JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ASAPH HALL

Observations et orbites des satellites de Mars, avec les éphémérides pour 1879

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 5 (1879), p. 143-162.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1879_3_5__143_0>

Observations et orbites des satellites de Mars [*], *avec les éphémérides pour* 1879;

PAR M. ASAPH HALL,
Professeur de Mathématiques de la Marine des États-Unis.

TRADUCTION ET RÉSUMÉ PAR M. PAUL GUIEYSSE,
Ingénieur hydrographe de la Marine, Répétiteur à l'École Polytechnique.

---

1. L'année 1877 a été signalée par un fait important dans les annales de l'Astronomie: la découverte des deux satellites de Mars, due au professeur Asaph Hall, de la Marine des États-Unis. La croyance à l'existence de ces satellites, fondée uniquement sur l'analogie avec les autre planètes, d'après les idées si chères aux philosophes du siècle dernier, avait été presque entièrement abandonnée par les astronomes modernes, surtout depuis les recherches infructueuses de William Herschel en 1783 [**]. Le seul astronome qui ait entrepris récemment des recherches sérieuses à ce sujet est l'ancien directeur de l'Observatoire de Copenhague, d'Arrest, mort en 1875. Les travaux mentionnés par Klein dans

---

*] *Observations and orbits of the satellites of Mars, with data for ephemerides in* 1879; by ASAPH HALL, professor of Mathematics, U. S. Navy (Rear-Admiral John Rodgers, U. S. Navy). Washington, Government printing office, 1878.

[**] Dans une Lettre à un de ses amis, à propos de la découverte des quatre satellites de Jupiter, datée de 1610, Kepler écrivait: « Je suis si loin de nier l'existence de quatre satellites à Jupiter, que j'attends impatiemment un télescope pour vous devancer, si c'est possible, dans la découverte de deux satellites à Mars, comme la proportion semble le comporter, de six ou huit à Saturne, et peut-être d'un à Mercure et à Vénus. »

son *Handbook of Astronomy* (vol. I, p. 140), furent l'objet d'un Mémoire important inséré dans les *Astronomische Nachrichten* (vol. LXIV, p. 74). Partant de la valeur de la masse de Mars et de sa distance à la Terre, d'Arrest calcula l'élongation d'un satellite qui ferait sa révolution autour de Mars dans un temps donné, et trouva que, pour une élongation de 70 minutes, la durée de la révolution du satellite dépasserait celle de Mars autour du Soleil, c'est-à-dire 687 jours, d'où il conclut que les recherches de satellites seraient inutiles au delà de cette distance; le carnet d'observations de d'Arrest fait penser que ces recherches, infructueuses d'ailleurs, eurent probablement lieu pendant l'opposition de Mars de 1862.

Malgré ces antécédents peu encourageants, Hall eut assez de confiance dans la puissance de la grande lunette de l'Observatoire de Washington munie d'un objectif Clarke de 26 pouces, pour ne pas laisser passer l'opposition de Mars de 1877 sans faire de soigneuses recherches, quoique pourtant la déclinaison sud de la planète fût contre lui et eût donné plus de chances de succès à un observateur qui se fût servi du grand télescope de Melbourne.

Les observations commencèrent au mois d'août; elles portèrent d'abord sur la région circumplanétaire, où Hall ne trouva que des étoiles fixes, puis sur la région tout proche de la planète et noyée pour ainsi dire dans l'éclat de ses rayons réfléchis. Pour cela, Hall amenait la planète juste en dehors du champ de l'oculaire et faisait ensuite lentement le tour du disque. Après plusieurs observations infructueuses, pendant lesquelles il reconnut plus tard que les satellites avaient été masqués par la planète, il aperçut enfin, le 11 août, un point brillant qui n'était autre que le satellite extérieur. Le mauvais temps interrompit les observations. Le 16, il revit le même point brillant; le 17, il en découvrit un autre, le satellite intérieur; les observations du 17 et du 18 mirent hors de doute l'existence de ces deux satellites, dont la découverte fut aussitôt officiellement annoncée par l'amiral Rodgers. Le satellite intérieur fut pourtant pendant quelques jours une énigme pour Hall, qui, le voyant dans la même nuit de différents côtés de la planète, fut tenté de croire à l'existence de deux ou trois satellites distincts, car il lui semblait peu probable qu'un satellite tournât autour de sa planète en moins de temps que celle-ci sur elle-même. C'est pourtant ce qui a lieu, et la durée de la révolution de ce satellite est moindre que le tiers de celle de la rotation de Mars : cas unique dans notre système solaire.

Hall appela *Deimos* le satellite extérieur et *Phobos* le satellite intérieur, du nom des chevaux du char de Mars dans la Mythologie.

2. Dès que l'existence de ces satellites fut connue, de nombreux observateurs s'en occupèrent, surtout aux États-Unis. L'observation de Phobos est plus difficile que celle de Deimos, à cause de sa plus grande proximité de la planète; l'éclat de ce satellite est pourtant plus vif que celui de Deimos, car on peut le suivre beaucoup plus près du disque de Mars que l'autre.

Les observations faites par Hall à Washington sont beaucoup plus complètes que celles des autres observateurs; elles s'étendent du 11 août au 31 octobre pour Deimos et du 17 août au 15 octobre pour Phobos; ce sont celles dont Hall s'est uniquement servi pour la détermination des orbites; la difficulté d'observation des satellites, qui n'apparaissent jamais que comme de très-petits points noyés dans l'éclat de Mars, doit être cause que chaque observateur a une erreur constante, et la réunion de toutes les observations en une seule série ne peut être que difficile et imprudente.

La méthode employée par Hall consistait à diviser le disque apparent de Mars aussi également que possible par le fil du micromètre, puis à bissecter le satellite. Dans quelques très-belles nuits, Mars put être conservé dans le champ de vue, mais plus généralement Hall dut l'en faire sortir; il observait alors en faisant glisser l'oculaire de droite à gauche, jusqu'à ce que la bissection restât juste. Il aurait peut-être mieux valu se servir d'un micromètre à deux fils, qui détacheraient sur la planète des segments égaux; mais Hall ne voulut pas changer sa méthode une fois les observations commencées.

Il obtint ainsi l'angle de position et la distance ou les coordonnées polaires du satellite rapportées au centre de gravité du disque apparent de la planète; il fallut donc introduire des corrections dues à la différence de réfraction et à la forme du disque.

Les corrections de la réfraction furent calculées par les formules données par Bessel (*Astronomische Untersuchungen*, vol. I, p. 165). Le centre de gravité se trouve sur la ligne menée à angle droit sur la ligne des cornes et en son milieu. Si dans le triangle plan formé par le Soleil, Mars et la Terre, φ est l'angle à la planète, si en outre a est le rayon de la partie circulaire du disque et m la distance du centre de gravité du disque à la ligne des cornes, on a

$$m = \frac{8a}{3\pi} \sin \tfrac{1}{2} \varphi^2.$$

Si donc p et s représentent, suivant les notations adoptées généralement, l'angle de position observé et la distance du satellite, et θ l'angle de position de la ligne des cornes, les corrections de p et de s provenant de la forme du disque seront

$$\Delta s = m \sin(p - \theta),$$
$$\Delta p = \frac{m}{s} \cos(p - \theta).$$

Si maintenant α, δ, α' et δ' sont les ascensions droites et les déclinaisons du Soleil et de Mars, et d leur distance angulaire, on a, dans le triangle Pôle, Soleil, Mars,

$$\cos d = \sin\delta \sin\delta' + \cos\delta \cos\delta' \cos(\alpha' - \alpha)$$
$$\sin d \cos\theta = \cos\delta \sin(\alpha' - \alpha),$$
$$\sin d \sin\theta = \sin\delta \cos\delta' - \cos\delta \sin\delta' \cos(\alpha' - \alpha),$$

formules qui donneront θ, puis Δs et Δp. Hall réduisit alors toutes ces observations dans une Table dont voici la disposition :

TABLE I. — *Observations de Deimos.*

1877.	Washington. T. M.	p.	$\Delta\rho$.	Δp.	Nombre des observ.	Valeur des observ.	Washington. T. M.	s.	$\Delta\rho$	Δs.	Nombre des observ.	Valeur des observ.
	h m	°	°	°			h m	″	″	″		
Août 11.	14.40,1	59,63	−0,01	+0,08	2	3	14.44,6	70,56	+0,03	+0,31	1	3
» 16.	13. 7,5	71,93	0,00	+0,02	2	3	13.12,0	80,83	+0,02	+0,23	2	3
» 17.	16. 1,7	85,53	−0,02	−0,01	2	3	16.22,8	63,24	+0,04	+0,21	1½	3
» 18.	10.27,0	251,76	0,00	−0,03	3	3	10.19,0	82,98	+0,02	−0,21	4	3
» 18.	10.56,0	244,53	0,00	−0,04	1	3	11. 4,0	81,62	+0,03	−0,20	1	3

Et ainsi de suite pour chaque observation.

Cette Table contient, comme on le voit, le temps moyen de Washington, l'angle de position observé p, avec les corrections $\Delta\rho$ et Δp provenant de la réfraction et de la forme du disque, la distance observée s, avec des termes de correction semblables, et enfin le nombre et la valeur relative de chaque observation; ces valeurs sont représentées par des coefficients de 1 à 5, 1 correspondant à une observation médiocre et 5 à une parfaite.

Pour mettre les résultats obtenus sous une forme plus commode pour le calcul, Hall les rapporta au temps moyen de Greenwich, le *Nautical Almanac* anglais contenant des données pour la réduction des observations des satellites et l'estimation de leurs orbites sous une forme plus commode que les *Éphémérides américaines*. Voici la portion de cette Table correspondant à celle de la Table I :

TABLE II. — *Observations de Deimos.*

1877. Greenwich. T. M.	p.	Valeur relative.	Δp.	$\Delta p''$.	Greenwich. T. M.	s.	Valeur relative.	Δs.
Août 11,8288	59°,70	0,50	+0°,27	+0″,34	11,8260	70″,90	0,50	+0″,25
» 16,7586	71,95	0,50	—0,25	—0,36	16,7617	81,08	1,00	+1,02
» 17,8796	85,50	0,50	+2,93	+3,18	17,8943	63,49	0,75	+2,17
» 18,6472	251,73	0,75	+0,50	+0,72	18,6416	82,79	2,00	—0,31
» 18,6673	244,40	0,25	+5,83	+8,45	18,6728	81,45	0,50	+1,53

Cette Table contient les temps moyens de Greenwich en jours et fractions décimales de jour, les angles de position et les distances corrigées, puis des différences obtenues en retranchant les valeurs de ces éléments de celles qui seront calculées plus loin d'après les éléments circulaires approchés; les différences Δp ont été réduites en arcs en multipliant par le facteur $\frac{s}{57,3}$. La Table contient aussi des coefficients des valeurs relatives des observations, calculés de la manière suivante, pour donner la même importance aux équations de condition provenant des mesures d'angles et de distances: pour une observation cotée 3 dans la Table I, on suppose que deux mesures de double distance donnent une observation cotée 1, et qu'il en faut quatre d'angles de position pour avoir le même coefficient; si alors v est le nombre des comparaisons et μ le coefficient de la Table I, le coefficient de valeur relative pour la Table II est $\frac{v\mu}{6}$ pour les angles et $\frac{v\mu}{12}$ pour les distances.

5. Les méthodes données par Gauss dans son Ouvrage *Theoria motus* sont théoriquement suffisantes pour la détermination de l'orbite d'un satellite; mais, dans le cas présent, une petite erreur d'observation peut assez vicier le résultat pour ne rien donner même d'approximatif. Il est préférable de supposer l'orbite circulaire, d'en déterminer les nœuds et l'inclinaison, ce qui fixe la position de l'orbite plan, puis de corriger les éléments circulaires obtenus par la comparaison avec les observations, soit par des méthodes graphiques, ou, dans le cas d'une faible excentricité, par des équations de condition.

Si nous supposons l'orbite circulaire, le satellite paraîtra se mouvoir sur une ellipse, projection du cercle sur le plan perpendiculaire à la droite qui joint les centres de la Terre et de Mars, droite dont la position est connue à un moment quelconque.

a et b étant les axes de cette ellipse, l'inclinaison θ de l'orbite circulaire sur l'orbite apparente sera donnée par

$$\sin\theta = \frac{b}{a}.$$

Si maintenant J représente l'inclinaison du plan de l'orbite sur celui de l'équateur, N l'ascension droite du nœud ascendant sur l'équateur, π l'angle observé de la ligne des apsides dans l'ellipse apparente, et α et δ l'ascension droite et la déclinaison de la planète, le triangle ayant pour sommets les pôles de l'équateur et de l'orbite du satellite et la planète a pour côtés J, $90^\circ - \delta$ et $90^\circ - \theta$, et pour angles opposés au premier et au dernier côté $\pi - 90^\circ$ et $N - \alpha - 90^\circ$, d'où les relations

$$\begin{aligned} \sin J\cos(N-\alpha) &= \cos\theta\cos\pi, \\ \sin J\sin(N-\alpha) &= \sin\theta\cos\delta - \cos\theta\sin\delta\sin\pi, \\ \cos J &= \sin\theta\sin\delta + \cos\theta\cos\delta\sin\pi. \end{aligned}$$

Les valeurs de θ et π, obtenues par une projection graphique des observations faites vers le moment de l'opposition et rapportées à l'unité de distance, sont

$$\theta = 19^\circ 20' \quad \text{et} \quad \pi = 71^\circ 30';$$

avec les valeurs de α et δ pour le 28 août 1877, les formules précédentes donnent

$$J = 35^\circ 49' \quad \text{et} \quad N = 48^\circ 36',$$

de sorte que, le 28 août 1877, les éléments circulaires approchés des satellites de Mars étaient les suivants :

	Deimos.	Phobos.
Époque......	1877, août 21,7500, Greenwich T. M.	août 26,8192.
Période......	1^j,2625000 jour solaire moyen.	0^j,3189436.
$\log\mu$........	2,4550711.	3,0525886.
a...........	32",50 à l'unité de distance.	13",00.
J............	35°49'.	35°49'.
N...........	48°36'.	48°36'.
u...........	13°36'.	30°00'.

L'angle u est la distance angulaire du satellite au nœud à l'époque considérée ou l'angle correspondant à l'argument de la latitude, de sorte que

$$u = v + \pi - N = v + \omega,$$

v étant l'anomalie vraie et π la longitude du périhélie ; les différences données dans la Table II ont été trouvées en comparant ces éléments avec les observations.

Pour faciliter le calcul de la position d'un satellite, Bessel, dans son Mémoire sur l'orbite de Titan (*Astronom. Nachrichten*, vol. IX, p. 8), introduit six angles auxiliaires analogues à ceux employés par Gauss dans sa détermination de la position d'une planète (*Th. mot.*, art. 53). Ainsi, si l'on pose

$$\begin{aligned}
\sin f \cos F &= \cos(\alpha - N)\cos J,\\
\sin f \sin F &= -\sin(\alpha - N),\\
\cos f &= -\cos(\alpha - N)\sin J,\\
\sin g \cos G &= \cos\delta \sin J - \sin\delta \cos J \sin(\alpha - N),\\
\sin g \sin G &= -\sin\delta \cos(\alpha - N),\\
\cos g &= \cos\delta \cos J + \sin\delta \sin J \sin(\alpha - N),\\
\sin h \cos H &= \sin\delta \sin J + \cos\delta \cos J \sin(\alpha - N),\\
\sin h \sin H &= \cos\delta \cos(\alpha - N),\\
\cos h &= \sin\delta \cos J - \cos\delta \sin J \sin(\alpha - N),
\end{aligned}$$

on aura

$$x = \frac{a}{\rho} \sin f \sin(F + u),$$

$$y = \frac{a}{\rho} \sin g \sin(G + u),$$

$$z = \frac{a}{\rho} \sin h \sin(H + u),$$

ρ étant la distance de Mars à la Terre, et finalement

$$s \sin p = \frac{x}{1 + z}, \quad s \cos p = \frac{y}{1 + z};$$

x, y, z sont les distances à trois plans rectangulaires passant par le centre de la planète, dont l'un coïncide avec le plan de l'orbite du satellite, et dont z est la distance correspondante.

La quantité z est généralement assez petite devant l'unité pour pouvoir être négligée dans les équations différentielles, et son influence sur la valeur de la distance calculée peut être d'ailleurs aisément appréciée. Dans le cas des satellites de Mars, la variation de grandeur de s ne dépasse jamais $\pm 0'',05$, et l'influence finale de z sur la moyenne distance n'est pas sensible; mais, comme elle peut amener une légère modification de l'excentricité, il faut en tenir compte.

Le Mémoire de Hall contient une Table qui donne de quatre en quatre jours, du 10 août au 2 novembre 1877, les valeurs de $\log \sin f$, $\log \sin g$, $\log \sin h$, F, G et H à midi moyen de Greenwich.

4. Les équations différentielles, étant indépendantes de z, peuvent se déduire des valeurs de x et y :

$$s \sin p = x = \frac{a}{\rho} [\sin u \cos(\alpha - N) \cos J - \cos u \sin(\alpha - N)],$$

$$s \cos p = y = \frac{a}{\rho} \{\sin u [\cos \delta \sin J - \sin \delta \cos J \sin(\alpha - N)] - \cos u \sin \delta \cos(\alpha - N)\},$$

d'où, en différentiant et résolvant par rapport à ds et dp,

$$ds = \sin p \, dx + \cos p \, dy,$$
$$s \, dp = \cos p \, dx - \sin p \, dy.$$

L'équation polaire de la trajectoire est

$$r = a[1 - e\cos(u - \omega)] = a(1 - e\cos\omega\cos u - e\sin\omega\sin u),$$

en négligeant les puissances de e supérieures à la première, puisque les différences données dans la Table II entre les éléments circulaires et les observations sont très-faibles.

Posant $\xi = ae\cos\omega$, $\eta = ae\sin\omega$, il vient

$$r = a - \cos u.\xi - \sin u.\eta$$

et

$$dr = da - \cos u.\xi - \sin u.\eta.$$

Puis l'équation du centre donne

$$u = u_0 + 2ae\sin(u - \omega),$$

d'où

$$du = du_0 + 2\sin u.\xi - 2\cos u.\eta.$$

Comme il n'existe encore aucune observation permettant de déterminer le mouvement diurne avec exactitude, il faut ajouter à du un terme de la forme $t\Delta\mu$, l'époque de t étant le 28 août à midi et l'unité de temps étant de dix jours moyens. Le calcul des coefficients différentiels de dx et dy, par rapport aux diverses quantités dont ils dépendent, et leur introduction dans les expressions de ds et sdp donnent les équations différentielles nécessaires pour la correction des éléments; elles sont de la forme

$$\begin{aligned} ds &= \mathrm{P}\,\Delta\mathrm{N} + \mathrm{Q}\,\Delta\mathrm{J} + \mathrm{R}\,\Delta u + \mathrm{S}\,\Delta\mu + \mathrm{T}\xi + \mathrm{U}\eta + \mathrm{V}\Delta a,\\ sdp &= \mathrm{P}'\Delta\mathrm{N} + \mathrm{Q}'\Delta\mathrm{J} + \mathrm{R}'\Delta u + \mathrm{S}'\Delta\mu + \mathrm{T}'\xi + \mathrm{U}'\eta. \end{aligned}$$

Introduisant les quantités auxiliaires

$$\begin{aligned} c\sin\mathrm{C} &= \sin p, & b\sin\mathrm{B} &= \cos p,\\ c\cos\mathrm{C} &= \cos p\sin\delta, & b\cos\mathrm{B} &= \sin p\cos\delta, \end{aligned}$$

et posant $k = \frac{a}{\rho}$, on a, en omettant l'indice de u et remplaçant par les arcs f et g les sinus correspondants,

$$
\begin{aligned}
P &= k[c\sin u\cos J\cos(\alpha - N - C) - c\cos u\sin(\alpha - N - C)],\\
Q &= k\sin u\sin J\,[\cos\delta\cos p\cot J + c\sin(\alpha - N - C)],\\
R &= k[f\cos(F+u)\sin p + g\cos(G+u)\cos p],\\
S &= Rt,\\
T &= 2R\sin u - \frac{s}{a}\cos u,\\
U &= -2R\cos u + \frac{s}{a}\sin u,\\
V &= \frac{s}{a},\\
P' &= k[-b\sin u\cos J\cos(\alpha - N + B) + b\cos u\sin(\alpha - N + B)],\\
Q' &= -k\sin u\sin J\,[\cos\delta\sin p\cot J + b\sin(\alpha - N + B)],\\
R' &= k\,[f\cos(F+u)\cos p - g\cos(G+u)\sin p],\\
S' &= R't,\\
T' &= 2R'\sin u,\\
U' &= -2R'\cos u.
\end{aligned}
$$

Pour le calcul, le plus simple est de supposer $a = 1$, ce qui exige la multiplication des résultats par le facteur $\frac{57,3}{a}$ pour les transformer en degrés.

Voici les portions des Tables calculées par Hall correspondant à celles données précédemment ; elles donnent les logarithmes des coefficients différentiels. La lettre n après un logarithme indique que le nombre correspondant est négatif ; la dernière colonne donne les différences obtenues en substituant les valeurs finales de ΔN, ΔJ, ... dans les équations de condition.

Table III. — *Deimos.* Équations en s.

Dates. Août 1877.	Δs.	ΔN.	ΔJ.	Δu.	$\Delta\mu$.	ξ.	η.	Δa.	Différence.
11	9,398	9,984n	9,580	0,022n	0,232	0,420n	9,873n	0,340	$-1'',45$
16	0,009	8,994	8,248n	9,016	9,065n	0,313n	0,167n	0,402	+0,15
17	0,337	0,193	8,980	0,159	0,165n	0,371n	0,411n	0,294	+2,11
18	9,491n	9,336	8,553n	9,347	9,315n	0,309	0,200	0,405	−0,04
18	9,322n	9,672n	9,097	9,636n	9,654	0,387	0,052	0,399	−0,47

Table IV. — *Deimos.* Équations en p.

Dates. Août 1877.	$s\Delta p$.	ΔN.	ΔJ.	Δu.	$\Delta\mu$.	ξ.	η.	Différence.
11	9,531	9,153n	0,307n	9,964n	0,174	0,156n	9,922	$-0'',31$
16	9,556n	9,711	0,090n	9,915n	9,974	9,938n	0,159	−0,95
17	0,502	9,661	9,506	0,035n	0,044	9,482	0,331	+2,41
18	9,857	9,741	0,053n	9,930n	9,898	9,902	0,177n	−0,11
18	9,672	9,437	0,237	9,937n	9,905	0,095	0,080n	−0,16

5. Les coefficients des équations de condition ayant été calculés d'après les formules ci-dessus, Hall résolut ces équations par la méthode des moindres carrés, après les avoir multipliées par la racine carrée du coefficient de leur valeur relative. Les sept inconnues, calculées au moyen de quatre-vingt-dix-huit équations pour Deimos et de soixante-dix-neuf pour Phobos, ont les valeurs suivantes :

Deimos.	*Phobos.*
$\Delta N = -0^{\circ}.30',3 \pm 3',60,$	$\Delta N = -1^{\circ}.22',8 \pm 16',66,$
$\Delta J = -0.10,3 \pm 2,83,$	$\Delta J = +0.58,1 \pm 14,22,$
$\Delta u = +1.43,5 \pm 6,40,$	$\Delta u = +2.32,2 \pm 17,72,$
$\Delta\mu = +0.\ 9,6 \pm 1,95,$	$\Delta\mu = +0.40,6 \pm 8,81,$
$\xi = +0,14041 \pm 0,01377,$	$\xi = +0,2912 \pm 0,0167,$
$\eta = +0,12160 \pm 0,01825,$	$\eta = +0,2964 \pm 0,0198,$
$\Delta a = -0,1459 \pm 0,0118,$	$\Delta a = -0,0469 \pm 0,0142.$

Les éléments des satellites, corrigés d'après ces termes de correction, sont les suivants :

	Deimos.	*Phobos.*
Époque.	1877, août 28,0, Greenwich T. M.	Août 28,0.
Période.	$1^j,262429 = 30^h 17^m 55^s,86 \pm 0^s,985$.	$0^j,3189244 = 7^h 39^m 15^s,07 \pm 1^s,123$.
$\log \mu$ ...	2,4550955.	3,0526147.
a	$32'',3541 \pm 0'',0118$.	$12'',9531 \pm 0'',0142$.
J.	$35°38',7$.	$36°47',1$.
N.	$48°\ 5',7$.	$47°13',2$.
ω	$40°53',6 \pm 5°4',98$.	$45°30',4 \pm 2°11',16$.
e.	$0,005741 \pm 0,0004898$.	$0,032079 \pm 0,001407$.
u.	$357°30',5$.	$285°20',2$.

Pour Deimos, la somme des carrés des différences étant 29,07 et le nombre des observations de valeur égale à 1 étant $93\frac{2}{3}$, l'erreur probable d'une observation isolée est $\pm 0'',391$; elle est, pour Phobos, de $\pm 0'',412$: résultats bien satisfaisants, quand on songe aux difficultés des observations. Le disque apparent de Mars pendant l'opposition de 1877, qu'il fallait bissecter avec le fil du micromètre, était de 25''.

On voit que les plans des orbites des satellites ont une très-faible inclinaison sur l'équateur de Mars. Les éléments des orbites sont déterminés assez rigoureusement, sauf la durée de la révolution, qui ne le sera complétement qu'à la prochaine opposition. Pour Deimos, l'excentricité étant très-faible, la position de la ligne des apsides est naturellement incertaine; les éléments circulaires sont assez satisfaisants pour pouvoir servir aux observations. Pour Phobos, l'excentricité a une réelle valeur, qui ne peut être attribuée à des erreurs systématiques d'observation.

Ces données permettent maintenant de calculer la masse de Mars rapportée à celle du Soleil.

$$\text{D'après Deimos, elle serait } \frac{1}{3095313 \pm 3485};$$

$$\text{D'après Phobos, } \quad \text{»} \quad \frac{1}{3078456 \pm 10104}.$$

Ces deux résultats concordent si bien dans les limites de leurs erreurs probables, que Hall a pris pour la valeur de cette masse, d'après ses observations de Washington, la moyenne de ces deux valeurs, en tenant compte de leurs justesses relatives :

$$\text{Masse de Mars} = \frac{1}{3093500 \pm 3295}.$$

Ces résultats obtenus, Hall les compara avec ceux qu'il put tirer des observations faites aux Observatoires de Cambridge et Glascow aux États-Unis et de Pulkova en Europe. Quelques astronomes anglais et français (MM. Henry, à Paris) aperçurent bien les satellites, tout au moins Deimos, mais leurs observations ne furent pas assez suivies pour en tirer de bons éléments de calcul; et encore Hall, faisant surtout cette comparaison pour voir s'il n'y avait pas dans sa manière de procéder une erreur systématique, conserva-t-il les valeurs de la durée de la révolution et de la position des orbites fournies par ses observations de Washington, qui embrassaient un bien plus grand laps de temps. Il eut seulement à calculer à nouveau les valeurs de f, F, g, G, ce qui lui donna par comparaison avec les observations une valeur de Δs, d'où Δa se déduisit par la relation $\Delta a = -\frac{da}{ds}\Delta s = -\frac{a}{s}\Delta s$.

Les observations faites à Cambridge (États-Unis) par M. Léonard Waldo, avec un objectif de 15 pouces, se trouvent dans les *Astronomische Nachrichten*, n° 2190; elles vont du 28 août au 5 octobre 1877 pour Deimos et du 4 au 23 septembre pour Phobos. Elles ont fourni pour les valeurs du grand axe de l'orbite et de la masse de Mars :

$$\text{Deimos\ldots\ldots} \quad a = 32'',6089 \pm 0'',0454, \quad m = \frac{1}{3023319},$$

$$\text{Phobos\ldots\ldots} \quad a = 13'',0080 \pm 0'',0266, \quad m = \frac{1}{3039643}.$$

Les observations faites à Glascow (Missouri, États-Unis) par M. Henry S. Pritchett, avec un objectif Clarke de $12\frac{1}{4}$ pouces, s'étendent du 28 août au 28 septembre pour Deimos et du 7 au 23 septembre pour Phobos; elles sont publiées dans les *Astronomische Nachrichten*, n° 2172.

Elles fournissent les résultats suivants :

$$\text{Deimos...... } a = 32'',6052 \pm 0'',1008, \quad \text{masse de Mars} = \frac{1}{3024348},$$

$$\text{Phobos...... } a = 12'',5304 \pm 0'',0321, \quad \text{masse de Mars} = \frac{1}{3400630}.$$

Enfin, les quelques observations de Deimos faites à Pulkova en septembre, par M. Wagner, avec une lunette de 15 pouces, donnent :

$$\text{Deimos...... } a = 32'',176 \pm 0'',121, \quad \text{masse de Mars} = \frac{1}{3146996}.$$

Hall regrette le peu d'observations des satellites faites en Europe, surtout de Phobos, qui n'aurait été aperçu qu'à Greenwich et à Oxford; il l'attribue en partie aux difficultés provenant des latitudes trop septentrionales des observatoires européens, en partie à l'imperfection de quelques-uns des instruments.

La valeur moyenne de la masse de Mars, d'après ces trois groupes d'observations et en ayant égard à leur degré probable d'exactitude, est

$$m = \frac{1}{3107713},$$

résultat très-concordant avec celui de Hall et donnant la plus grande confiance dans la valeur de celui-ci.

La masse de Mars a fréquemment changé de valeur depuis Laplace, et toujours en diminuant; Laplace assignait à la masse de Mars la valeur

$$m = \frac{1}{1846082};$$

Delambre la réduisit à

$$m = \frac{1}{2546320};$$

les *Éphémérides américaines* donnent, d'après Burckhardt,

$$m = \frac{1}{2680337};$$

les *Tables du Soleil* de Hansen et Olufsen donnent

$$m = \frac{1}{3200900};$$

Le Verrier, dans ses *Annales*, adopte d'abord la valeur de Burckhardt, puis la réduit à

$$m = \frac{1}{2994790},$$

et, dans le XI[e] Volume, la réduit encore à

$$m = \frac{1}{2812526};$$

Hall, d'après ses observations de Washington, a trouvé, comme on l'a vu déjà,

$$m = \frac{1}{3093500 \pm 3295}.$$

Les éléments trouvés des orbites des satellites montrent qu'ils se meuvent tous deux dans un plan très-voisin de l'équateur de Mars et permettent de déduire toutes les particularités de leurs mouvements. Le mouvement horaire aréocentrique de Phobos est de 47°,033; la rapidité de ce mouvement et sa proximité de Mars doivent produire des effets très-curieux pour un observateur placé sur la planète; il atteint et dépasse l'autre satellite Deimos, dont le mouvement horaire est seulement de 11°,882; leurs distances respectives à Mars sont de 26800 et 10700 kilomètres pour Deimos et Phobos. Le rayon de la planète étant de 3885 kilomètres, la parallaxe horizontale de ce dernier satellite atteint 21 degrés.

La grandeur des satellites n'est pas bien connue; peut-être est-on seulement en droit de dire qu'ils sont fort petits. Une détermination photométrique du professeur Pickering, directeur de l'Observatoire de Harvard College (Cambridge, États-Unis), d'après des observations encore inédites, assigne à Deimos un diamètre de 11 kilomètres et un de 13 kilomètres à Phobos. L'astronome irlandais Wentworth Erck attribue à Deimos un diamètre de 26 kilomètres; ses observations sont publiées dans l'*Astronomical Register*, janvier 1878. Quant à l'éclat des satellites, d'après l'examen de toutes les observations connues et l'opinion des observateurs, Hall considère que Deimos, pendant l'opposition et à son élongation, est de la douzième grandeur de l'échelle d'Argelander; Phobos est un peu plus brillant.

Il est très-important de déterminer l'éclat apparent des satellites, car on peut, d'un côté chercher d'avance les oppositions favorables de Mars où ils seront visibles, d'un autre se rendre compte des causes d'insuccès de leurs observations jusqu'à ce jour.

Si r et Δ sont les distances d'un corps au Soleil et à la Terre, l'éclat de ce corps réfléchissant est représenté par $\frac{c}{r^2\Delta^2}$, c étant une constante.

D'après cela, Hall dressa le Tableau suivant, en prenant pour unité d'éclat l'éclat de Deimos, vu le 1er octobre 1877 dans l'équatorial de 9,6 pouces de l'Observatoire naval des États-Unis; la déclinaison de Mars ayant de l'influence sur l'éclat, est donnée en regard des coefficients

	Dates.	Éclat.	Déclinaison.	Remarques.
			°	
1783.	2 octobre.........	1,12	− 0,7	Observations d'Herschel.
1798.	2 septembre........	1,35	−14,3	»
1815.	17 octobre..........	0,97	+ 6,7	»
1830.	13 septembre........	1,27	− 5,9	»
1843.	4 juin.............	0,79	−25,3	»
1845.	18 août.............	1,38	−19,4	»
1847.	23 octobre..........	0,86	+13,3	»
1860.	22 juillet...........	1,21	−27,5	»
1862.	29 septembre........	1,13	+ 1,9	Observations de d'Arrest.
1864.	23 novembre........	0,55	+23,8	»
1875.	28 juin.............	0,94	−27,7	»
1877.	11 août.............	1,14	−10,2	Date de la découverte.
1877.	2 septembre........	1,35	−11,9	»
1877.	1er octobre.........	1,00	−12,5	»
1877.	15 octobre..........	0,75	−11,3	»
1877.	31 octobre..........	0,52	− 8,9	»
1879.	10 octobre..........	0,63	+18,4	»
1879.	4 novembre........	0,73	+18,3	»
1879.	29 novembre........	0,56	+17,2	»

Herschel s'est trouvé, en 1783, à peu près dans les mêmes conditions qu'au moment de la découverte. Les oppositions les plus favorables ont été celles de 1798, 1830, 1845, 1862 et 1877; en 1860 et 1875, la grande déclinaison sud de la planète rendait les observations très-difficiles pour les observatoires septentrionaux. Les satellites seront visibles du 10 octobre au 29 novembre 1879, et les observations seront favorisées par la faible distance zénithale.

8. Pour faciliter les observations de 1879, il reste à établir les éphémérides pour cette année. Les éléments en sont rapportés à midi moyen de Greenwich ; les quantités f, F, g, G sont les auxiliaires de Bessel, calculées pour la position de l'orbite de Deimos, mais suffisantes en outre pour les éphémérides de Phobos. Les valeurs de u sont données pour chaque satellite, u_1 pour Phobos et u_2 pour Deimos; cet angle est estimé dans l'hypothèse d'orbites circulaires. Comme du 28 août 1877 au 1^{er} novembre 1879 il y aura 629 révolutions de Deimos et 2490 de Phobos, les erreurs probables de périodicité de ces satellites produiront les erreurs probables suivantes sur leurs longitudes :

Pour Deimos........ $\Delta u = \pm\ 2^\circ,62,$
Pour Phobos........ $\Delta u = \pm 36^\circ,53.$

L'erreur de l'angle de position provenant de Δu sera donnée par la relation

$$\Delta p = \frac{a}{\rho s}\left[f \cos p \cos(\mathrm{F} + u) - g \sin p \cos(\mathrm{G} + u)\right] \Delta u,$$

ρ étant la distance de Mars à la Terre. Pour Deimos l'erreur probable sera très-faible, et pour Phobos elle ne peut produire aucune erreur dans le nombre de révolutions accomplies par ce satellite.

Éphémérides de 1879.

Greenwich. T. M.	log f.	F.	log g.	G.	Phobos. u_1.	Deimos. u_2.	Aberration.
1879		° ′		° ′	°	°	m
Oct. 10,0	9,91248	349.19,2	9,77912	328.43,3	203,14	109,69	—4,4
12,0	9,91240	349.31,1	9,77974	328.40,3	300,73	320,02	—4,4
14.0	9,91227	349.47,4	9,78053	328.39,1	38,32	170,35	—4,3
16 0	9,91213	350. 8,4	9,78147	328,39,4	135,91	20,68	—4,2
18.0	9,91192	350.33,9	9,78257	328.41,3	233,50	231,01	—4,2
20.0	9,91173	351. 3,5	9,78381	328.44,8	331,08	81,34	—4,2
22.0	9,91152	351.37,7	9,78517	328.49,8	68,67	291,68	—4,1
24.0	9,91129	352.15,6	9,78665	328.56,5	166,26	142,01	—4,1
26.0	9,91105	352 57,3	9,78824	329. 4,6	263,85	352,34	—4,1
28 0	9,91083	353.42,3	9,78990	329 14,0	1,43	202,67	—4,0
30.0	9,91062	354.30,3	9,79163	329.24,9	99,02	53,00	—4,0
Nov. 1.0	9,91042	355.21,1	9,79340	329.37,1	196,61	263,33	—4,0
3.0	9,91026	356.14,1	9,79520	329 50,6	294,20	113,66	—4,0
5.0	9,91012	357, 8,8	9,79701	330. 5,0	31,78	323,99	—4,0
7.0	9,91002	358. 4,8	9,79881	330.20,2	129,37	174,32	—4,0
9.0	9,90996	359. 1,6	9,80057	330.36,1	226,96	24,65	—4,0
11.0	9,90994	359.58,5	9,80228	330.52,7	324,55	234,98	—4,0
13.0	9,90996	0.55,1	9,80391	331. 9,7	62,13	85,31	—4,1
15.0	9,91002	1.50,8	9,80553	331.26,1	159,72	295,64	—4,1
17.0	9,91011	2.45,1	9,80702	331.42,8	257,31	145,98	—4,1
19.0	9,91023	3.37,3	9,80845	331.58,9	354,90	356,31	—4,2
21.0	9,91038	4.27,1	9,80977	332.14,4	92,49	206,64	—4,2
23.0	9,91054	5.14,2	9,81100	332.29,2	190,08	56,97	—4,3
25.0	9,91074	5.58,1	9,81213	332.42,7	287,66	267,30	—4,3
27 0	9,91093	6.38,7	9,81314	332.55,3	25,25	117,63	—4,4
29 0	9,91112	7.15,5	9,81407	333. 6,5	122,84	327,96	—4,5

Dans cette Table, les valeurs de u sont données en degrés et en décimales de degré; celles du mouvement diurne, estimées de la même manière, et celles des moyennes distances des satellites sont les suivantes :

Phobos....... $a = 12'',9531$, $\mu = 1128°, 794$.
Deimos....... $a = 32'',3541$, $\mu = 285°,1645$.

L'angle de position et la distance seront donnés par les formules

$$s \sin p = \frac{a}{\rho} f \sin(F + u)$$

et

$$s\cos p = \frac{a}{\rho}\, g \sin(G + u).$$

La valeur de u se tirera par interpolation des valeurs de u_1 ou de u_2, suivant le cas.

Ainsi, pour avoir la position de Deimos le 20 octobre 1879, on prend u dans la Table précédente et l'on a le calcul suivant :

$u = 81°.20',4$	$\log a = 1,5099$	
$F = 351.\ 3,5$	$\log \rho = 9,7002$	
$G = 328.44,8$		
$F + u = 72.24$	$\sin(F + u) = 9,9792$	$\sin(G + u) = 9,8848$
$G + u = 50.\ 5$	$f = 9,9117$	$g = 9,7838$
	$\frac{a}{\rho} = 1,8097$	$\frac{a}{\rho} = 1,8097$
	$s \sin p = 1,7006$	
	$s \cos p = 1,4783$	$p = 59°,06$
	$\sin p = 9,9333$	$s = 58'',52$

Si l'on veut de la position des deux satellites le 1er novembre 1879 à minuit moyen de Washington, qui correspond à $17^h 8^m,2$ de Greenwich, le calcul se fera comme il suit :

$$\Delta t = 17^h 8^m,2 = 0^j,7140.$$

Phobos.	*Deimos.*
$\log \Delta t = 9,85370$	$\log \Delta t = 9,85370$
$\log \mu = 3,05261$	$\log \mu = 2,45510$
$\Delta u = 805°.95'$	$\Delta u = 203°.61'$
196.61	263.33
$u = 282.34$	$u = 106.56$
$F = 355.40$	$F = 355.40$
$G = 329.42$	$G = 329.42$
$F + u = 278.14$	$F + u = 102.36$
$G + u = 252.16$	$G + u = 76.38$
$\log a = 1,1124$	$\log a = 1,5099$
$\log \rho = 9,6839$	$\log \rho = 9,6839$

$\sin(F+u)$	$9{,}9955n$	$\sin(G+u)$	$9{,}9789n$	$\sin(F+u)$	$9{,}9894$	$\sin(G+u)$	$9{,}9880$
f.......	$9{,}9103$	g.......	$9{,}7941$	f.......	$9{,}9103$	g........	$9{,}7941$
$\frac{a}{\rho}$........	$1{,}4285$	$\frac{a}{\rho}$.......	$1{,}4285$	$\frac{a}{\rho}$.......	$1{,}8260$	$\frac{a}{\rho}$........	$1{,}8260$
$s\sin p$....	$1{,}3343n$			$s\sin p$..	$1{,}7257$		
$s\cos p$...	$1{,}2015n$	p.......	$233°{,}63$	$s\cos p$...	$1{,}6081$	p........	$52°{,}67$
$\sin p$.....	$9{,}9059n$			$\sin p$....	$9{,}9004$		
		s.......	$26''{,}82$			s........	$66''{,}88$

A cet instant, l'erreur probable de u donnera les erreurs probables suivantes dans les angles de positions :

Pour Phobos....... $\pm 8°{,}09$,
Pour Deimos....... $\pm 0°{,}58$.

Ces exemples suffisent pour montrer la marche à suivre dans chaque cas particulier. Si l'on veut observer un satellite et comparer l'angle observé et la distance avec leurs valeurs estimées, on commencera par corriger le temps de l'observation de l'aberration, avant de le rapporter au temps de Greenwich.

L'examen des éphémérides pour 1879 montre que les élongations des satellites auront lieu pour des angles de position de 53 degrés ou 233 degrés, le maximum de distance apparente sera de 27 secondes pour Phobos et de 67 pour Deimos. Les ellipses apparentes décrites par les satellites pendant cette opposition de Mars seront un peu plus excentriques que celles de 1877, et l'extrémité du petit axe de la trajectoire de Deimos ne sera qu'à quelques secondes du limbe de la planète. La déclinaison de la planète étant alors de 18 degrés Nord, il y a lieu de compter sur une excellente série d'observations.