# JOURNAL
DE
# MATHÉMATIQUES
## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE



YVON VILLARCEAU


**Origine géométrique et représentation géométrique des fonctions elliptiques, abéliennes et de transcendantes d'ordres supérieurs**


*Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série*, tome 4 (1878), p. 305-314.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1878_3_4__305_0>

# *Origine géométrique et représentation géométrique des fonctions elliptiques, abéliennes et de transcendantes d'ordres supérieurs ;*

PAR M. YVON VILLARCEAU.

Les géomètres, en s'occupant de la rectification des arcs de courbes, ont réussi à obtenir un certain nombre de représentations géométriques de quelques-unes des fonctions elliptiques; mais ils ne sont pas arrivés, autant que je le sache, à représenter, au moyen d'une courbe unique, l'ensemble des fonctions $\varphi = \mathrm{am}\, u$, $\cos \mathrm{am}\, u$, $\sin \mathrm{am}\, u$ et $\Delta\, \mathrm{am}\, u$. Il y a quatre ans, j'indiquai à mon savant confrère, M. Bouquet, la courbe du quatrième degré qui remplit ces conditions, et ce dernier exposa, dans ses leçons à la Faculté des Sciences, la propriété de cette courbe, qui se rapporte à la représentation géométrique des fonctions elliptiques.

Des recherches entreprises à ce sujet, il résulte qu'un géomètre belge, M. Werhulst, a constaté que la courbe dont il s'agit offre une représentation de la fonction $\mathrm{F}(c, \varphi)$ de Legendre. Plus préoccupé des fonctions $\mathrm{F}(c, \varphi)$ et $\mathrm{E}(c, \varphi)$ que des fonctions inverses, Werhulst a recherché et découvert une autre courbe, propre à la représentation de la fonction $\mathrm{E}(c, \varphi)$; mais il n'a pas remarqué que la courbe du quatrième degré, qui représente la fonction $\varphi = \mathrm{am}\, u$, fournit également la représentation géométrique des autres fonctions $\cos \mathrm{am}\, u$, $\sin \mathrm{am}\, u$ et $\Delta\, \mathrm{am}\, u$.

Je crois pouvoir expliquer comment on est resté si longtemps sans découvrir la courbe qui offre la représentation des quatre fonctions elliptiques fondamentales, en faisant remarquer qu'on s'est presque exclusivement attaché à l'une des deux évaluations de l'argument angulaire que nous offre la considération du cercle. L'une de ces évaluations est fournie par le rapport de l'*arc* au rayon, l'autre par le rapport du double secteur au carré du rayon : la première explique l'usage des dénominations de arc sin, arc tang, ...; la seconde, qui dérive de l'argument considéré sous un point de vue plus général, permet d'écrire, sous une même forme, les angles mesurés dans le cercle et les doubles secteurs mesurés dans l'hyperbole équilatère, puis de comprendre, dans une même représentation géométrique, les fonctions circulaires et les fonctions hyperboliques. Familiarisé depuis longtemps avec l'extension qu'il convenait de donner à la notion de l'argument, en le traitant comme un rapport *aréolaire*, je n'ai eu aucune difficulté à constater que les fonctions elliptiques fondamentales pouvaient être représentées au moyen d'une courbe unique du quatrième degré.

Je ne me bornerai pas à exposer la théorie très-élémentaire qui conduit à ce résultat; je me propose de montrer en même temps comment il est possible de passer logiquement, et par une induction naturelle, des relations entre les fonctions circulaires et leur argument, aux relations qui lient un nombre indéfini de fonctions transcendantes à leurs arguments, en prenant pour point de départ la considération des courbes algébriques et celle des *arguments aréolaires*.

Les courbes algébriques dont nous avons à nous occuper sont les courbes fermées, ayant une branche unique, et symétriques par rapport à deux axes rectangulaires : ces courbes ont, en conséquence, un centre qui est le point d'intersection des deux axes.

Soient $x$ et $y$ les coordonnées rectangulaires d'un point M d'une telle courbe, $r$ le rayon vecteur de ce point, $\varphi$ l'angle de ce rayon vecteur avec l'axe des $x$, compté positivement vers $y$, et $u$ l'argument aréolaire qui sera défini dans un instant; nous nous proposons d'établir les relations qui permettent d'exprimer les variables $r$, $\varphi$, $x$ et $y$ en fonctions de $u$.

Cela posé, dans une courbe quelconque, on a, entre les coordonnées $x$, $y$ et les coordonnées polaires $r$ et $\varphi$, les relations

$$(1)\qquad \frac{x}{r} = \cos\varphi, \quad \frac{y}{r} = \sin\varphi.$$

Soit S le double du secteur compris entre l'axe des $x$, le rayon vecteur et la courbe, on a

$$r^2 d\varphi = dS.$$

Si nous prenons pour argument aréolaire le rapport de S au carré du demi-grand axe $a$ parallèle à l'axe des $x$, nous aurons

$$(2) \qquad u = \frac{S}{a^2};$$

d'où, en vertu de l'équation précédente,

$$du = \frac{r^2}{a^2} d\varphi$$

et

$$(3) \qquad u = \int_0^\varphi \frac{r^2}{a^2} d\varphi.$$

Posons

$$(4) \qquad \frac{a^2}{r^2} = \Delta;$$

l'équation précédente pourra s'écrire

$$(5) \qquad u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta},$$

et $\Delta$ sera une fonction de $\varphi$, donnée par l'équation de la courbe; $u$ sera ainsi une fonction de $\varphi$ et, inversement, $\varphi$ sera une fonction de $u$, que nous noterons

$$(6) \qquad \varphi = \mathrm{am}\, u:$$

de cette manière, $\varphi$ désigne l'amplitude angulaire correspondante à l'argument aréolaire $u$ défini par l'équation (2). $\Delta$, étant une fonction de $\varphi$, sera, en vertu de (6), une fonction de $u$, que l'on désigne le plus souvent par $\Delta \mathrm{am}\, u$, lorsque l'on suppose $\Delta$ exprimé au moyen de $\mathrm{am}\, u$.

En résumé, nous avons à considérer les fonctions

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \mathrm{am}\, u \quad \text{ou} \quad u = \displaystyle\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta}, \\ \dfrac{x}{r} = \cos \mathrm{am}\, u, \quad \dfrac{y}{r} = \sin \mathrm{am}\, u, \quad \dfrac{a^2}{r^2} = \Delta \mathrm{am}\, u. \end{array} \right.$$

Ces relations offrent la représentation géométrique des quatre quantités $\operatorname{am} u$, $\cos\operatorname{am} u$, $\sin\operatorname{am} u$ et $\Delta\operatorname{am} u$.

Il s'agit actuellement de reconnaître quelles sont les courbes algébriques qui satisfont aux conditions spécifiées plus haut.

Ces courbes, étant symétriques par rapport aux axes coordonnés, ne devront contenir que des puissances paires de $x$ et $y$. Soit $2m$ le degré de leur équation; celle-ci aura la forme

$$x^{2m} + px^{2m-2}y^2 + qx^{2m-4}y^4 + \ldots + ty^{2m} + Z = a^{2m}, \tag{8}$$

où Z désigne l'ensemble des termes en $x$ et $y$ de degrés inférieurs à $2m$. (Nous justifierons, dans un instant, le choix de la constante qui figure au deuxième membre.)

Pour plus de facilité dans la discussion, nous remplacerons $x$ et $y$ par leurs expressions en coordonnées polaires, tirées de (1); nous aurons ainsi

$$\left.\begin{aligned} &r^{2m}(\cos^{2m}\varphi + p\cos^{2m-2}\varphi\sin^2\varphi + q\cos^{2m-4}\varphi\sin^4\varphi + \ldots \\ &\qquad + t\sin^{2m}\varphi) + r^{2m-2}\Phi_2 + r^{2m-4}\Phi_4 + \ldots \end{aligned}\right\} = a^{2m} \tag{9}$$

en désignant par $\Phi_2, \Phi_4, \ldots$ des fonctions entières de $\cos^2\varphi$ et $\sin^2\varphi$.

Or, si l'on suppose cette équation résolue par rapport à $r^2$, on obtiendra, sauf le cas tout particulier des racines égales, $m$ valeurs distinctes de $r^2$, qui pourront être réelles ou imaginaires, et fourniront autant de branches distinctes; donc nous serons certains de n'avoir qu'une seule branche réelle et de ne point abaisser le degré de la courbe, si nous égalons à zéro les fonctions $\Phi_2, \Phi_4, \ldots$, ou les coefficients des termes de l'équation (8), qui sont de degrés inférieurs à $2m$ et ont fourni ces fonctions. Nous devons ainsi supprimer de ladite équation l'ensemble des termes représentés par Z.

Dans ces conditions, l'équation (8) se réduit à

$$x^{2m} + px^{2m-2}y^2 + qx^{2m-4}y^4 + \ldots + ty^{2m} = a^{2m}. \tag{10}$$

Sous cette forme, on voit que la constante $a$ exprime la valeur du demi-axe parallèle aux $x$.

Si l'on pose

$$\left\{\begin{aligned} \Delta^m = {} & \cos^{2m}\varphi + p\cos^{2m-2}\varphi\sin^2\varphi \\ & + q\cos^{2m-4}\varphi\sin^4\varphi + \ldots + t\sin^{2m}\varphi, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

l'équation (9), suppression faite des termes en $\Phi_2, \Phi_4, \ldots$, donnera

$$(12) \qquad r^{2m}\Delta^m = a^{2m} \quad \text{ou} \quad r^2\Delta = a^2,$$

relations qui s'accordent avec l'équation (4).

La valeur de $\Delta$, tirée de (11), est celle qu'il s'agit d'introduire dans l'intégrale (7), pour obtenir $u$ en fonction de $\varphi$ ou inversement. L'équation (10) est celle de la courbe représentative des fonctions (7).

Il resterait à exprimer les conditions que doivent remplir les paramètres $p, q, \ldots, t$ pour que la courbe soit une courbe fermée; mais nous allons remplacer ces paramètres par d'autres, qui faciliteront la discussion, et nous donnerons les expressions des premiers en fonctions des seconds : il nous sera facile d'en déduire les conditions relatives à la fermeture de la courbe. Nous remplacerons le développement (11) par un produit de facteurs en nombre $m$, comme il suit :

$$(13) \quad \Delta^m = (\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)(\cos^2\varphi + b'^2\sin^2\varphi)(\cos^2\varphi + b''^2\sin^2\varphi)\ldots,$$

$b, b', b'', \ldots$ désignant les nouveaux paramètres.

Or la comparaison de cette expression avec le développement (11) permet d'écrire immédiatement les relations

$$(14) \qquad p = \Sigma b^2, \quad q = \Sigma b^2 b'^2, \quad \ldots, \quad t = b^2 b'^2 b''^2, \ldots,$$

en désignant par $\Sigma$ les sommes des combinaisons 1 à 1, 2 à 2, ..., des nouveaux paramètres $b^2, b'^2, b''^2, \ldots$.

Pour que la courbe soit fermée, il faut que $r^2$ ne devienne pas infini; donc, en vertu de (12), $\Delta$ ne doit pas s'annuler. Or cette condition sera remplie si les paramètres $b, b', b'', \ldots$ sont des quantités réelles, puisque les deux termes de chaque facteur ne peuvent s'annuler simultanément. Il résulte de (14) que les paramètres $p, q, \ldots, t$ doivent tous être positifs.

Soient $c, c', c'', \ldots$ des quantités liées à $b, b', b'', \ldots$ par les relations

$$(15) \qquad c^2 = 1 - b^2, \quad c'^2 = 1 - b'^2, \quad c''^2 = 1 - b''^2, \quad \ldots,$$

la valeur de $\Delta^m$ prendra la forme

$$(16)\qquad \Delta^m = (1 - c^2 \sin^2\varphi)(1 - c'^2 \sin^2\varphi)(1 - c''^2 \sin^2\varphi)\ \ldots,$$

familière aux géomètres.

Enfin, si dans la relation (12)

$$r^{2m}\Delta^m = a^{2m},$$

on met la valeur (13), et que l'on ait égard aux relations (1), on obtiendra cette équation de la courbe considérée

$$(17)\qquad (x^2 + b^2y^2)(x^2 + b'^2y^2)(x^2 + b''^2y^2)\ldots = a^{2m},$$

où le nombre des facteurs binômes du premier membre est égal à $m$.

*Courbes du deuxième ordre.* — Faisant $2m = 2$ ou $m = 1$, dans l'équation (17), et écrivant, pour plus de symétrie, A au lieu de $a$, on aura

$$(18)\qquad (x^2 + b^2y^2) = \mathrm{A}^2,$$

équation qui est celle d'une ellipse, dont le demi-axe parallèle aux $y$, étant désigné par B, est lié à $b$ et A par la relation

$$(19)\qquad b = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}.$$

La valeur (13) de $\Delta^m$ se réduit à

$$(20)\qquad \Delta = \cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi,$$

et l'intégrale (5) devient

$$(21)\qquad u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{b}\arg(\mathrm{tang} = b\,\mathrm{tang}\varphi)$$

On en déduit

$$(22)\qquad b\,\mathrm{tang}\varphi = \mathrm{tang}\,bu,$$

puis

$$1 + b^2\,\mathrm{tang}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2 bu};$$

multipliant par $\cos^2\varphi \cos^2 bu$, et ayant égard à (20), il vient

$$\Delta \cos^2 bu = \cos^2\varphi.$$

Nous extrairons les racines des deux membres de cette équation, en prenant le signe $+$, afin que $\varphi$ s'annule effectivement avec $u$; il viendra ainsi

$$\cos\varphi = \sqrt{\Delta}\cos bu.$$

De celle-ci et de (22), on déduit

$$\sin\varphi = \frac{1}{b}\sqrt{\Delta}\sin bu.$$

Si l'on met à la place de $\sqrt{\Delta}$ sa valeur $\frac{A}{r}$, tirée de (4), il vient, en multipliant tout par $r$ et ayant égard à (19),

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} r\sin\varphi &= B\sin\frac{A}{B}u,\\ r\cos\varphi &= A\cos\frac{A}{B}u,\end{aligned}\right.$$

relations qui feront connaître $r$ et $\varphi$ et tiennent lieu de la relation (22). On déduit de ces expressions, au moyen des formules (1),

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{x}{A} &= \cos\frac{A}{B}u\,[*],\\ \frac{y}{B} &= \sin\frac{A}{B}u.\end{aligned}\right.$$

Ces relations présentent la signification géométrique de $\frac{\cos}{\sin}\frac{A}{B}u$.

Considérons le cas du cercle : nous n'avons qu'à faire, dans les équations précédentes, $B = A$, et nous aurons

$$(25)\qquad \varphi = u,\quad \frac{x}{A} = \cos\varphi,\quad \frac{y}{A} = \sin\varphi.$$

---

[*] Ces formules s'obtiennent aisément, sans le secours du Calcul intégral. Circonscrivons à notre ellipse, dont A représente le demi-grand axe, un cercle de rayon A. Prolongeons l'ordonnée d'un point M jusqu'à la rencontre en $M_1$ avec le cercle, et

*Courbes du quatrième ordre.* — Soit $2m = 4$ ou $m = 2$, l'équation (17) devient

$$(x^2 + y^2 b^2)(x^2 + y^2 b'^2) = a^4; \tag{26}$$

c'est l'équation de la courbe du quatrième ordre, en coordonnées rectangulaires.

De (16) on tire

$$\Delta = \sqrt{(1 - c^2 \sin^2\varphi)(1 - c'^2 \sin^2\varphi)}. \tag{27}$$

L'intégrale que l'on obtient en introduisant la valeur (27) de $\Delta$ dans l'expression de $u$, équations (7), ou

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\varphi)(1 - c'^2 \sin^2\varphi)}} \tag{28}$$

est l'équation fondamentale des fonctions abéliennes. On serait donc fondé à donner à la courbe (26) la dénomination de *courbe des fonctions abéliennes,* en ce sens que cette courbe offre la signification géométrique des quatre fonctions qui portent ce nom.

L'équation de la même courbe, en coordonnées polaires, est

$$r^2 = \frac{a^2}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\varphi)(1 - c'^2 \sin^2\varphi)}}. \tag{29}$$

En attribuant à la constante $c'$ la valeur particulière

$$c' = 0, \tag{30}$$

---

soient $y_1$ l'ordonnée de $M_1$, et $S_1$ le double secteur correspondant : nous aurons

$$\frac{y}{y_1} = \frac{S}{S_1} = \frac{B}{A}.$$

Or on a, dans le cercle,

$$x = A \cos \frac{S_1}{A^2}, \quad y_1 = A \sin \frac{S_1}{A^2};$$

d'où, en vertu des précédentes relations,

$$\frac{x}{A} = \cos \frac{A}{B} \frac{S}{A^2}, \quad \frac{y}{B} = \sin \frac{A}{B} \frac{S}{A^2}.$$

Celles-ci s'identifient avec (24), en vertu de $u = \frac{S}{A^2}$.

la deuxième équation (15) nous donnera $b'^2 = 1$, et la valeur de $\Delta$ se réduira à

$$\Delta = \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}, \tag{31}$$

tandis que l'équation (17) deviendra

$$(x^2 + y^2)(x^2 + b^2 y^2) = a^4. \tag{31 bis}$$

La valeur (31) de $\Delta$ étant mise dans l'intégrale (7), on aura l'équation fondamentale des *fonctions elliptiques*

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}. \tag{32}$$

La courbe (31 *bis*) peut être appelée *courbe des fonctions elliptiques*, puisqu'elle offre la représentation géométrique des quatre fonctions ainsi désignées.

La même courbe a pour équation polaire

$$r^2 = \frac{a^2}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}. \tag{33}$$

*Courbes des ordres supérieurs.* — Il est clair que, si l'on attribue à l'exposant $2m$ les valeurs 6, 8, 10, ..., la formule (16) fournira une suite indéfinie de fonctions $\Delta$, et que l'on obtiendra, au moyen des formules (7), une suite de systèmes correspondants d'expressions de transcendantes d'ordres de plus en plus élevés, dont l'équation fondamentale est

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt[m]{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)(1 - c'^2 \sin^2 \varphi)(1 - c''^2 \sin \varphi)\ldots}} \tag{34}$$

ou

$$\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^m = (1 - c^2 \sin^2 \varphi)(1 - c'^2 \sin^2 \varphi)(1 - c''^2 \sin^2 \varphi)\ldots \tag{35}$$

(le nombre des facteurs binômes étant $m$, ou moindre que $m$); ces systèmes jouiront de la propriété commune d'être représentés géométriquement par la courbe algébrique (17)

$$(x^2 + b^2 y^2)(x^2 + b'^2 y^2)(x^2 + b''^2 y^2)\ldots = a^{2m}, \tag{36}$$

dont les paramètres $b^2, b'^2, b''^2, \ldots$ sont liés aux constantes $c^2, c'^2, c''^2, \ldots$ par les relations (15).

La considération des courbes de la forme (36) offre un mode de classement des transcendantes (34) qui n'est pas sans intérêt. Ce classement exclut les intégrales de la forme (34), dans lesquelles on introduirait, sous le radical, un nombre de facteurs binômes, supérieur au degré de ce radical.

---

Nous terminerons cet exposé en faisant voir comment il est facile de mettre en évidence, dans la théorie des *fonctions elliptiques*, les valeurs imaginaires de la fonction $u$.

Lorsqu'on veut étudier une fonction de deux variables liées entre elles, il convient de prendre tour à tour chacune d'elles pour variable indépendante. La quantité $u$, quand on y remplace $\Delta$ par sa valeur (31), est une fonction de $\varphi$, considéré comme variable indépendante; exprimons maintenant $u$ en fonction de $\Delta$ et $d\Delta$ : on a les relations

$$\begin{aligned}
\Delta^2 &= 1 - c^2\sin^2\varphi,\\
\Delta\, d\Delta &= - c^2 \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi,\\
c^2\sin^2\varphi &= 1 - \Delta^2,\\
c^2\cos^2\varphi &= \Delta^2 - b^2;
\end{aligned}$$

d'où

$$c^2\sin\varphi\cos\varphi = \pm\sqrt{(\Delta^2 - b^2)(1-\Delta^2)}$$

et

$$\frac{d\varphi}{\Delta} = \mp\frac{d\Delta}{\sqrt{(\Delta^2-b^2)(1-\Delta^2)}}.$$

En vertu de cette relation, et observant que $\Delta$ décroît quand $\varphi$ augmente à partir de zéro, la deuxième équation (7) donne

$$u = -\int_1^\Delta \frac{d\Delta}{\sqrt{(\Delta^2-b^2)(1-\Delta^2)}} = \int_\Delta^1 \frac{d\Delta}{\sqrt{(\Delta^2-b^2)(1-\Delta^2)}}.$$

La valeur de $u$ n'est réelle que pour les valeurs de $\Delta^2$ comprises entre $b^2$ et $+1$; hors de ces limites, elle devient imaginaire. La substitution de la variable $\Delta$ à la variable $\varphi$ aurait donc suffi pour faire reconnaître l'existence des valeurs imaginaires de la fonction $u$.