}{dy} + \theta\frac{d\varphi_{00}}{dx} + \theta\frac{d\varphi_{00}}{dy} + \theta\frac{dv_{01}}{dx} + \theta\frac{d\varphi_{01}}{dx},$$

$$\frac{dv_{10}}{dx} \quad et \quad \frac{d\varphi_{10}}{dx}$$

à

$$\theta^2 + \theta\frac{dv_{00}}{dx} + \theta\frac{dv_{00}}{dy} + \theta\frac{d\varphi_{00}}{dx} + \theta\frac{d\varphi_{00}}{dy} + \theta\frac{dv_{10}}{dy} + \theta\frac{d\varphi_{10}}{dy},$$

$$\frac{dv_{11}}{dx}, \quad \frac{dv_{11}}{dy}, \quad \frac{d\varphi_{11}}{dx} \quad et \quad \frac{d\varphi_{11}}{dy}$$

à

$$\theta^2 + \theta\frac{dv_{00}}{dx} + \theta\frac{dv_{00}}{dy} + \theta\frac{d\varphi_{00}}{dx} + \theta\frac{d\varphi_{00}}{dy} + \theta\frac{dv_{01}}{dx} + \theta\frac{d\varphi_{01}}{dx} + \theta\frac{dv_{10}}{dy} + \theta\frac{d\varphi_{10}}{dy},$$

admet des intégrales fictives qui, elles et leurs dérivées de tous ordres, ont en $x = y = 0$, des valeurs positives inférieures ou égales aux valeurs prises en $x = y = 0$ par les dérivées semblables des intégrales de mêmes noms du système (β).

Dans les formules $(A)_0$, $(B)_0$ qui donnent les valeurs initiales des intégrales fictives du système (β'), effaçons toutes celles relatives aux dérivées complexes des fonctions Υ'_{01}, Φ'_{01} et Υ'_{10}, Φ'_{10} qui proviennent, les premières de la différentiation des équations

$$\frac{d\Upsilon'_{01}}{dx} = \Theta', \quad \frac{d\Phi'_{01}}{dx} = \Theta',$$

les dernières de celle des équations

$$\frac{d\Upsilon'_{10}}{dy} = \Theta', \quad \frac{d\Phi'_{10}}{dy} = \Theta'.$$

Les relations non effacées suffisent au calcul de certaines intégrales fictives $\Upsilon'_{00}, \ldots, \Phi'_{11}$ du système (β') s'annulant toutes pour $x = y = 0$, et, en posant

$$\begin{aligned}
\Upsilon'_{00}(x, y) &= v^0_{00}(x, y), & \Phi'_{00}(x, y) &= \varphi^0_{00}(x, y),\\
\Upsilon'_{01}(x, 0) &= v^0_{01}(x), & \Phi'_{01}(x, 0) &= \varphi^0_{01}(x),\\
\Upsilon'_{10}(0, y) &= v^0_{10}(y), & \Phi'_{10}(0, y) &= \varphi^0_{10}(y),
\end{aligned}$$

on retrouvera les mêmes fonctions $\Upsilon'_{00}, \ldots, \Phi'_{11}$ par l'intégration fictive du système (α') opérée en prenant pour conditions initiales

$$\begin{array}{llll} v_{00} = v^0_{00}(x, y), & \varphi_{00} = \varphi^0_{00}(x, y), & & \\ v_{01} = v^0_{01}(x), & \varphi_{01} = \varphi^0_{01}(x), & \text{pour} & y = 0, \\ v_{10} = v^0_{10}(y), & \varphi_{10} = \varphi^0_{10}(y) & \text{pour} & x = 0, \\ v_{11} = 0, & \varphi_{11} = 0, & \text{pour} & x = y = 0. \end{array}$$

Effectivement, si l'on adjoint aux équations (α') les huit équations (α'') qui égalent à θ les dérivées paramétriques premières de v_{00}, $\ldots, \varphi_{11}$, on formera un système, non plus immédiat il est vrai, mais équivalent au système (β') en ce sens qu'il donnera encore les intégrales fictives $\Upsilon'_{00}, \ldots, \Phi'_{11}$, par l'exécution faite parallèlement, de l'algorithme restreint à l'aide duquel nous avons tiré ces fonctions des équations (β'). Cela résulte de ce que, sauf la notation, les équations (α'') sont identiques aux équations semblablement placées dans (β') et que les équations (α') ont été déduites de celles de mêmes rangs dans (β') en substituant quelquefois à θ, second membre commun des équations (α''), tel ou tel des premiers membres de ces mêmes équations.

Ainsi, au point de vue de l'intégration fictive, l'ensemble des équations (α'), (α'') équivaut au système (β'). Mais il est évident que les conditions initiales ci-dessus posées équivalent aux équations (α''). Donc le système (α') complété par les conditions initiales dont il s'agit a bien pour intégrales fictives les fonctions $\Upsilon'_{00}, \ldots, \Phi'_{11}$.

On notera que, sauf la passivité, le système (α') est semblable au système (α) (1°), en ce sens qu'il est comme lui linéaire, que les équations sont en même nombre, et que les mêmes variables sont soit paramétriques, soit principales, pour les fonctions inconnues correspondantes. On notera également qu'en $x = y = 0$ les intégrales fictives que nous venons de lui trouver ont des olomètres au moins égaux à ceux de la fonction $\Omega(x + y)$, valeur commune des intégrales du système (β) (2°).

6° *La proposition énoncée au commencement du présent paragraphe* (IV) *est vraie pour le système* (α) *défini à l'alinéa* (1°) *si, les valeurs*

$x = y = u_{00} = \ldots = v_{11} = 0$ *tombant dans les aires* (Σ), *les conditions initiales imposées sont*

$$
\begin{array}{llll}
u_{00} = v_{00} = 0, & \textit{quels que soient} & x, y, & \\
u_{01} = v_{01} = 0, & \textit{quel que soit} & x, & \textit{pour } y = 0, \\
u_{10} = v_{10} = 0, & \textit{quel que soit} & y, & \textit{pour } x = 0, \\
u_{11} = v_{11} = 0, & & & \textit{pour } x = y = 0.
\end{array}
$$

Considérons en effet une des relations $(A)_0$, $(B)_0$ donnant la valeur initiale d'une dérivée principale d'ordre quelconque de l'une ou de l'autre des intégrales fictives $v_{00}, \ldots, \varphi_{11}$ du système (α') (5°); son second membre, qui constitue l'expression de cette dérivée, est un polynôme à termes tous positifs ayant pour facteurs quatre sortes de quantités, savoir : certains nombres entiers, les valeurs initiales (positives) de quelques dérivées partielles par rapport à x, y, $v_{00}, \ldots, \varphi_{11}$ des coefficients (θ^2 ou θ) des dérivées paramétriques entrant dans les seconds membres des équations (α'), celles de quelques dérivées paramétriques de $v_{00}, \ldots, \varphi_{11}$, celles enfin de dérivées principales d'ordres et de genres moindres de ces mêmes fonctions.

La même relation, appliquée au calcul de la valeur initiale de la dérivée principale semblable de l'intégrale hypothétique de même nom du système (α), a pour second membre un polynôme contenant exactement de la même manière les quatre sortes de quantités qui remplissent dans ce système les mêmes rôles que ceux des quantités ci-dessus énumérées dans (α') : les mêmes facteurs numériques, les valeurs initiales des mêmes dérivées partielles par rapport à x, y, $u_{00}, \ldots, v_{11}$ des coefficients des dérivées paramétriques dans les seconds membres des équations (α), celles des dérivées paramétriques semblables de $u_{00}, \ldots, v_{11}$, celles enfin des dérivées principales semblables de ces intégrales cherchées.

Or, dans les deux polynômes, les facteurs de la première sorte sont égaux ; dans le second, le module d'un facteur de la deuxième sorte est inférieur à la valeur du facteur homologue dans le premier, en vertu du lemme (I) combiné avec la définition des quantités r, M(1°) et des fonctions Θ, Θ', θ (2°) (4°) (5°); celui d'un facteur de la troisième sorte dans le second polynôme est nul par hypothèse, et par suite son module est nécessairement inférieur à la valeur (positive) du facteur homologue dans le premier.

Donc le module du second polynôme est forcément inférieur à la valeur du premier, si, pour lui, les modules des facteurs de la quatrième sorte sont aussi inférieurs aux valeurs des facteurs homologues dans le premier; ou, ce qui revient au même, la valeur initiale d'une dérivée principale quelconque des fonctions inconnues u_{00}, ..., v_{11} a un module inférieur à la valeur initiale de la dérivée semblable de la fonction de même nom dans les intégrales fictives υ_{00}, ..., φ_{11}, s'il en est ainsi pour toutes les dérivées principales d'ordres et de genres moindres.

Comme le fait en question a lieu évidemment pour le premier ordre, il est général; les coefficients des séries entières en x, y qui donnent les intégrales u_{00}, ..., v_{11} du système proposé (α) ont des modules inférieurs à ceux de mêmes rangs dans les développements de υ_{00}, ..., φ_{11}, et par suite ces séries sont toutes convergentes, dans des limites au moins aussi étendues que le développement, par la formule de Maclaurin, de la fonction olotrope $\Omega(x+y)$ (5°).

7° *La proposition ci-dessus* (6°) *est vraie pour le système* (α), *quelles que soient les conditions initiales.*

Supposons que les conditions initiales données soient :

$$\begin{array}{llll}
u_{00} = u^0_{00}(x,y), & v_{00} = v^0_{00}(x,y) & & \\
u_{01} = u^0_{01}(x) & \text{et} \quad v_{01} = v^0_{01}(x) & \text{pour } y = y_0, & \\
u_{10} = u^0_{10}(y) & \text{et} \quad v_{10} = v^0_{10}(y) & \text{pour } x = x_0, & \\
u_{11} = u^0_{11} & \text{et} \quad v_{11} = v^0_{11} & \text{pour } x = x_0 & \text{et} \quad y = y_0,
\end{array}$$

les fonctions arbitraires étant, bien entendu, toutes olotropes en x_0, y_0, et les constantes x_0, y_0, $u^0_{00}(x_0,y_0)$, $v^0_{00}(x_0,y_0)$, $u^0_{01}(x_0)$, $v^0_{01}(x_0)$, $u^0_{10}(y_0)$, $v^0_{10}(y_0)$, u^0_{11}, v^0_{11} tombant toutes dans les aires (Σ).

En appelant $'x$, $'y$ deux nouvelles variables indépendantes et $'u_{00}, \ldots, 'v_{11}$ huit nouvelles fonctions inconnues, le changement de variables

$$x = x_0 + 'x, \quad y = y_0 + 'y,$$
$$u_{00} = u^0_{00}(x_0 + 'x, y_0 + 'y) + 'u_{00}, \ldots, \quad v_{11} = v^0_{11} + 'v_{11}$$

transforme le système considéré en un autre linéaire et de même forme $('\alpha)$, qu'il suffit d'intégrer avec les conditions initiales détaillées à l'alinéa (6°) pour obtenir ensuite les intégrales du système (α) au moyen des formules de transformation ci-dessus écrites.

Or cette intégration est possible par ce qui précède (6°); effectivement, les valeurs o, o, o, ..., o des quantités $'x, 'y, 'u_{00}, \ldots, 'v_{11}$ tombent évidemment dans les limites d'olotropie des coefficients des dérivées paramétriques dans les seconds membres de $('\alpha)$, en vertu de la théorie des fonctions composées, combinée avec l'olotropie supposée des fonctions arbitraires et des coefficients des dérivés paramétriques de $u_{00}, \ldots, v_{11}$ dans les seconds membres de (α). Quant aux conditions de passivité du système $('\alpha)$, elles sont évidemment satisfaites en vertu de celles qui sont supposées avoir lieu pour (α).

V. *Tout système immédiat et passif qui n'est pas linéaire par rapport aux dérivées paramétriques des fonctions inconnues peut être ramené à un système de même nature, mais linéaire.*

Considérons, pour fixer les idées, le système non linéaire

$$(b)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{du}{dx} = \mathrm{U}_x\left(x, y, z, t, u, \dfrac{du}{dz}, \dfrac{du}{dt}\right), \\ \dfrac{du}{dy} = \mathrm{U}_y\left(x, y, z, t, u, \dfrac{du}{dz}, \dfrac{du}{dt}\right), \\ \text{———————————} \\ \text{———————————} \end{array}\right.$$

Il est évident que toute intégrale ordinaire de ces équations forme, avec les nouvelles fonctions inconnues u'_z, u'_t, un groupe d'intégrales ordinaires du système d'équations différentielles :

$$(b')\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{du}{dx} = \mathrm{U}_x(x, y, z, t, u, u'_z, u'_t), & \dfrac{du'_z}{dx} = \dfrac{d\mathrm{U}_x}{dz} + \dfrac{d\mathrm{U}_x}{du} u'_z + \dfrac{d\mathrm{U}_x}{du'_z}\dfrac{du'_z}{dz} + \dfrac{d\mathrm{U}_x}{du'_t}\dfrac{du'_t}{dz}, & \dfrac{du'_t}{dx} = \dfrac{d\mathrm{U}_x}{dt} + \ldots + \dfrac{d\mathrm{U}_x}{du'_z}\dfrac{du'_t}{dz} + \ldots, \\ \dfrac{du}{dy} = \mathrm{U}_y(x, y, z, t, u, u'_z, u'_t), & \dfrac{du'_z}{dy} = \dfrac{d\mathrm{U}_y}{dz} + \dfrac{d\mathrm{U}_y}{du} u'_z + \dfrac{d\mathrm{U}_y}{du'_z}\dfrac{du'_z}{dz} + \dfrac{d\mathrm{U}_y}{du'_t}\dfrac{du'_t}{dz}, & \dfrac{du'_t}{dy} = \dfrac{d\mathrm{U}_y}{dt} + \ldots + \dfrac{d\mathrm{U}_y}{du'_z}\dfrac{du'_t}{dz} + \ldots, \\ \dfrac{du}{dz} = u'_z, & \text{———————————} & \text{———————————} \\ \dfrac{du}{dt} = u'_t, & \dfrac{du'_z}{dt} = \dfrac{du'_t}{dz}, & \text{———————————} \end{array}\right.$$

qui se déduit du système (b) suivant une loi de formation visible.

Réciproquement, dans tout groupe d'intégrales ordinaires du système (b'), la fonction désignée par la lettre u est une intégrale ordinaire du système (b).

Or le système (b'), évidemment linéaire, est en outre immédiat (**2**), car les seconds membres des équations de la deuxième colonne ne contiennent aucune dérivée de la fonction u, dont la variable principale z est paramétrique pour u'_z ; et ceux des équations de la troisième colonne ne contiennent des dérivées ni de u, dont les variables principales z, t sont paramétriques pour u'_t, ni de u'_z, dont la variable principale t est paramétrique pour u'_t.

Quant à ses conditions de passivité, elles sont évidemment satisfaites, en vertu tant de la nature relative des équations qui composent ce système, que de la condition de passivité du système (b) jointe à quelques-unes des relations subséquentes qui assurent l'identité des diverses expressions des dérivées complexes de la fonction u [considérée dans le système (b)] au moyen des variables, de cette fonction et de ses dérivées paramétriques d'ordres égaux ou moindres.

VI. *Les développements des intégrales du système (a) convergent dans tous les cas, conformément à l'énoncé du théorème* (**15**), *ce qui achève la démonstration de cette proposition.*

Supposons, toujours pour fixer les idées, qu'il s'agisse du système (b) (V) à intégrer avec la condition initiale

$$(c) \qquad u = \upsilon(z, t) \quad \text{pour } x = x_0, \ y = y_0,$$

la fonction arbitraire $\upsilon(z, t)$ étant olotrope pour $z = z_0$, $t = t_0$, et les quantités $x_0, y_0, z_0, t_0, \upsilon(z_0, t_0), \left(\frac{d\upsilon}{dz}\right)_{z_0, t_0}, \left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)_{z_0, t_0}$ tombant, bien entendu, dans les limites d'olotropie des seconds membres U_x, U_y.

Il est évident que les fonctions

$$\upsilon'_z(z, t_0) = \frac{d\upsilon(z, t_0)}{dz}, \quad \upsilon'_t(z, t) = \frac{d\upsilon(z, t)}{dt}$$

sont olotropes en z_0, t_0 et que les quantités

$$x_0, \ y_0, \ z_0, \ t_0, \ \upsilon(z_0, t_0), \ \upsilon'_z(z_0, t_0), \ \upsilon'_t(z_0, t_0)$$

tombent dans les limites d'olotropie des coefficients des dérivées paramétriques $\frac{du'_z}{dz}$, $\frac{du'_t}{dz}$, $\frac{du'_t}{dt}$ et des termes indépendants de ces dérivées dans les seconds membres des équations (b'). Effectivement ces coefficients sont tantôt l'unité, tantôt les fonctions olotropes U_x, U_y (avec d'autres lettres pour la désignation de leurs variables), tantôt leurs dérivées premières, tantôt des expressions entières par rapport à ces dérivées et à u'_z, u'_t.

Donc le système immédiat (b'), étant passif et linéaire, admet (IV, 7°) pour intégrales des sommes de séries entières en $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, $t - t_0$, qui sont convergentes, et que l'on peut assujettir aux conditions initiales

$$\begin{aligned}
u &= v(z_0, t_0) && \text{pour } x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0,\ t = t_0,\\
u'_z &= v'_z(z, t_0) && \text{pour } x = x_0,\ y = y_0,\ \qquad\qquad t = t_0,\\
u'_t &= v'_t(z, t) && \text{pour } x = x_0,\ y = y_0.
\end{aligned}$$

Or, celle de ces intégrales qui est désignée par la lettre u satisfait au système (b), comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, et il est évident qu'elle satisfait aussi à la relation (c).

16. Aux termes du théorème de Cauchy, tel que je l'ai énoncé et démontré (*P.* 87), la grandeur des rayons de convergence du développement d'une fonction par la série de Taylor, à partir de valeurs particulières données des variables indépendantes, dépend de l'étendue des aires où elle est olotrope, ainsi que des positions qu'y occupent les valeurs particulières des variables dont il s'agit, mais nullement de la grandeur des olomètres de cette fonction en tel ou tel système de valeurs des variables situées dans ces aires.

La recherche *directe* des olomètres initiaux (rayons de convergence des développements initiaux) des intégrales ordinaires de notre système d'équations différentielles (a) n'offre donc aucun intérêt, aussi longtemps toutefois qu'on ne s'écarte pas du domaine des généralités ; il vaut mieux en général l'opérer *indirectement* par la délimitation de ces aires. Je me contenterai donc de rappeler qu'on obtiendra des limites inférieures de ces olomètres en prenant ceux d'une fonction auxiliaire analogue à la fonction Ω (n° **15**, IV, 2°), dont les éléments se déduisent facilement de ceux des seconds membres du système donné (a). Il semble moins avantageux de chercher à étendre ces limites *a priori* que d'utiliser pour cet objet les ressources spéciales propres aux cas particuliers dont on aura à s'occuper.

17. La possibilité ci-dessus établie (**15**, V) de ramener un système quelconque d'équations différentielles à la forme linéaire n'était peut-être pas inconnue. Quoi qu'il en soit, elle me paraît devoir fixer l'attention des géomètres par les ressources qu'elle peut offrir dans la théorie générale des équations aux dérivées partielles.

On remarquera effectivement que l'on ne saurait tirer des équations différentielles, d'équations finies données, sans passer par les équations différentielles *essentiellement linéaires* que la différentiation fournit tout d'abord. Ce fait autorise à penser que les équations linéaires forment une étape non moins essentielle dans la marche inverse qui conduit d'un système d'équations différentielles à leurs intégrales. Peut-être faut-il chercher dans cette direction l'extension à toutes les équations aux dérivées partielles de la méthode de Jacobi pour l'intégration des équations linéaires du premier ordre.

Intégrales exceptionnelles; intégrales singulières. Systèmes quelconques.

18. Quand le système immédiat (a) défini au n° **2** n'est pas passif, ses conditions de passivité ne sont pas toutes satisfaites *identiquement*, c'est-à-dire en y considérant comme représentant autant de variables indépendantes les unes des autres, les notations affectées aux variables, aux fonctions inconnues et à leurs dérivées paramétriques des deux premiers ordres. Mais, s'il admet quelque groupe d'intégrales ordinaires, il est clair qu'elles vérifieront *comme fonctions* les conditions de passivité non satisfaites identiquement, puisque, en y laissant aux notations leur sens primitif, ces relations ne sont au fond que de nouvelles équations différentielles résultant de la combinaison des proposées avec quelques-unes de celles qu'engendre leur différentiation.

J'ai donné aux intégrales de cette espèce le nom d'*exceptionnelles* (*P*. 263). La marche à suivre pour les découvrir est maintenant évidente : *il suffit d'adjoindre au système* (a) *celles de ses conditions de passivité qui ne sont pas satisfaites identiquement, et d'intégrer le système résultant après l'avoir ramené au premier ordre*, question dont je dirai un mot tout à l'heure.

On remarquera que les intégrales d'un système immédiat non passif ne renferment jamais des éléments d'indétermination (constantes ou fonctions arbitraires) aussi étendus que ceux d'un système passif de même nature; car elles sont assujetties, en définitive, à satisfaire à un plus grand nombre d'équations. Elles n'existeront même pas, quand ces équations complémentaires plus ou moins nombreuses seront incompatibles avec les proposées.

19. Pour obtenir les intégrales singulières (**3**) du système immédiat (a) passif ou non, *on doit*, conformément à la définition de ces intégrales, *adjoindre successivement à ce système les divers groupes de relations qu'il faut établir entre les variables, les fonctions inconnues et leurs dérivées paramétriques premières, pour faire cesser l'olotropie de quelques seconds membres par rapport à ces trois sortes de quantités considérées un instant comme autant de variables indépendantes les unes des autres*. Comme pour les intégrales exceptionnelles, l'existence des intégrales singulières n'est que fortuite, et leur recherche revient à l'intégration d'équations différentielles simultanées comprenant les proposées, *mais plus nombreuses que celles-ci*.

20. Des équations quelconques (du premier ordre) étant données, on les résoudra par rapport au plus grand nombre possible de dérivées des fonctions inconnues, de manière à obtenir un ou plusieurs systèmes immédiats dont, à l'aide des procédés ci-dessus indiqués, on cherchera successivement les intégrales ordinaires ou exceptionnelles et les intégrales singulières.

Comme cette résolution peut le plus généralement s'opérer de plusieurs manières (soit par rapport à certaines dérivées, soit par rapport à d'autres), on pourra le plus souvent aussi mettre les intégrales sous plusieurs formes différentes. Par exemple, selon que telles ou telles variables seront principales ou paramétriques pour une fonction inconnue déterminée, la fonction arbitraire correspondant à cette intégrale dépendra de telles ou telles variables.

Quant au calcul des intégrales exceptionnelles et singulières, il ne présente aucun cercle vicieux, bien que le contraire semble peut-être avoir lieu. Effectivement, il exige toujours l'adjonction de *nouvelles* équations à celles que l'on traite; or cette opération conduit nécessairement, en fin de compte, soit à des systèmes passifs dépourvus d'intégrales singulières dont les intégrales ordinaires résolvent le problème, soit à des équations incompatibles qui répondent négativement à la question, dans la phase où elle est arrivée.

21. Comme je l'ai fait voir déjà pour les équations simultanées pures (*P.* Chap. X), la théorie d'un système d'équations *mixte*, c'est-à-dire contenant à la fois des équations différentielles et des équations finies, se ramène immédiatement à celle d'un système d'équations *toutes différentielles*. Il suffit pour cela de substituer à chaque équation finie l'ensemble des équations différentielles que donne sa différentiation première répétée successivement par rapport à chacune des variables indépendantes de la question. Les intégrales du système résultant (qui est purement différentiel) sont les solutions du système proposé, pourvu qu'on ne leur ait assigné que des valeurs initiales propres à satisfaire aux équations finies, conjointement avec les valeurs initiales des variables indépendantes.