# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE


CAMILLE JORDAN

**Sur les covariants des formes binaires. - Deuxième mémoire**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série*, tome 5 (1879), p. 345-378.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1879_3_5__345_0>

# *Sur les covariants des formes binaires*

(DEUXIÈME MÉMOIRE);

PAR M. CAMILLE JORDAN.

---

Tous les géomètres connaissent les beaux Mémoires dans lesquels M. Gordan a démontré qu'un système de formes binaires ne possède qu'un nombre limité de covariants indépendants.

La détermination effective de cette limite constitue néanmoins un problème assez difficile. Nous avons donné, dans un précédent Mémoire (*Journal de Liouville*, 1876), une formule récurrente qui fournit une première solution de cette question. Mais la limite déduite de cette formule est beaucoup trop élevée; sa détermination exige d'ailleurs un calcul assez laborieux.

En serrant le problème de plus près, nous avons obtenu une nouvelle solution, fondée sur les mêmes principes que la précédente, mais beaucoup moins imparfaite. Nous arrivons en effet, entre autres résultats, à la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Soient $a$, $b$, $c$,... un système de formes binaires en nombre quelconque, dont les ordres respectifs ne surpassent pas* N. *Tout covariant de ce système sera une fonction linéaire de produits* RST *ainsi définis.*

R *est un covariant dont l'ordre* Ō *et le degré* D *par rapport aux coef-*

*ficients sont limités par les inégalités suivantes :*

$$O < 2N^2,$$
$$D < (9N^2 - O)3^{\rho+1},$$

*où* $\rho$ *est le plus grand entier satisfaisant à l'inégalité* $\rho - 1 \overline{\gtrless} \dfrac{\log \frac{N}{4}}{\log \frac{4}{3}}$.

S *est un produit de covariants dont l'ordre ne surpasse pas* $2N - 2$ *et dont le degré ne surpasse pas* $2.3^{\rho+1}$.

T *est un produit d'invariants dont le degré est inférieur à* $(7N - 5)3^{\rho+1}$.

## *Analyse.*

### § I.

1. Soient $a, b, c, \ldots f, g, \ldots$ des formes binaires, en nombre quelconque, mais dont l'ordre ne surpasse pas N; proposons-nous de déterminer les covariants de ce système.

Nous répartirons les formes données en deux espèces. La première contiendra les formes $a, b, c, \ldots$, dont l'ordre surpasse le plus grand nombre entier $N_1$ contenu dans $\frac{3}{4}N$; la seconde, les formes $f, g, \ldots$, dont l'ordre $\overline{\gtrless} N_1$.

Soient $a, b, c, \ldots$ les formes de première espèce; $p, q, r, \ldots$ leurs ordres respectifs; construisons les covariants à deux symboles tels que

$$(ab)^\mu a_x^{p-\mu} b_x^{q-\mu},$$

et les covariants à trois symboles tels que

$$(ab)^\gamma (ca)^\beta (bc)^\alpha a_x^{p-\beta-\gamma} b_x^{q-\alpha-\gamma} c_x^{r-\alpha-\beta}.$$

Soient $\varphi, \varphi_1, \ldots$ ceux de ces covariants dont l'ordre $p + q - 2\mu$ ou $p + q + r - 2\alpha - 2\beta - 2\gamma$ ne surpasse pas $N_1$. Nous adjoindrons ces nouvelles formes aux formes $f, g, \ldots$.

Soient maintenant $a', b', c', \ldots$ celles des formes $f, g, \ldots, \varphi, \varphi_1$ dont l'ordre surpasse le plus grand entier $N_2$ contenu dans $\frac{3}{4}N_1$; $f', g', \ldots$ les autres.

Soient $\varphi'$, $\varphi'_1, \ldots$ ceux des covariants à deux ou trois symboles construits avec les formes $a'$, $b'$, $c', \ldots$, dont l'ordre ne surpasse pas $N_2$. Nous adjoindrons ces covariants aux formes $f'$, $g', \ldots$.

Soient de même $a''$, $b''$, $c'', \ldots$ celles des formes $f'$, $g', \ldots$, $\varphi'$, $\varphi'_1, \ldots$, dont l'ordre surpasse le plus grand entier $N_3$ contenu dans $\frac{3}{4} N_2$; $f''$, $g'', \ldots$ les autres. Soient $\varphi''$, $\varphi''_1, \ldots$ ceux des covariants à deux ou trois symboles construits avec $a''$, $b''$, $c'', \ldots$, dont l'ordre ne surpasse pas $N_3$. Nous les adjoindrons aux formes $f''$, $g''$; ... et ainsi de suite.

**2.** Ayant ainsi adjoint au système des formes données $a, b, c, \ldots$, $f, g, \ldots$ les formes auxiliaires $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi', \varphi'_1, \ldots$, cherchons à construire les covariants du système ainsi complété.

Chacun de ces covariants sera une fonction linéaire de produits symboliques formés avec les symboles des formes $a, b, c, \ldots, f, g, \ldots$, $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi', \varphi'_1, \ldots$. Ces produits pourront être classés d'après le nombre des symboles qu'ils contiennent, en commençant par ceux qui en contiennent le moins. Tout produit exprimable linéairement à l'aide d'autres produits d'une classe inférieure pourra évidemment être négligé comme formant double emploi avec les précédents.

Ce cas se présentera pour tout produit P contenant en facteur $(ab)^\mu$, $a$ et $b$ désignant des formes de première espèce dont les ordres $p$ et $q$ satisfassent à l'inégalité

$$p + q - 2\mu \overline{\gtrless} N_1.$$

On sait, en effet, que P peut s'exprimer linéairement à l'aide des *composés* [*] de covariants

$$(1) \qquad (ab)^{\mu'} a_x^{p-\mu'} b_x^{q-\mu'} \quad (\text{où } \mu' \overline{\gtrless} \mu),$$

avec des produits formés avec les autres symboles $c, d, \ldots$ qui figurent dans P. On a d'ailleurs

$$p + q - 2\mu' \overline{\gtrless} p + q - 2\mu \overline{\gtrless} N_1.$$

[*] *Uberschiebungen* de M. Gordan. Cette proposition, ainsi que les autres propriétés relatives à la composition des covariants, dont nous aurons à faire un fréquent usage, se trouvent exposées en détail dans la *Théorie des formes binaires* de M. Clebsch. Nous les avons reproduites dans notre Mémoire de 1876, Sections I à IV.

Chacun des covariants (1) est donc une des formes auxiliaires $\varphi, \varphi_1, \ldots$. Chacun des composés au moyen desquels P est exprimé est donc exprimable par les symboles $c, d, \ldots$ joints à un des symboles $\varphi, \varphi_1, \ldots$, lequel remplace les deux symboles $a, b$ qui figuraient dans P. Sa classe sera donc inférieure à celle de P.

On verra de même que tout produit P qui contient en facteur $(ab)^\gamma (ca)^\beta (bc)^\gamma$, où $a, b, c$ sont des formes de première espèce, dont les ordres $p, q, r$ satisfassent à la relation

$$p + q + r - 2\alpha - 2\beta - 2\gamma \overline{\gtrless} N_1,$$

est exprimable par des covariants de classe inférieure, contenant chacun à la place des trois symboles $a, b, c$ un symbole de l'une des formes $\varphi, \varphi_1, \ldots$.

**3.** Considérons un produit P qui ne soit pas exprimable par des produits de classe inférieure. Parmi les symboles qu'il contient, les uns, $a, b, c, \ldots$ représenteront en général des formes de première espèce; les autres, $f, g, \ldots, \varphi, \ldots$, des formes de seconde espèce; et l'on sait que P peut s'exprimer linéairement au moyen des composés de produits Q formés avec les symboles $a, b, c, \ldots$, avec des produits R formés avec les symboles $f, g, \ldots, \varphi, \ldots$.

La formation des produits R est une question analogue à la question primitive, sauf que les formes qui y figurent ont pour limite supérieure de leur ordre, au lieu de N, le nombre $N_1$, qui lui est inférieur. Le problème étant ainsi simplifié de ce côté, il conviendra de reporter notre attention sur les produits Q.

En formant ces produits Q, nous pourrons négliger tous ceux qui sont linéairement exprimables à l'aide de produits $Q_1, Q_2, \ldots$ de classe moindre. Soit, en effet, $Q = m_1 Q_1 + m_2 Q_2 + \ldots$ un semblable produit. Tout composé de Q avec un produit R s'exprimera linéairement au moyen des composés de $Q_1, Q_2, \ldots$ avec R, lesquels sont évidemment de classe moindre que le composé de Q.

**4.** Soit $Q = (ab)^\mu (ca)^\nu \ldots$ l'un des produits qui restent à considérer, et soit $\mu$ le plus grand des exposants $\mu, \nu, \ldots$ qui y affectent des déterminants. On dira que Q est de la $\mu^{\text{ième}}$ catégorie.

Ce nombre $\mu$ est nécessairement $< \frac{5}{8}\mathrm{N}$; sinon, Q serait négligeable; car, $p$ et $q$ étant $\leqq \mathrm{N}$, on aurait

$$p + q - 2\mu \leqq \tfrac{3}{4}\mathrm{N} \leqq \mathrm{N}_1.$$

Nous considérerons les produits Q comme d'autant plus simples que leur catégorie est plus élevée.

Un produit de la $\mu^{\text{ième}}$ catégorie sera dit *réductible*, s'il est linéairement exprimable par des covariants dont chacun soit ou négligeable ou d'une catégorie supérieure à $\mu$. Il est clair que tout produit réductible pourra être supprimé de la série des produits Q, comme formant double emploi.

Ces préliminaires posés, étudions les produits Q.

## § II.

5. Nous aurons en premier lieu les produits à deux symboles, tels que

$$(ab)^\mu a_x^{p-\mu} b_x^{q-\mu} \quad (\text{où } p + q - 2\mu > \mathrm{N}_1).$$

Nous les désignerons par la notation $\mathrm{K}_\mu^{ab}$, ou plus simplement $\mathrm{K}_\mu$, lorsqu'il ne sera pas nécessaire de spécifier les symboles qui y figurent.

6. Les produits à trois symboles seront de la forme

$$(2) \qquad (ab)^\gamma (ca)^\beta (bc)^\alpha a_x^{p-\beta-\gamma} b_x^{q-\alpha-\gamma} c_x^{r-\alpha-\beta}.$$

D'ailleurs l'identité

$$(3) \qquad (ab)c_x + (bc)a_x + (ca)b_x = 0$$

permettra d'établir un certain nombre de relations entre ceux de ces covariants qui correspondent à une même valeur de la somme

$$\alpha + \beta + \gamma = n.$$

Divers cas seront à distinguer suivant la grandeur de $n$.

7. *Premier cas.* — Supposons d'abord que chacun des entiers $p, q, r$ soit au moins égal à $n$. L'expression (2) sera divisible par $[(ca)b_x)]^\beta$.

Remplaçant ce facteur par la quantité équivalente

$$[-(ab)c_x - (bc)a_x]^\beta,$$

et développant celle-ci par la formule du binôme, on aura l'expression du produit donné en fonction linéaire des produits analogues qui ne contiennent plus le facteur $(ca)$.

Si nous posons, pour abréger,

$$(ab)^{n-\rho}(bc)^\rho a_x^{p-n+\rho} b_x^{q-n} c_x^{r-\rho} = C_{abc}^\rho,$$

ces derniers covariants seront les suivants : $C_{abc}^0, C_{abc}^1, \ldots, C_{abc}^n$. Leur nombre est $n+1$; enfin il est évident que l'identité (3) ne fournit entre eux aucune relation. Ils sont donc indépendants.

On verrait de même qu'en posant

$$(bc)^{n-\rho}(ca)^\rho b_x^{q-n+\rho} c_x^{r-n} a_x^{p-\rho} = C_{bca}^\rho,$$
$$(ca)^{n-\rho}(ab)^\rho c_x^{r-n+\rho} a_x^{p-n} b_x^{q-\rho} = C_{cab}^\rho,$$

les covariants considérés pourront s'exprimer à volonté au moyen des $n+1$ covariants $C_{bca}^0, \ldots, C_{bca}^n$ ou au moyen des $n+1$ covariants $C_{cab}^0, \ldots, C_{cab}^n$.

Mais on peut choisir d'une manière plus avantageuse le système des $n+1$ covariants indépendants à l'aide desquels on se propose d'exprimer tous les autres.

En effet, si dans $C_{cab}^\rho$ on remplace, comme il vient d'être expliqué, le produit $[(ca)b_x]^{n-\rho}$ par sa valeur déduite de l'identité (3), il viendra

$$(4)\quad (-1)^{n-\rho} C_{cab}^\rho = C_{abc}^0 + (n-\rho)C_{abc}^1 + \ldots + \frac{(n-\rho)\ldots(n-\rho-i+1)}{1.2\ldots i} C_{abc}^i + \ldots.$$

Posant successivement $\rho = 0, 1, \ldots, l$, $l$ étant un entier quelconque $\overline{\leq} n$, on obtiendra $l+1$ équations qui permettront de déterminer $l+1$ des quantités $C_{abc}^i$, par exemple $C_{abc}^{k+1}, \ldots C_{abc}^{l+k+1}$ en fonction des autres et des quantités $C_{cab}^0, \ldots, C_{cab}^l$. Il faut pour cela que le déterminant de ces équations ne soit pas nul. Mais on peut vérifier aisément qu'il en est ainsi. (*Voir* notre Mémoire de 1876, nos 38 et 39.)

On a d'autre part

$$(5) \qquad C^{\rho}_{abc} = [-(ca)b_x - (bc)a_x]^{n-\rho}(bc)^{\rho} a_x^{p-n-\rho} b_x^{q-n} c_x^{r-n}$$

et, développant par la formule du binôme, on obtiendra l'expression de $C^{\rho}_{abc}$ en fonction linéaire de $C^0_{bca}, \ldots, C^{n-\rho}_{bca}$.

Faisant successivement $\rho = l + k + 2, \ldots, n$ et posant, pour abréger, $n - l - k - 2 = m$, on aura, par la formule (5), $C^{l+k+2}_{abc}, \ldots, C^n_{abc}$ exprimés en fonction de $C^0_{bca}, \ldots, C^m_{bca}$.

Donc $C^0_{abc}, \ldots, C^n_{abc}$ pourront être exprimés en fonction des nouveaux covariants indépendants

$$C^0_{abc}, \ldots, C^k_{abc}; \quad C^0_{cab}, \ldots, C^l_{cab}; \quad C^0_{bca}, \ldots, C^m_{bca},$$

$k$, $l$, $m$ étant trois entiers quelconques non négatifs et ayant pour somme $n - 2$.

On pourra en particulier choisir ces entiers de telle sorte qu'aucun d'eux ne surpasse $\frac{n}{3}$. En effet, si $n$ est de la forme $3i + 2$, il suffira de poser $k = l = m = i$. Si $n = 3i + 1$, on posera $k = l = i$, $m = i - 1$. Si $n = 3i$, on posera $k = i$, $l = m = i - 1$.

Les nombres $k, l, m$ étant ainsi choisis, chacun des covariants $C^0_{abc}, \ldots, C^m_{bca}$ sera d'une catégorie au moins égale à $\frac{2n}{3}$; car chacun d'eux contient en facteur une des expressions

$$(ab)^{n-k}, (ca)^{n-l}, (bc)^{n-m}.$$

**8.** *Deuxième cas.* — Supposons encore $p \geqq n$, $q \geqq n$, mais $r < n$. Posons $n - r = \lambda$. L'exposant de $c_x$ dans l'expression (2) ne pouvant être négatif, on aura $r \geqq \alpha + \beta$; d'ailleurs $n = \alpha + \beta + \gamma$; d'où $\gamma \geqq \lambda$.

Les covariants à étudier contiennent donc tous en facteur l'expression $(ab)^{\lambda}$; et, pour obtenir les relations qui existent entre eux, il suffira de transformer au moyen de l'identité (3) le facteur complémentaire

$$(6) \qquad (ab)^{\gamma-\lambda}(ca)^{\beta}(bc)^{\alpha} a_x^{p-\beta-\gamma} b_x^{q-\gamma-\alpha} c_x^{r-\beta-\alpha},$$

auquel on pourra d'ailleurs appliquer la méthode du cas précédent.

Car la somme $n'$ des exposants des déterminants y est égale à $n-\lambda$; d'autre part, les degrés respectifs $p'$, $q'$, $r'$ de cette expression par rapport à chacun des symboles $a$, $b$, $c$ sont $p-\lambda$, $q-\lambda$, $r$. Ayant

$$n = r+\lambda \leqq p \leqq q,$$

on aura

$$n' = r' \leqq p' \leqq q'.$$

Les divers produits de la forme (6) sont donc exprimables en fonction linéaire de $n'+1$ d'entre eux, dont chacun sera divisible par l'un des trois facteurs $(ab)^{n'-k}$, $(ca)^{n'-l}$, $(bc)^{n'-m}$, si $k$, $l$, $m$ sont des entiers non négatifs, ayant pour somme $n'-2$ et d'ailleurs arbitraires. Remplaçant $n'$ par sa valeur $n-\lambda$ et rétablissant le facteur $(ab)^{\lambda}$, on voit que les covariants à étudier s'expriment par des produits symboliques tous divisibles par l'un des trois facteurs $(ab)^{n-k}$, $(ca)^{n-\lambda-l}$, $(bc)^{n-\lambda-m}$, $k$, $l$, $m$ étant des entiers non négatifs choisis de manière à satisfaire à la relation

$$k+l+m = n-\lambda-2. \tag{7}$$

On remarquera d'ailleurs que $n-\lambda-2$ ne peut être négatif. En effet, on a

$$p \leqq \mathrm{N}, \quad n-\lambda = r > \mathrm{N}_1 > \frac{3}{4}\mathrm{N}.$$

D'autre part,

$$r < n < p \leqq p-1;$$

donc

$$\frac{3}{4}\mathrm{N} < \mathrm{N}-1,$$

d'où

$$\mathrm{N} > 4, \quad n-\lambda > 3.$$

On pourra donc satisfaire à la relation (7) par un système de valeurs non négatives de $k$, $l$, $m$ qui ne surpassent pas $\frac{n-\lambda}{3}$.

Ces entiers ayant été ainsi choisis, les produits divisibles par $(ca)^{n-\lambda-l}$ seront négligeables. Il suffit pour le montrer de prouver que l'on a

$$p+r-2(n-\lambda-l) \leqq \mathrm{N}_1.$$

Mais on a

$$n-\lambda-l \overline{\overline{>}} \frac{2}{3}(n-\lambda) \overline{\overline{>}} \frac{2}{3} r, \quad p \overline{\overline{<}} \mathrm{N}, \quad r>\frac{3}{4} \mathrm{N},$$

d'où

$$p+r-2(n-\lambda-l) \overline{\overline{<}} p-\frac{1}{3} r<\frac{3}{4} \mathrm{N} \overline{\overline{<}} \mathrm{N}_1.$$

Les produits divisibles par $(bc)^{n-\lambda-m}$ seront également négligeables.

Enfin, les produits divisibles par $(ab)^{n-k}$ seront de la forme

$$(ab)^\rho (ca)^\sigma (bc)^\tau a_x^{p-\rho-\sigma} b_x^{q-\rho-\tau} c_x^{r-\sigma-\tau},$$

où

$$\rho \overline{\overline{>}} n-k, \quad \rho+\sigma+\tau=n.$$

D'ailleurs, $q$ étant $>n$, cette expression contiendra le facteur $[(ca) b_x]^\sigma$. En le remplaçant par la quantité équivalente $[-(ab) c_x-(bc) a_x]^\sigma$ et développant, on obtiendra l'expression des produits dont il s'agit, en fonction linéaire de produits de la forme

$$(ab)^\mu (bc)^\nu a_x^{p-\mu} b_x^{q-\mu-\nu} c_x^{r-\nu},$$

où

$$\mu \overline{\overline{>}} \rho \overline{\overline{>}} \tfrac{2}{3} n, \quad \mu+\nu=n.$$

**9.** *Troisième cas.* — Soit maintenant $p \overline{\overline{>}} n$, mais $q<n$, $r<n$. Posons $n-r=\lambda$, $n-q=\mu$. On aura, comme dans le cas précédent, $\gamma \overline{\overline{>}} \lambda$, et de même $\beta \overline{\overline{>}} \mu$.

Les covariants à étudier contiennent donc tous le facteur $(ab)^\lambda (ca)^\mu$; et les relations qui les lient résulteront de la transformation du facteur complémentaire

$$(ab)^{\gamma-\lambda} (ca)^{\beta-\mu} (bc)^\alpha a_x^{p-\beta-\gamma} b_x^{q-\gamma-\alpha} c_x^{r-\beta-\alpha},$$

où la somme $n'$ des exposants des déterminants est égale à $n-\lambda-\mu$, tandis que les degrés $p'$, $q'$, $r'$ par rapport à $a$, $b$, $c$ sont respectivement $p-\lambda-\mu$, $q-\lambda$, $r-\mu$, quantités au moins égales à $n'$. Traitant donc ce facteur d'après la méthode du premier cas, on l'exprimera linéairement par des produits symboliques tous divisibles par l'un des facteurs $(ab)^{n'-k}$, $(ac)^{n'-l}$, $(bc)^{n'-m}$, où

$$k+l+m=n'-2=n-\lambda-\mu-2. \tag{8}$$

Remplaçant $n'$ par $n-\lambda-\mu$ et rétablissant le facteur $(ab)^{\lambda}(ca)^{\mu}$, on aura l'expression des covariants à étudier par des produits symboliques contenant en facteur

$$(ab)^{n-\mu-k},\quad (ca)^{n-\lambda-l},\quad \text{ou}\quad (bc)^{n-\lambda-\mu-m}.$$

D'ailleurs $n-\lambda-\mu-2$ ne peut être négatif. On a en effet

$$n-\lambda=r>\tfrac{3}{4}\mathrm{N},\quad n-\mu=q>\tfrac{3}{4}\mathrm{N}.\quad n\leqq p\leqq \mathrm{N},$$

d'où

$$n-\lambda-\mu>\tfrac{1}{2}\mathrm{N}>2,$$

car on a $\mathrm{N}>4$ (*voir* la discussion du deuxième cas).

Désignons, suivant l'usage, par $\mathrm{E}(x)$ le plus grand entier contenu dans $x$.

Si l'on a

$$\mathrm{E}\left(\frac{n-\mu}{3}\right)+\mathrm{E}\left(\frac{n-\lambda}{3}\right)<n-\lambda-\mu-2,$$

on pourra satisfaire à l'équation (8) en posant

$$k=\mathrm{E}\left(\frac{n-\mu}{3}\right),\quad l=\mathrm{E}\left(\frac{n-\lambda}{3}\right),$$

$$m=n-\lambda-\mu-2-\mathrm{E}\left(\frac{n-\mu}{3}\right)-\mathrm{E}\left(\frac{n-\lambda}{3}\right)$$
$$<n-\lambda-\mu-\frac{n-\mu}{3}-\frac{n-\lambda}{3}<\frac{n-2\lambda-2\mu}{3}.$$

Dans le cas contraire, on pourra y satisfaire en posant $m=0$, et donnant à $k$ et $l$ des valeurs respectivement non supérieures à $\mathrm{E}\left(\frac{n-\mu}{3}\right)$ et $\mathrm{E}\left(\frac{n-\lambda}{3}\right)$.

Si $k$, $l$, $m$ sont ainsi déterminés, tous les produits symboliques auxquels nous avons ramené nos covariants seront négligeables.

En effet, on aura

$$p+q-2(n-\mu-k)\leqq \mathrm{N}+n-\mu-2\left[n-\mu-\tfrac{1}{3}(n-\mu)\right]$$
$$\leqq \mathrm{N}-\tfrac{1}{3}q\leqq \mathrm{N}-\tfrac{1}{4}\mathrm{N}\leqq\tfrac{3}{4}\mathrm{N}\leqq \mathrm{N}_1.$$

Donc les covariants divisibles par $(ab)^{n-\mu-k}$ seront négligeables.

De même pour ceux qui sont divisibles par $(ca)^{n-\lambda-l}$.

Enfin ceux qui sont divisibles par $(bc)^{n-\lambda-\mu-m}$ seront négligeables, si la quantité $q+r-2(n-\lambda-\mu-m)=\lambda+\mu+2m$ est $\leqq\frac{3}{4}\mathrm{N}$.

Mais, si $m<\frac{n-2\lambda-2\mu}{3}$, on aura

$$\lambda+\mu+2m<\frac{2n-\lambda-\mu}{3}<\frac{2}{3}n<\frac{2}{3}\mathrm{N},$$

et si $m=0$ on aura

$$q=n-\mu\geqq\frac{3}{4}\mathrm{N},\quad r=n-\lambda\geqq\frac{3}{4}\mathrm{N},\quad n\leqq\mathrm{N},$$

d'où

$$\lambda+\mu+2m=\lambda+\mu\leqq\frac{1}{2}\mathrm{N}.$$

**10.** *Quatrième cas.* — Supposons enfin $p$, $q$, $r$ tous inférieurs à $n$ ; faisant $r=n-\lambda$, $q=n-\mu$, $p=n-\nu$, on aura

$$\gamma\geqq\lambda,\quad \beta\geqq\mu,\quad \alpha\geqq\nu.$$

Les covariants à étudier contiendront tous en facteur $(ab)^{\lambda}(ca)^{\mu}(bc)^{\nu}$. Le facteur complémentaire pourra être traité par la méthode du premier cas. On trouvera ainsi que les covariants cherchés s'expriment en fonction de produits symboliques, contenant en facteur une des expressions

$$(ab)^{n-\mu-\nu-k},\quad (ca)^{n-\lambda\ \nu-l},\quad (bc)^{n-\lambda-\mu-m},$$

si $k$, $l$, $m$ sont des entiers non négatifs satisfaisant à la relation

$$(9)\qquad k+l+m=n-\lambda-\mu-\nu-2.$$

Le second membre de cette relation sera d'ailleurs $>0$, si le covariant donné n'est pas immédiatement négligeable. En effet, on doit avoir

$$p+q+r-2n>\frac{3}{4}\mathrm{N},$$

ou

$$(10)\qquad n-\lambda-\mu-\nu>\frac{3}{4}\mathrm{N}.$$

Mais on a

$$n-\lambda=r\leqq\mathrm{N},\quad \mu\geqq1,\quad \nu\geqq1;$$

et par suite

$$N - 2 > \tfrac{3}{4}N, \quad N > 8,$$
$$n - \lambda - \mu - \nu > \tfrac{3}{4}N > 6.$$

De la relation (10) on déduit encore

$$N - \mu - \nu > \tfrac{3}{4}N, \quad N - \lambda - \mu > \tfrac{3}{4}N,$$

d'où

$$\mu + \nu < \tfrac{1}{4}N, \quad \lambda + \mu < \tfrac{1}{4}N,$$

et enfin, si nous supposons $\nu \overline{\overline{<}} \mu$, ce qui est permis, on aura

$$\nu < \tfrac{1}{8}N, \quad n = p + \nu < \tfrac{9}{8}N.$$

Cela posé, les produits symboliques divisibles par $(ab)^{n-\mu-\nu-k}$ seront négligeables si l'on a

$$p + q - 2(n - \mu - \nu - k) \overline{\overline{<}} \tfrac{3}{4}N,$$

ou

(11) $$\mu + \nu + 2k \overline{\overline{<}} \tfrac{3}{4}N.$$

Les autres produits symboliques le seront également si l'on a

(12) $$\lambda + \nu + 2l \overline{\overline{<}} \tfrac{3}{4}N,$$

(13) $$\lambda + \mu + 2m \overline{\overline{<}} \tfrac{3}{4}N.$$

Or on peut déterminer $k$, $l$, $m$ de manière à satisfaire à la fois à ces inégalités et à l'équation (9).

En effet, si la quantité

$$\delta = n - \lambda - \mu - \nu - 2 - \mathrm{E}\left(\frac{3}{8}N - \frac{\mu+\nu}{2}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{3}{8}N - \frac{\lambda+\nu}{2}\right)$$

est positive, on pourra poser

$$k = \mathrm{E}\left(\frac{3}{8}N - \frac{\mu+\nu}{2}\right), \quad l = \mathrm{E}\left(\frac{3}{8}N - \frac{\lambda+\nu}{2}\right), \quad m = \delta.$$

Dans le cas contraire, on pourra poser

$$k \overline{\overline{<}} \mathrm{E}\left(\frac{3}{8}N - \frac{\mu+\nu}{2}\right), \quad l \overline{\overline{<}} \mathrm{E}\left(\frac{3}{8}N - \frac{\lambda+\nu}{2}\right), \quad m = 0.$$

Ce système de valeurs satisfait évidemment aux inégalités (11) et (12). La relation (13) sera également satisfaite.

En effet, soit $m = \delta$ : on aura

$$m \leqq n - \lambda - \mu - \nu - \left(\frac{3}{8}\mathrm{N} - \frac{\mu+\nu}{2}\right) - \left(\frac{3}{8}\mathrm{N} - \frac{\lambda+\nu}{2}\right) < \frac{3}{8}\mathrm{N} - \frac{\lambda+\mu}{2},$$

d'où

$$\lambda + \mu + 2m < \tfrac{3}{4}\mathrm{N}.$$

D'autre part, si $m = 0$, on aura

$$\lambda + \mu + 2m = \lambda + \mu < \tfrac{1}{4}\mathrm{N}.$$

**11.** Nous obtenons donc comme résultat de cette discussion le théorème suivant.

Théorème. — *Les produits à trois symboles tels que*

$$(ab)^\gamma (ca)^\beta (bc)^\alpha a_x^{p-\beta-\gamma} b_x^{q-\alpha-\gamma} c_x^{r-\alpha-\gamma},$$

*où* $\alpha + \beta + \gamma = n$ *s'expriment linéairement :*

1° *Par des termes négligeables si deux au moins des entiers* $p, q, r$ *sont inférieurs à* $n$;

2° *Par des termes négligeables et des produits de la forme*

$$(ab)^\mu (bc)^\nu a_x^{p-\mu} b_x^{q-n} c_x^{r-\nu}, \tag{14}$$

*où*

$$\mu + \nu = n, \quad \mu \geqq \frac{2n}{3} \geqq 2\nu,$$

*si* $p \geqq q \geqq n > r$;

3° *Par des termes négligeables et des termes de la forme* (14) *et des formes analogues*

$$(ca)^\mu (ab)^\nu c_x^{r-\mu} a_x^{p-n} b_x^{q-\nu},$$
$$(bc)^\mu (ca)^\nu b_x^{q-\mu} c_x^{r-n} a_x^{p-\nu},$$

*où*

$$\mu + \nu = n, \quad \mu \geqq \frac{2n}{3} \geqq 2\nu,$$

*si* $p, q, r$ *sont tous* $> n$.

**12.** Corollaire. — *Tout produit symbolique* P *de catégorie* $\gamma$ *sera réductible, s'il est divisible par* $(ab)^\gamma (ca)^\beta (bc)^\alpha$, $\alpha + \beta$ *étant* $> \frac{1}{2}\gamma$.

On sait, en effet, que P s'exprime au moyen des composés de produits symboliques

$$Q = (ab)^{\gamma'}(ca)^{\beta'}(bc)^{\alpha'} a_x^{p-\beta'-\gamma'} b_x^{q-\alpha'-\gamma'} c_x^{r-\alpha'-\beta'},$$

où $\alpha' \overset{=}{>} \alpha$, $\beta' \overset{=}{>} \beta$, $\gamma' \overset{=}{>} \gamma$, avec des produits R contenant les autres symboles $d$, $e$, ... qui figurent dans P.

Or les covariants Q s'expriment à l'aide de termes négligeables et de termes de catégorie $\overset{=}{>} \frac{2}{3}(\alpha' + \beta' + \gamma') \overset{=}{>} \frac{2}{3}(\alpha + \beta + \gamma) > \gamma$. Ces termes, composés avec les produits Q, donneront des termes négligeables ou de catégorie $> \gamma$.

**13.** Théorème. — *Un produit* P *à quatre symboles, tel que*

$$(ab)^{\gamma}(ca)^{\beta}(bc)^{\alpha}(ad)^{\delta}(bd)^{\varepsilon}(cd)^{\zeta} a_x^{p-\gamma-\beta-\delta} b_x^{q-\gamma-\alpha-\varepsilon} c_x^{r-\beta-\alpha-\zeta} d_x^{s-\delta-\varepsilon-\zeta},$$

*sera réductible si le plus grand* $\gamma$ *des exposants* $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ *est moindre que la somme des cinq autres.*

Si $\delta + \varepsilon + \zeta = 0$, l'inégalité admise $\gamma < \alpha + \beta + \delta + \varepsilon + \zeta$ deviendra $\gamma < \alpha + \beta$, et P sera réductible (12).

Il en est évidemment de même si $\beta + \alpha + \zeta = 0$.

Enfin la proposition est évidente si $\gamma \overset{=}{>} \frac{5}{8}\mathrm{N}$, car on aura dans ce cas

$$p + q - 2\gamma \overset{=}{<} \tfrac{3}{4}\mathrm{N},$$

et P sera négligeable.

Cela posé, nous allons établir que, si la proposition est vraie pour les produits de catégorie $< \gamma$, et pour ceux de catégorie $\gamma$ où l'un des nombres $\delta + \varepsilon + \zeta$, $\beta + \alpha + \zeta$ est inférieur à $\lambda$, elle sera encore vraie pour un produit P de catégorie $\gamma$ où l'un de ces deux nombres, par exemple $\delta + \varepsilon + \zeta$, est égal à $\lambda$.

Ce produit P est l'un des termes du $\lambda^{\text{ième}}$ composé de la forme

$$F = (ab)^{\gamma}(ca)^{\beta}(bc)^{\alpha} a_x^{p-\beta-\gamma} b_x^{q-\alpha-\gamma} c_x^{r-\alpha-\beta}$$

avec la forme $d$.

Le composé lui-même $(F, d)^{\lambda}$ ne différera de P que par des termes de la forme

$$\psi = k(ab)^{\gamma'}(ca)^{\beta'}(bc)^{\alpha'}(ad)^{\delta'}(bd)^{\varepsilon'}(cd)^{\zeta'} a_x^{p-\gamma'-\beta'-\delta'} \dots,$$

où $k$ est une constante, $\gamma'$, $\beta'$, $\alpha'$ des nombres au moins égaux à $\gamma$, $\beta$, $\alpha$ et dont la somme est $\alpha+\beta+\gamma+i$, $i$ étant $>0$; enfin, $\delta'$, $\varepsilon'$, $\zeta'$ étant des nombres dont la somme est $\lambda-i$.

Le terme $\psi$ est réductible, par hypothèse, car sa catégorie $\overline{\overline{>}}\gamma' \overline{\overline{>}} \gamma$, et, d'autre part, $\delta'+\varepsilon'+\zeta'<\lambda$.

Si donc $(F, d)^\lambda$ est réductible, P le sera.

Mais si F était réductible, $(F, d)^\lambda$ le serait évidemment. Donc F doit être irréductible. Il faut pour cela (11 et 12) qu'on ait $\gamma \overline{\overline{>}} 2(\alpha+\beta)$, et de plus que deux au moins des nombres $p$, $q$, $r$, et, par suite, l'un au moins des nombres $p$, $q$, soient $\overline{\overline{>}}\alpha+\beta+\gamma$.

Soit, par exemple, $q \overline{\overline{>}} \alpha+\beta+\gamma$; F contiendra en facteur $(ac)^\beta b_x^\beta$, qu'on pourra remplacer par $[-(bc)a_x-(ab)c_x]^\beta$.

Développant par la formule du binôme, on aura F exprimé linéairement par des termes de la forme

$$G=(ab)^\mu (bc)^\nu a_x^{p-\mu} b_x^{q-\mu-\nu} c_x^{r-\nu},$$

où

$$\mu+\nu=\alpha+\beta+\gamma, \quad \mu \overline{\overline{>}} \gamma \overline{\overline{>}} 2(\alpha+\beta) \overline{\overline{>}} 2\nu.$$

Ceux de ces termes où $\mu>\gamma$, composés avec $d$, donneront des termes de catégorie $>\gamma$.

Restent les termes où $\mu=\gamma$, d'où $\nu=\alpha+\beta$. Considérons l'un d'entre eux G.

Un quelconque des termes du composé $(G, d)^\lambda$ ne différant du composé lui-même que par des termes réductibles, comme on l'a vu tout à l'heure, il suffit de s'assurer que l'un de ces termes $\Pi$, choisi arbitrairement, est réductible.

Or, si $\lambda \overline{\overline{<}} p+q-2\mu-\nu$, on pourra prendre pour $\Pi$ le terme

$$(ab)^\mu (bc)^\nu (ad)^i (bd)^{\lambda-i} a_x^{p-\mu-i} \ldots,$$

où $i$ est un entier quelconque tel que l'on ait $i \overline{\overline{<}} p-\mu$, $\lambda-i \overline{\overline{<}} q-\mu-\nu$. Ce terme est réductible; car on a par hypothèse $\gamma<\alpha+\beta+\delta+\varepsilon+\zeta$, ou $\mu<\nu+\lambda$; d'autre part, $\nu \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}\mu$; donc $\lambda>\frac{1}{2}\mu$; donc $\Pi$, étant divisible par $(ab)^\mu (ad)^i (bd)^{\lambda-i}$, sera réductible (12).

Soit, au contraire, $\lambda=p+q-2\mu-\nu+\rho$, $\rho$ étant $>0$. Nous prendrons pour $\Pi$ le terme

$$(ab)^\mu (bc)^\nu (ad)^{p-\mu} (bd)^{q-\mu-\nu} (cd)^\rho c_x^{r-\nu-\rho} d_x^{s-\lambda},$$

lequel sera réductible, par hypothèse, si $\nu + \rho < \lambda$. Or, on a

$$\lambda - \nu - \rho = p + q - 2\mu - 2\nu \geqq p + q - 3\mu$$

avec $p + q - 2\mu \geqq \frac{3}{4}N$ et $\mu < \frac{5}{8}N$ (sinon II serait négligeable); donc

$$\lambda - \nu - \rho \geqq \tfrac{3}{4}N - \tfrac{5}{8}N > 0.$$

Le théorème est donc démontré.

## § III.

**14.** Théorème. — *Tout covariant des formes $a$, $b$, $c$,... est une fonction linéaire de termes négligeables et de produits de l'espèce* PQ, *où* Q *représente un produit de formes prises dans la série des formes $a$, $b$, $c$, ..., ou dans la série de leurs covariants $K_\mu$ à deux symboles,* P *représentant, d'autre part, un produit de l'espèce suivante :*

$$(ab)^\mu (bc)^\nu (cd)^{\mu_1} (de)^{\nu_1} \ldots a_x^{p-\mu} b_x^{q-\mu-\nu} \ldots,$$

*où les exposants $\mu, \nu, \mu_1, \nu_1, \ldots$ satisfont aux relations*

$$\begin{array}{ll} \mu < \frac{5}{8}N, & 0 < \nu \leqq \frac{1}{2}\mu, \\ \mu_1 \leqq \mu - \nu, & 0 < \nu_1 \leqq \frac{1}{2}\mu_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mu_i \leqq \mu_{i-1} - \nu_{i-1}, & 0 < \nu_i \leqq \frac{1}{2}\mu_i. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

**15.** Ce théorème est évident pour les covariants à deux symboles, et nous l'avons établi pour ceux qui en contiennent trois. Nous allons voir que le théorème, étant supposé vrai pour les covariants à $m$ symboles, le sera pour ceux à $m+2$ symboles.

Il suffira d'établir la proposition pour un des produits symboliques dont ces covariants sont linéairement formés. Elle est d'ailleurs évidente pour tout produit dont la catégorie serait $\geqq \frac{5}{8}N$, un semblable produit étant négligeable. Nous aurons donc prouvé le théorème en montrant qu'il est vrai pour les produits irréductibles de catégorie $\mu$, en supposant qu'il le soit pour les produits de catégorie $> \mu$.

Soit $\pi = (ab)^\mu (ac)^\alpha \ldots (cd)^\beta \ldots a_x^{p-\mu-\alpha-\ldots} \ldots$ un produit de catégorie $\mu$.

Soit $\nu$ le nombre total de ceux de ses déterminants qui contiennent un des deux symboles $a$, $b$ associé à un des autres symboles $c, d, \ldots$. On sait que $\pi$ sera l'un des termes du $\nu^{\text{ième}}$ composé du covariant $K_\mu^{ab} = (ab)^\mu a_x^{p-\mu} b_x^{q-\mu}$ avec un covariant $\psi$ contenant les symboles $c, d, \ldots$

Le théorème sera évident si $\nu = 0$. En effet, $\pi$ se réduit au produit $\psi . K_\mu^{ab}$. Or $\psi$, ne contenant que $m$ symboles, s'exprimera, par hypothèse, en fonction linéaire de termes négligeables et de produits de l'espèce PQ, lesquels, étant multipliés par le facteur $K_\mu^{ab}$, donneront évidemment des produits de même espèce.

Le théorème sera donc prouvé, en général, si nous montrons qu'il est vrai pour une valeur quelconque de $\nu$, en le supposant vrai pour les valeurs inférieures.

Or, on sait que le terme $\pi$ ne diffère du composé $(K_\mu^{ab}, \psi)^\nu$ que par des composés tels que $(K_{\mu'}^{ab}, \psi')^{\nu'}$, où $\psi'$ est un nouveau covariant à $m$ symboles, $\mu'$ un nombre au moins égal à $\mu$, et $\nu'$ un nombre inférieur à $\nu$.

Chacun de ces composés, étant développé, donnera une série de termes dont la catégorie est au moins égale à $\mu'$; elle sera donc supérieure à $\mu$, si $\mu' > \mu$. Si, au contraire, $\mu' = \mu$, le nombre $\nu'$ des déterminants où les symboles $a$, $b$ s'y trouvent associés aux autres symboles sera $< \nu$. Donc le théorème sera vrai, par hypothèse, pour chacun de ces termes.

Le théorème sera donc vrai pour $\pi$, s'il l'est pour $(K_\mu^{ab}, \psi)^\nu$, et réciproquement.

Or $\psi$, ne contenant que $m$ symboles, s'exprime en fonction linéaire de termes négligeables et de produits PQ. Le composé $(K_\mu^{ab}, \psi)^\nu$ s'exprimera donc en fonction linéaire de termes négligeables et de composés de l'espèce $(K_\mu^{ab}, \mathrm{PQ})^\nu$.

Tout revient donc à démontrer le théorème pour un quelconque de ces derniers composés, ou, ce qui revient au même, pour un de ses termes T, choisi à volonté.

**16.** Soit, pour fixer les idées,

$$\mathrm{P} = (cd)^{\mu_1} (de)^{\nu_1} \ldots c_x^{r-\mu_1} d_x^{s-\mu_1-\nu_1} \ldots,$$

$\mu_1, \nu_1, \ldots$ satisfaisant aux conditions

$$\mu_1 < \tfrac{5}{8}\mathrm{N}, \quad \nu_1 \overline{\overline{<}} \tfrac{1}{2}\mu_1, \quad \mu_2 \overline{\overline{<}} \mu_1 - \nu_1, \quad \ldots$$

énoncées au théorème. Soient toujours $p, q, r, \ldots$ les ordres des formes $a, b, c, \ldots$, et supposons, ce qui est permis, $q \geqq p$.

Parmi les termes du composé $(\mathrm{K}_\mu^{ab}, \mathrm{PQ})^\nu$, nous en choisirons un T où le déterminant $(bc)$ figure à la plus haute puissance possible. Cette puissance sera évidemment égale au plus petit des trois nombres $\nu, q-\mu, r-\mu_1$.

1° Si $r-\mu_1$ n'est supérieur ni à $\nu$ ni à $q-\mu$, le terme en question contiendra en facteur $(ab)^\mu (bc)^{r-\mu_1} (cd)^{\mu_1}$.

Ce terme sera négligeable si $\mu \geqq \frac{5}{8}\mathrm{N}$. Dans le cas contraire, on aura

$$r-\mu_1+\mu_1 = r > \tfrac{3}{4}\mathrm{N} > \mu.$$

Donc ce terme sera réductible (13); et le théorème, étant supposé vrai pour les covariants de catégorie $>\mu$ au moyen desquels T est exprimé, sera vrai pour T.

2° Admettons en second lieu que $q-\mu$ ne soit supérieur ni à $\nu$ ni à $r-\mu_1$. Le terme considéré contiendra en facteur $(ab)^\mu (bc)^{q-\mu}$ et sera réductible, si l'on n'a pas $\mu \geqq 2(q-\mu)$. Il le sera également si l'on n'a pas $p+q-2\mu > \frac{3}{4}\mathrm{N}$ et *a fortiori* $2(q-\mu) > \frac{3}{4}\mathrm{N}$. Mais ces conditions réunies donneraient $\mu > \frac{3}{4}\mathrm{N}$, et le terme serait négligeable.

3° Admettons, comme dernière hypothèse, que $\nu$ soit moindre que $q-\mu$ et $r-\mu_1$. On aura

$$\mathrm{T} = (ab)^\mu (bc)^\nu (cd)^{\mu_1} (de)^{\nu_1} \ldots a_x^{p-\mu} \ldots \mathrm{Q}.$$

Ce terme étant divisible par $(ab)^\mu (bc)^\nu$ ainsi que par $(ab)^\mu (bc)^\nu (cd)^{\mu_1}$ sera encore réductible si l'on n'a pas $\nu \leqq \frac{1}{2}\mu$, $\mu \geqq \nu + \mu_1$ (**12** et **13**). Mais, si ces conditions sont satisfaites, il satisfera à l'énoncé du théorème.

## IV.

**17.** Théorème. — *Tout covariant du système $a, b, c, \ldots, f, g, \ldots, \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi', \varphi'_1, \ldots$ est une fonction linéaire de produits* RST *ainsi définis :*

R *représente, ou l'unité, ou un produit symbolique, tel que son ordre* *soit inférieur à* $2N^2$ *et que la somme de son ordre et de son degré soit inférieure à* $9N^2$;

S *est, ou l'unité, ou un produit de facteurs dont chacun est l'une des formes du système, ou l'un de leurs covariants du second degré, tel que* $(ab)^{\nu} a_x^{p-\nu} b_x^{q-\nu}$, *d'ordre au moins égal à* 2.

T *est, ou l'unité, ou un produit d'invariants dont chacun a son degré inférieur à* $7N - 5$.

**18.** Le théorème est évident si $N = 1$. En effet, des formes données $a, b, c, \ldots$, qui sont toutes linéaires, le procédé du n° **1** permettra de déduire les formes auxiliaires $\varphi = (ab), \varphi_1 = (ac), \ldots$ d'ordre zéro. Or on sait que tout covariant du système est une fonction entière de $a, b, c, \ldots, \varphi, \varphi_1, \ldots$; ce sera donc une fonction linéaire de produits S.

Le théorème est encore évident, quel que soit N, pour les covariants du premier degré, lesquels se réduisent aux formes $a, b, c, \ldots, f, g, \ldots, \varphi, \ldots$ du système.

**19.** Nous allons démontrer que le théorème est vrai pour les covariants de degré $\delta$ correspondant à une valeur déterminée de N s'il est vrai : 1° pour les covariants correspondant à de moindres valeurs de N; 2° pour les covariants correspondant à la valeur donnée de N, mais de degré $< \delta$.

Tout d'abord ce théorème aura lieu pour tout covariant (de degré $\delta$) qui soit un produit de deux facteurs, dont l'un est de la forme S, ou de la forme T, ou plus généralement de la forme ST. Soient en effet S′ T′ ce facteur; S′ T′. U le covariant considéré. U étant de degré moindre que le proposé sera une fonction linéaire de termes RST; le covariant proposé s'exprimera donc par des termes $S_1 T_1$ RST. Mais le produit $SS_1$ de deux facteurs de l'espèce S est évidemment de même espèce; de même le produit $TT_1$ est évidemment de l'espèce T; donc $S_1 T_1$ RST sera de l'espèce RST.

En second lieu, le théorème sera vrai pour tout covariant négligeable; car il est vrai par hypothèse pour tous les covariants de classe inférieure au moyen desquels on peut l'exprimer.

**20.** Cela posé, on sait que les covariants du système $a, b, c, \ldots$,

$f$, $g, \ldots$, $\varphi$, $\varphi_1, \ldots$ s'obtiennent en composant les produits PQ définis au n° **14** avec des covariants des formes $f$, $g, \ldots$, $\varphi$, $\varphi_1, \ldots$. L'ordre de ces dernières formes ne pouvant surpasser $N_1$, quantité moindre que $N$, le théorème sera applicable à leurs covariants, lesquels seront de la forme $R_1 S_1 T_1$, l'ordre $O_1$ de $R_1$ étant $< 2N_1^2 < \frac{9}{8}N^2$, et la somme de son ordre et de son degré $D_1$ étant $< 9N_1^2 < \frac{81}{16}N^2$.

Chacun des facteurs qui constituent le produit $S_1$ est du premier ou du second degré; d'ailleurs ce facteur est, ou l'une des formes $f$, $g, \ldots, \varphi, \ldots$ dont l'ordre $\overline{\gtrless} N_1$ ou un composé de deux de ces formes dont l'ordre sera $2N_1 - 2$ dans le cas le plus favorable où les deux formes seront d'ordre $N_1$ et où il n'existe qu'un seul déterminant dans le produit symbolique.

Donc cet ordre ne pourra surpasser le plus grand des deux nombres $N_1$, $2N_1 - 2$.

Enfin les invariants $T_1$ seront d'un degré $< 7N_1 - 5 < 7N - 5$.

**21**. Considérons d'autre part le produit PQ. Chacun des facteurs de Q a pour degré 1 ou 2; son ordre $\omega$ est $> N_1 \overline{\gtrless} 2$, mais il ne peut surpasser $2N - 2$.

Enfin P est de la forme

$$(ab)^\mu (bc)^\nu (cd)^{\mu'} (de)^{\nu'} \ldots a_x^{p-\mu} \ldots$$

où

$$\mu < \frac{5}{8}N, \quad \mu \overline{\gtrless} \frac{\mu}{2}, \quad \nu' \overline{\gtrless} \mu - \nu, \quad \ldots.$$

Si $N < 4$, on pourra supposer que P se réduit à l'unité. En effet, on aura, en vertu des inégalités précédentes, $\mu = 1$, $\nu = 0$. Donc P est un covariant du second degré, qu'on pourra réunir aux facteurs analogues que contient le produit Q.

Soit au contraire $N \overline{\gtrless} 4$.

Les nombres $\mu$, $\mu', \ldots$ formant une suite décroissante, leur nombre ne peut surpasser $\mu$ : le nombre D des symboles qui figurent dans P sera donc $\overline{\gtrless} 2\mu < \frac{5}{4}N$.

Quant à l'ordre O de ce covariant, il sera égal à

$$\begin{aligned} &2\mu N - 2[\mu + 1 + (\mu - 1) + 1 + (\mu - 2) + \ldots] \\ &\quad = 2\mu N - \mu(\mu + 1) - 2(\mu - 1) \end{aligned}$$

dans le cas le plus favorable, où l'on pose $\nu = 1$, $\mu' = \mu - 1$, $\nu' = 1$, $\mu'' = \mu - 2$, ..., et où $a, b, c, \ldots$ représentent des formes d'ordre N.

Cette expression serait maximum pour $\mu = \frac{2N-3}{2}$, valeur non inférieure à la limite $\frac{5}{8}$N du nombre $\mu$.

La limite supérieure de O s'obtiendra donc en posant $\mu = \frac{5}{8}$, ce qui donnera

$$O < \tfrac{55}{64}N^2 - \tfrac{15}{8}N + 2$$

et pour la somme de l'ordre et du degré de P

$$O + D < \tfrac{55}{64}N^2 - \tfrac{5}{8}N + 2.$$

N étant $> 3$, on aura $\frac{5}{8}N > 2$, et par suite

$$O + D < \tfrac{55}{64}N^2, \quad O < \tfrac{55}{64}N^2.$$

Cette limite est encore applicable au cas où N serait $\overline{\gtrless} 3$, car, P étant égal à l'unité, on aura $O = 0$, $D = 0$.

**22.** Ces préliminaires posés, nous avons à établir que tout composé tel que

$$[PQ,\ R_1 S_1 T_1]^\lambda$$

est linéairement exprimable par des termes de la forme RST.

Cette proposition sera vraie si $T_1$ diffère de l'unité; car le composé est un produit de deux facteurs $[PQ,\ R_1 S_1]^\lambda$ et $T_1$, dont le dernier est évidemment de l'espèce T.

Il ne reste donc à considérer que le cas où $T_1 = 1$.

La proposition est encore évidente si $\lambda = 0$; car le composé se réduit au produit $PQ.R_1S_1 = PR_1.QS_1$.

Or $PR_1$ est un covariant de l'espèce R, car son ordre $O + O_1$ est inférieur à $\frac{55}{64}N^2 + \frac{9}{8}N^2 < 2N^2$. D'autre part, la somme

$$O + D + O_1 + D_1$$

de son ordre et de son degré est inférieure à $\frac{55}{64}N^2 + \frac{81}{16}N^2 < 9N^2$. D'ailleurs $QS_1$ est évidemment de l'espèce S.

**23.** Soit donc $T_1 = 1$, et posons, pour abréger,

$$[PQ,\ R_1 S_1]^\lambda = U.$$

Nous allons démontrer que le théorème est vrai pour U, s'il l'est pour les composés analogues où l'ordre de la composition est inférieur à $\lambda$.

Si le théorème est vrai pour un des termes du composé U, il sera vrai pour U; en effet, U s'exprime au moyen de ce terme et de composés $[A, B]^{\lambda'}$, où $\lambda' < \lambda$, A étant un covariant des formes $a, b, c$, et B un covariant des formes $f, g, \ldots, \varphi, \varphi_1, \ldots$.

Or B peut s'exprimer, par hypothèse, par des termes de l'espèce $R_1 S_1 T_1$. D'autre part, A s'exprime par des termes négligeables et des termes de l'espèce PQ.

Mais si l'on compose un terme négligeable avec un terme $R_1 S_1 T_1$, on obtiendra un covariant négligeable, auquel le théorème s'applique, par hypothèse. Il s'applique également aux composés des termes PQ avec les termes $R_1 S_1 T_1$, lorsque l'ordre $\lambda'$ de la composition est $< \lambda$.

Tout revient donc à prouver que le théorème est vrai pour un terme V choisi arbitrairement dans U.

Désignons par $O, \Omega, O_1, \Omega_1$ les ordres respectifs des covariants P, Q, $R_1, S_1$; par $D, \Delta, D_1, \Delta_1$ leurs degrés. On aura

$$\begin{aligned} D &< \tfrac{5}{4} N, \\ O &< \tfrac{55}{64} N^2, & O_1 &< 2 N_1^2 < \tfrac{9}{8} N^2, \\ O + D &< \tfrac{55}{64} N^2, & O_1 + D_1 &< 9 N_1^2 < \tfrac{81}{16} N^2. \end{aligned}$$

On aura en outre

$$\Omega \overline{\overline{>}} \Delta, \quad \Omega_1 \overline{\overline{>}} \Delta_1;$$

car Q et $S_1$ sont des produits de facteurs dont chacun a son ordre au moins égal à son degré. En effet, les facteurs de Q ont pour degré 1 ou 2, et leur ordre est $> N_1 \overline{\overline{>}} 2$. Ceux de $S_1$ ont également pour degré 1 ou 2, et leur ordre est au moins égal à leur degré, d'après l'énoncé du théorème.

Soient d'ailleurs O' et D' l'ordre et le degré de V. On aura

$$O' = O + \Omega + O_1 + \Omega_1 - 2\lambda,$$

$$O' + D' = O + \Omega + O + \Omega - 2\lambda + D + \Delta + D_1 + \Delta_1.$$

**24.** Divers cas seront à distinguer ici :

*Premier cas.* — Q et $S_1$ se réduisent à l'unité. On aura

$$\Omega = \Delta = \Omega_1 = \Delta_1 = 0,$$
$$O' = O + O_1 - 2\lambda < \tfrac{55}{64}N^2 + \tfrac{9}{8}N^2 < 2N^2,$$
$$O' + D' = O + O_1 - 2\lambda + D + D_1 < \tfrac{55}{64}N^2 + \tfrac{81}{16}N^2 < 9N^2.$$

Donc, de quelque manière qu'on choisisse le terme V, il sera de l'espèce R.

**25.** *Deuxième cas.* — $S_1$ se réduit à l'unité, Q étant différent de l'unité. On aura $\Omega_1 = \Delta_1 = 0$.

Soient A l'un des facteurs de Q, $\omega$ son ordre, lequel est $\leqq 2N - 2$ et $\leqq \Omega$. Si $\lambda \leqq O + \Omega - \omega$, on pourra choisir le terme V de telle sorte que la composition y porte exclusivement sur les facteurs du covariant PQ autres que A, dont l'ordre total est $O + \Omega - \omega$. V contenant en facteur le covariant A, qui est de la forme S, le théorème sera établi.

Si $\lambda > O + \Omega - \omega$, on aura

$$\begin{aligned} O' &< O + \Omega + O_1 - 2(O + \Omega - \omega) \\ &< O_1 + \omega - (\Omega - \omega) - O < \tfrac{9}{8}N^2 + 2N - 2 < 2N^2, \\ O' + D' &< O + \Omega + O_1 - 2(O + \Omega - \omega) + D + \Delta + D_1 \\ &< (O_1 + D_1) + D + 2\omega - O - (\Omega - \Delta) \\ &< \tfrac{81}{16}N^2 + \tfrac{5}{4}N + 2(2N - 2) < 9N^2. \end{aligned}$$

Donc V sera de l'espèce R.

**26.** *Troisième cas.* — Q se réduit à l'unité, $S_1$ différant de l'unité. On aura $\Omega = \Delta = 0$.

Soit B l'un des facteurs de $S_1$ ; $\omega_1$ son ordre, lequel sera $\leqq \Omega_1$, et ne pourra surpasser le plus grand des deux nombres $N_1$, $2N_1 - 2$.

Si $\lambda \leqq O_1 + \Omega_1 - \omega_1$, on pourra choisir le terme V de telle sorte que la composition porte exclusivement sur les facteurs du produit RS autres que B. V contenant B en facteur, le théorème sera établi.

Si $\lambda > O_1 + \Omega_1 - \omega_1$, on aura

$$\begin{aligned}O' &< O + O_1 + \Omega_1 - 2(O_1 + \Omega_1 - \omega_1)\\ &< O + \omega_1 - (\Omega_1 - \omega_1) - O_1 < \tfrac{55}{64}N^2 + \omega_1 < 2N^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}O' + D' &< O + O_1 + \Omega_1 - 2(O_1 + \Omega_1 - \omega_1) + D + D_1 + \Delta_1\\ &< (O + D) + D_1 + 2\omega_1 - O_1 - (O_1 - \Delta_1)\\ &< \tfrac{55}{64}N^2 + \tfrac{81}{16}N^2 + 2\omega_1 < 9N^2.\end{aligned}$$

Donc V sera de l'espèce R.

**27.** *Quatrième cas.* — Q et $S_1$ diffèrent de l'unité.

Soient $A, A_1, A_2, \ldots, A_m$ et $B, B_1, \ldots, B_n$ les facteurs dont le produit forme respectivement Q et $S_1$; soient $\omega$ l'ordre de A, $\omega_1$ celui de B. On verra, comme dans les deux cas précédents, que le théorème est vrai si $\lambda$ ne surpasse pas chacun des deux nombres $O + \Omega - \omega$ et

$$O_1 + \Omega_1 - \omega_1.$$

Supposons donc $\lambda$ plus grand que ces deux nombres, et *a fortiori* $\lambda > \Omega - \omega$ et $> \Omega_1 - \omega_1$.

Soient $\rho$ le plus élevé des ordres des facteurs $A_1, A_2, \ldots, A_m$; $\rho_1$ le plus élevé des ordres des facteurs $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Nous allons démontrer que le théorème est vrai si l'on a à la fois $m \overline{\gtrless} \rho_1 - 1$, $n \overline{\gtrless} \rho - 1$.

Admettons, en effet, que ces deux inégalités soient satisfaites, et considérons les produits successifs

$$Q = AA_1 \ldots A_{\rho_1}, \quad Q_1 = A_1 \ldots A_{\rho_1}, \quad \ldots, \quad Q_{\rho_1} = A_{\rho_1}.$$

Leurs ordres respectifs $\mu, \mu_1, \ldots, \mu_{\rho_1}$ forment une suite d'entiers décroissante où la différence entre deux termes consécutifs ne surpasse pas $\rho$, et dont le dernier terme ne surpasse pas $\rho$. Considérons de même les produits

$$s = BB_1 \ldots B_\rho, \quad s_1 = B_1 \ldots B_\rho, \quad \ldots, \quad s_\rho = B_\rho.$$

Leurs ordres $\nu, \nu_1, \ldots, \nu_\rho$ forment une suite d'entiers décroissants, où la différence de deux termes consécutifs ne surpasse pas $\rho_1$, et dont le premier terme est au moins égal à $\rho + 1$, nombre des facteurs B, $B_1, \ldots, B_\rho$.

Supposons, pour fixer les idées, $\nu \overline{\overline{<}} \mu$; on aura *a fortiori* $\nu_1 < \mu$, $\nu_2 < \mu$, ....

Soit en général $\mu_{\nu_i}$ celui des termes de la suite $\mu, \mu_1, \ldots, \mu_\rho$ qui est égal ou immédiatement supérieur à $\nu_i$; les $\rho$ différences $\mu_{\nu_1} - \nu_1, \ldots, \mu_{\nu_i} - \nu_i, \ldots$ sont des entiers $< \rho$. En effet, on a par hypothèse

$$\nu_i > \mu_{\nu_i+1},$$

d'où

$$\mu_{\nu_i} - \nu_i < \mu_{\nu_i} - \mu_{\nu_i+1} < \rho.$$

Donc l'une de ces différences est nulle, ou deux d'entre elles sont égales.

Si l'on a $\mu_{\nu_i} - \nu_i = 0$, les deux produits

$$Q_{\nu_i} = A_{\nu_i} \ldots A_{\rho_1}, \quad \text{et} \quad s_i = B_i \ldots B_\rho$$

auront le même ordre.

Si l'on a $\mu_{\nu_i} - \nu_i = \mu_{\nu_k} - \nu_k$, d'où $\mu_{\nu_i} - \mu_{\nu_k} = \nu_i - \nu_k$, les deux produits

$$A_{\nu_i} \ldots A_{\nu_k} \quad \text{et} \quad B_i \ldots B_k$$

auront le même ordre

Cet ordre $\pi$ est d'ailleurs au plus égal à $\Omega_1 - \omega_1$. Car $S_1$ a pour ordre $\Omega_1$ et le produit $B_i \ldots B_\rho$ ou $B_i \ldots B_k$ ne contient qu'une partie des facteurs de $S_1$; il y manque notamment le facteur B, d'ordre $\omega_1$. Ayant d'ailleurs $\lambda > \Omega_1 - \omega_1$, on aura $\lambda > \pi$.

Cela posé, nous pourrons prendre pour V un terme du composé où les $\pi$ facteurs linéaires du produit

$$A_{\nu_i} \ldots A_{\nu_k} \quad \text{ou} \quad A_{\nu_i} \ldots A_{\rho_1}$$

soient composés avec ceux du produit $B_i \ldots B_k$ ou $B_i \ldots B_\rho$. Cette composition donnera comme facteur dans V un invariant I, dont le degré sera la somme des degrés des deux produits considérés.

Or le premier de ces produits contient au plus $\rho_1 + 1$ facteurs; le second en contient au plus $\rho$. Chacun de ces facteurs est du degré 1 ou 2. Donc le degré $\delta$ de l'invariant sera $\overline{\overline{<}} 2(\rho + \rho_1 + 1)$.

On a d'ailleurs $\rho \overline{\overline{<}} 2N - 2$; quant à $\rho_1$ il ne peut surpasser le plus élevé des deux nombres $N_1$, $2N_1 - 2$.

Si donc on a $N > 2$, d'où $N_1 > 1$, on aura

$$\delta \overline{\overline{<}} 2(2N - 2 + 2N_1 - 2 + 1) \overline{\overline{<}} 7N - 6.$$

Si $N = 2$, d'où $N_1 = 1$,

$$\delta \overline{\overline{<}} 2(2 + 1 + 1) \overline{\overline{<}} 7N - 6.$$

Donc, dans tous les cas, $\delta < 7N - 5$. L'invariant I sera donc de l'espèce T, et, V contenant I en facteur, le théorème lui sera applicable.

**28.** Il ne reste plus à examiner que le cas où l'on a l'une des deux inégalités

$$m \overline{\overline{<}} \rho_1 - 1, \quad n \overline{\overline{<}} \rho - 1.$$

1° Soit d'abord $m \overline{\overline{<}} \rho_1 - 1$. Le produit

$$Q = AA_1 \ldots A_m$$

contenant au plus $\rho_1$ facteurs dont l'ordre ne surpasse pas $\rho$ et dont le degré ne surpasse pas 2, on aura

$$\Omega \overline{\overline{<}} \rho\rho_1, \quad \Delta \overline{\overline{<}} 2\rho_1.$$

D'ailleurs,

$$\begin{aligned} \lambda &> O_1 + \Omega_1 - \omega_1 > O_1 + \Omega_1 - \rho_1, \\ \lambda &> O + \Omega - \omega > O + \Omega - \rho, \\ O' &= O + \Omega + O_1 + \Omega_1 - 2\lambda < \rho + \rho_1. \end{aligned}$$

Si $N = 2$, on aura

$$\rho \overline{\overline{<}} 2N - 2 \overline{\overline{<}} 2, \quad \rho_1 \overline{\overline{<}} 1, \quad O' < 3 < 2N^2.$$

Si $N > 2$, on aura

$$\rho \overline{\overline{<}} 2N - 2, \quad \rho_1 \overline{\overline{<}} 2N_1 - 2 \overline{\overline{<}} \tfrac{3}{2}N - 2, \quad O' \overline{\overline{<}} \tfrac{7}{2}N - 4 < 2N^2.$$

D'autre part, on a

$$
\begin{aligned}
O'+D' &= O+\Omega+O_1+\Omega_1-2\lambda+D+\Delta+D_1+\Delta_1 \\
&< O+\Omega+O_1+\Omega_1-2(O_1+\Omega_1-\rho_1)+D+\Delta+D_1+\Delta_1 \\
&< (O+D)+(\Omega+2\rho_1+\Delta)+D_1-(\Omega_1-\Delta_1)-O_1 \\
&< \tfrac{55}{64}N^2+(\rho+4)\rho_1+\tfrac{81}{16}N^2.
\end{aligned}
$$

Mais si $N > 2$, on a

$$
\begin{gathered}
\rho \overline{\overline{<}} 2N-2, \quad \rho_1 \overline{\overline{<}} 2N_1-2, \\
(\rho+4)\rho_1 \overline{\overline{<}} (2N+2)(2N_1-2) < 4NN_1 < 3N^2,
\end{gathered}
$$

inégalité qui subsistera encore si $N=2$, d'où $\rho \overline{\overline{<}} 2$, $\rho_1 \overline{\overline{<}} 1$.

On en conclut

$$O'+D' < N^2\left(\tfrac{55}{64}+3+\tfrac{81}{16}\right) < 9N^2.$$

Donc V sera de l'espèce R.

2° Soit enfin $n \overline{\overline{<}} \rho - 1$. On trouvera de même

$$
\begin{gathered}
\Omega_1 \overline{\overline{<}} \rho\rho_1, \quad \Delta_1 \overline{\overline{<}} 2\rho_1, \quad O' < \rho+\rho_1 < 2N^2, \\
O'+D' < (O_1+D_1)+(\Omega_1+2\rho+\Delta_1)+D-(\Omega-\Delta)-O, \\
< \tfrac{81}{16}N^2+\rho(\rho_1+4)+\tfrac{5}{4}N < 9N^2.
\end{gathered}
$$

Donc ici encore V sera de l'espèce R.

## § V.

**29.** Il résulte de l'analyse précédente que les covariants d'un système quelconque de formes dont les degrés ne surpassent pas N s'expriment linéairement par des produits tels que $RS_1S_2, \ldots, T_1T_2, \ldots$, où R contient moins de $9N^2$ symboles, $S_1, S_2, \ldots$ n'en contenant pas plus de deux, et $T_1, T_2, \ldots$ en contenant moins de $7N-5$. Mais, pour arriver à ce résultat, il a fallu adjoindre aux formes données $a, b, c, \ldots, f, g, \ldots$ des formes auxiliaires $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi', \varphi'_1, \ldots$.

Pour connaître le degré des facteurs $R, S_1, S_2, \ldots, T_1, T_2, \ldots$, relativement aux coefficients des formes primitives $a, b, c, \ldots, f, g, \ldots$, il est nécessaire de se rendre compte du degré des formes auxiliaires $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi', \varphi'_1, \ldots$.

Les premières formes auxiliaires $\varphi$, $\varphi_1, \ldots$ sont des covariants du degré 3 au plus et d'ordre $\overline{\gtrless} N_1$ des formes $a, b, c, \ldots$ du système dont l'ordre surpasse $N_1$.

Puis on aura une seconde classe de formes auxiliaires $\varphi', \varphi'_1, \ldots$, en prenant les covariants de degré 2 ou 3 et d'ordre $\overline{\gtrless} N_2 = E(\frac{3}{4} N_1)$ de celles des formes $f, g, \ldots, \varphi, \varphi_1, \ldots$ dont l'ordre surpasse $N_2$.

Ces nouvelles formes pouvant être, dans le cas le plus défavorable, du troisième degré par rapport aux coefficients de $\varphi, \varphi_1, \ldots$, qui sont eux-mêmes du troisième degré par rapport à ceux des formes primitives, pourront être de degré $3^2$.

On obtiendra ensuite de nouvelles formes auxiliaires $\varphi'', \varphi''_1, \ldots$, d'ordre $\overline{\gtrless} N_3 = E(\frac{3}{4} N_2)$ et dont le degré pourra être $3^3$ dans le cas le plus défavorable.

En continuant ainsi, on arrivera à un nombre $N_\rho$, qui ne surpasse pas 4. Supposons $N_\rho = 4$, ce qui est le cas le plus défavorable. Les nouvelles formes $\varphi^\rho$, $\varphi'^\rho$ que l'on introduira à ce moment pourront avoir pour degré $3^{\rho+1}$; et leur ordre ne surpassera pas 2. Car si $N_\rho = 4$, leur ordre ne peut surpasser $N_{\rho+1} = 3$. D'ailleurs ce sont des covariants d'un système de formes d'ordre 4; leur ordre est donc un nombre pair : donc il ne peut surpasser $2 = N_{\rho+2}$.

Les formes $\varphi^{\rho+1}, \varphi'^{\rho+1}, \ldots$, qu'on introduira ensuite, étant des covariants des formes du système ou des formes précédemment adjointes dont l'ordre ne surpasse pas $N_{\rho+1}$, mais est supérieur à $N_{\rho+2} = 2$, ne contiendront pas les symboles des formes $\varphi^\rho, \varphi'^\rho, \ldots$, mais seulement ceux des formes précédentes, dont le degré ne surpasse pas $3^\rho$. Donc le degré de $\varphi^{\rho+1}, \varphi'^{\rho+1}, \ldots$ ne peut surpasser $3^{\rho+1}$.

On aura ensuite à introduire des formes $\varphi^{\rho+2}, \varphi'^{\rho+2}, \ldots$, covariants de celles des formes précédentes dont l'ordre est $\overline{\gtrless} N_{\rho+2}$, mais $> N_{\rho+3}$. Le degré de ces nouvelles formes ne surpassera pas $3^{\rho+2}$ et leur ordre ne surpassera pas $N_{\rho+3}$ qui est égal à 1. Mais $N_{\rho+2} = 2$, $N_{\rho+3} = 1$; donc $\varphi^{\rho+2}, \varphi'^{\rho+2}, \ldots$ étant des covariants de formes d'ordre 2, leur ordre sera pair; donc il se réduira à zéro et $\varphi^{\rho+2}, \varphi'^{\rho+2}, \ldots$ seront des invariants.

Enfin nous aurons à introduire les formes $\varphi^{\rho+3}, \varphi'^{\rho+3}, \ldots$, provenant de la combinaison des formes linéaires du système $a, b, c, \ldots, f, g, \ldots$ $\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{\rho+1}, \varphi'^{\rho+1}, \ldots$. Ces nouvelles formes seront des invariants contenant deux symboles dont chacun représente une forme de degré $3^{\rho+1}$ au plus. Donc $\varphi^{\rho+3}$, $\varphi'^{\rho+3}$, ... seront de degré $2.3^{\rho+1}$ au plus.

Les quantités $\varphi^{\rho+2}$, $\varphi'^{\rho+2}$, ..., $\varphi^{\rho+3}$, $\varphi'^{\rho+3}$, ... étant des invariants, leurs symboles ne pourront pas figurer associés avec d'autres dans l'expression des covariants R, $S_1$, $S_2$, ..., $T_1$, $T_2$, ....

Donc les symboles, en nombre $< 9N^2 - O$, que R contient représenteront des formes de degré $3^{\rho+1}$ au plus. Donc le degré de R sera inférieur à $(9N^2 - O)3^{\rho+1}$.

De même, les covariants à deux symboles $S_1$, $S_2$, ... seront d'un degré non supérieur à $2.3^{\rho+1}$.

De même encore des invariants $T_1$, $T_2$, ..., qui contiennent plus d'un symbole auront leur degré inférieur à $(7N - 5)3^{\rho+1}$.

Quant à ceux qui ne contiennent qu'un symbole, leur degré ne pourra surpasser $3^{\rho+2}$, quantité $< (7N - 5)3^{\rho+1}$, si $N > 2$.

Il sera aisé de calculer le nombre $\rho$ pour une valeur quelconque de N en formant la suite des nombres N, $N_1$, $N_2$, .... On peut d'ailleurs lui assigner une limite supérieure. On a en effet

$$N_1 \overline{\underline{<}} \tfrac{3}{4}N, \quad N_2 \overline{\underline{<}} \tfrac{3}{4}N_1, \quad \ldots, \quad N_{\rho-1} \overline{\underline{<}} \tfrac{3}{4}N_{\rho-2}, \quad 4 < N_{\rho-1},$$

d'où

$$4 < \left(\tfrac{3}{4}\right)^{\rho-1} N,$$

$$\rho - 1 < \frac{\log \frac{N}{4}}{\log \frac{4}{3}}.$$

## § VI.

**30.** Les limites

$$O < 2N^2, \quad D < (9N^2 - O)3^{\rho+1},$$

trouvées plus haut pour l'ordre et le degré des covariants indépendants d'un système de formes d'ordre $\overline{\underline{<}}N$, se recommandent par leur simplicité; mais elles sont encore trop élevées et pourraient aisément être resserrées par une analyse plus précise.

Occupons-nous, par exemple, de déterminer une nouvelle limite pour O.

La méthode que nous allons suivre dans ce but présente la plus grande analogie avec celle que nous venons d'exposer dans les paragraphes précédents. Nous pourrons donc abréger un peu les démonstrations.

**31.** Soient $a, b, c, \ldots, e, f, \ldots$ un système de formes, dont l'ordre ne dépasse pas N. Formons les covariants A, B, ... de ce système dont l'ordre ne dépasse pas N et adjoignons-les au système primitif. Tout covariant du système proposé sera un covariant du système $a, b, c, \ldots, e, f, \ldots$, A, B, .., et pourra être exprimé de diverses manières par les symboles de ces diverses formes.

Nous considérerons comme négligeable tout covariant qui peut s'exprimer par d'autres covariants contenant moins de symboles.

**32.** Soient $p, q, r, \ldots$ les ordres respectifs des formes $a, b, c, \ldots, e, f, \ldots$, A, B, .... Tout produit symbolique P qui contient en facteur $(ab)^m$ sera négligeable, si $p+q-2m \leqq \mathrm{N}$; car il s'exprime par les composés de covariants $(ab)^{m'} a_x^{p-m'} b_x^{q-m'}$ (où $m' \geqq m$) avec des covariants contenant les autres symboles de P. Or, chacun des premiers covariants, ayant pour ordre $p+q-2m' \leqq \mathrm{N}$, est une des formes auxiliaires A, B, .... Introduisant le symbole de cette forme à la place des deux symboles $a$, $b$, on aura diminué le nombre des symboles.

En particulier, tout covariant qui contient un facteur $(ab)^m$ sera négligeable, si $m \geqq \frac{1}{2}\mathrm{N}$; car, $p$ et $q$ étant $\leqq \mathrm{N}$, $p+q-2m$ sera $\leqq \mathrm{N}$.

**33.** Considérons maintenant un covariant K du troisième degré tel que

$$(ab)^\gamma (ca)^\beta (bc)^\alpha a_x^{p-\gamma-\beta} b_x^{q-\alpha-\gamma} c_x^{r-\alpha-\beta}.$$

Posons, pour abréger, $\alpha+\beta+\gamma = n$.

Si $p, q, r$ sont tous $\geqq n$, posons

$$(ab)^{n-\nu}(bc)^\nu a_x^{p-n+\nu} b_x^{q-n} c_x^{r-\nu} = \mathrm{C}^\nu_{abc};$$

le covariant K pourra s'exprimer (n° 7) en fonction linéaire de ceux des covariants

$$\mathrm{C}^\nu_{abc},\ \mathrm{C}^\nu_{bca},\ \mathrm{C}^\nu_{cab},$$

où $\nu \leqq \frac{n}{3}$.

Dans le cas contraire, K sera négligeable. En effet, si deux des quantités $p$, $q$, $r$, par exemple $q$ et $r$, sont $\overline{\gtrless} n$, l'ordre de K, qui est $p+q+r-2n$, sera $\overline{\gtrless} p \overline{\gtrless} \mathrm{N}$. Donc K est l'une des formes auxiliaires A, B, ..., et pourra s'exprimer par un seul symbole au lieu de trois.

Soit enfin $p > n$, $q > n$, mais $r < n = n - \rho$; K est le produit de $(ab)^\rho$ par l'expression

$$\mathrm{P} = (ab)^{\gamma-\rho}(ca)^{\beta}(bc)^{\alpha} a_x^{p-\gamma-\beta} b_x^{q-\alpha-\gamma} c_x^{r-\alpha-\beta},$$

où la somme des exposants des déterminants est $n-\rho$, nombre non supérieur aux quantités $p-\rho$, $q-\rho$, $r$ qui représentent respectivement le degré de l'expression en $a$, $b$, $c$.

Posant

$$(ab)^{n-\rho-\nu}(bc)^{\nu} a_x^{p-n+\nu} b_x^{q-n} c_x^{r-\nu} = \mathrm{C}^{\nu}_{abc},$$

on sait (n° **7**) que P pourra s'exprimer linéairement en fonction de $n-\rho+1$ produits symboliques

$$\mathrm{C}^0_{bca}, \ldots, \mathrm{C}^k_{bca}; \ \mathrm{C}^0_{cab}, \ldots, \mathrm{C}^l_{cab};$$

$k$ et $l$ étant deux entiers quelconques tels que l'on ait

$$k + l + 2 = n - \rho + 1 = r + 1.$$

Multipliant ces produits symboliques par $(ab)^\rho$, on obtiendra les divers termes au moyen desquels $k$ peut être exprimé.

Prenons pour $k$ le plus grand nombre contenu dans $\frac{r}{2}$. On aura

$$l = r - 1 - \mathrm{E}\left(\frac{r}{2}\right) \overline{\gtrless} \mathrm{E}\left(\frac{r}{2}\right).$$

Cela posé, chacun des termes de K sera négligeable. En effet, considérons l'un de ces termes, tel que

$$(ab)^\rho \mathrm{C}^\nu_{bca} \quad (\text{où } \nu \overline{\gtrless} k.)$$

Ce terme, contenant en facteur le déterminant $(bc)^{n-\rho-\nu}$, sera négligeable, si l'on a $q+r-2(n-\rho-\nu)\overline{\gtrless}\mathrm{N}$. Or on a

$$n-\rho=r,\quad \nu\overline{\gtrless}k\overline{\gtrless}\frac{r}{2},$$

d'où

$$q+r-2(n-\rho-\nu)\overline{\gtrless}q\overline{\gtrless}\mathrm{N}.$$

**34.** Nous dirons, comme au n° **4**, qu'un produit symbolique est de la catégorie $\mu$, s'il contient en facteur un déterminant élevé à la puissance $\mu$; et nous considérerons comme réductible tout produit symbolique exprimable au moyen de termes négligeables ou d'une catégorie plus élevée.

Cela posé, on trouvera, par des raisonnements semblables à ceux des n$^{os}$ **12** à **16** :

1° Que tout produit symbolique de catégorie $\gamma$ est réductible, s'il est divisible par $(ab)^\gamma(ca)^\beta(bc)^\alpha$, $\alpha+\beta$ étant $>\frac{1}{2}\gamma$ ou $\alpha+\beta+\gamma$ étant plus grand que l'un des nombres $p$, $q$, $r$;

2° Qu'un produit à quatre symboles

$$(ab)^\gamma(ca)^\beta(bc)^\alpha(ad)^\delta(bd)^\varepsilon(cd)^\zeta a_x^{p-\gamma-\beta-\delta}\ldots$$

est réductible si le plus grand des exposants $\gamma$, $\beta$, $\alpha$, $\delta$, $\varepsilon$, $\zeta$ est moindre que la somme des cinq autres;

3° Qu'un covariant quelconque K peut s'exprimer linéairement par des termes négligeables et par des produits PQ, où Q représente un produit de formes prises chacune dans la suite des formes $a, b, c, \ldots$, A, B, ... ou dans la suite de leurs covariants du second degré; P représentant d'autre part un produit formé avec les symboles $a, b, c, \ldots$, A, B, ... et de l'espèce suivante :

$$(ab)^\mu(bc)^\nu(cd)^{\mu_1}(de)^{\nu_1}\ldots a_x^{p-\mu}\ldots,$$

où

$$\mu<\tfrac{1}{2}\mathrm{N},\quad \nu\overline{\gtrless}\tfrac{1}{2}\mu,\quad \mu_1\overline{\gtrless}\mu-\nu,\quad \nu_1\overline{\gtrless}\tfrac{1}{2}\mu_1,\quad \ldots.$$

Les termes négligeables qui figurent dans cette expression de K pouvant être traités comme K l'a été lui-même, on voit que tout covariant K s'exprime linéairement par des produits PQ.

35. Cela posé, les facteurs dont se compose le produit Q, étant des formes d'ordre $\overline{\gtrless}$ N ou des covariants du second degré de ces formes, l'ordre de chacun d'eux sera au plus égal au plus grand des deux nombres N ou $2N - 2$.

Reste à considérer le facteur P. Appliquant à ce produit symbolique les raisonnements exposés au § VII de notre Mémoire de 1876, on trouvera que P s'exprime (sauf des termes négligeables) en fonction entière de produits analogues $\Pi$, dans lesquels le nombre $\delta$ des symboles, la somme $\mu + \nu + \mu_1 + \nu_1 + \ldots = S$ des exposants des déterminants et le premier $\mu$ de ces exposants sont liés par les relations

$$S \overline{\gtrless} \varphi(\delta), \quad \mu \overline{\gtrless} f(\delta),$$

$f$ et $\varphi$ désignant les deux fonctions numériques définies par les équations

$$\begin{gathered}
f(1) = 0, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = 2, \\
f(2i+3) = f(2i+2) + 2E\left[\frac{f(i+3)}{4}\right], \\
f(2i+2) = f(2i+1) + 2E\left[\frac{f(i+2)+2}{4}\right], \\
\varphi(1) = 0, \quad \varphi(2) = 1, \quad \varphi(3) = 3, \\
\varphi(i) = \varphi(i-1) + f(i).
\end{gathered}$$

Cela posé, les $\delta$ formes dont les symboles figurent dans l'expression d'un produit $\Pi$ étant au plus d'ordre N, l'ordre de $\Pi$ sera

$$\overline{\gtrless} N\delta - 2S \overline{\gtrless} N\delta - 2\varphi(\delta).$$

D'ailleurs $\delta$ est lui-même limité par la condition

$$\frac{N}{2} > \mu > f(\delta).$$

Pour avoir la limite de l'ordre de $\Pi$, il faudra donc déterminer les valeurs de $\delta$ qui satisfont à cette inégalité et les substituer dans l'expression $N\delta - 2\varphi(\delta)$. Le plus grand des résultats obtenus sera la limite cherchée.

On s'assurera aisément que ce résultat maximum correspond à la plus grande des valeurs que l'on peut assigner à $\delta$.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

THÉORÈME. — *Tout covariant d'un système de formes d'ordre* $\overline{\gtrless}$ N *peut s'exprimer en fonction entière de covariants dont l'ordre* O *ne surpasse pas la plus grande des limites suivantes :*

$$N, \quad 2N - 2, \quad N\delta - 2\varphi(\delta),$$

$\delta$ *étant le plus grand entier qui satisfasse à l'inégalité*

$$f(\delta) < \frac{N}{2}.$$

Le calcul des fonctions $f$, $\varphi$ pouvant s'effectuer de proche en proche avec une grande facilité, on n'aura aucune peine à déterminer les limites ainsi définies. On trouvera ainsi, pour

$$N = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots,$$

les limites suivantes :

$$1, 2, 4, 6, 9, 12, 15, 18, 22, 26, \ldots$$