JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. DE SAINT-GERMAIN

Des surfaces sur lesquelles un point peut se mouvoir suivant une certaine loi

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 2 (1876), p. 325-330.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1876_3_2__325_0>

Des surfaces sur lesquelles un point peut se mouvoir suivant une certaine loi;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN,

Professeur à la Faculté des Sciences de Caen.

Considérons un point matériel M, de masse égale à l'unité, sollicité par une force F dont les projections sur trois axes rectangulaires sont, u étant une fonction donnée de x, y, z,

$$X = \frac{du}{dx}, \quad Y = \frac{du}{dy}, \quad Z = \frac{du}{dz};$$

l'équation $u =$ const. représente une surface de niveau dont l'intersection avec une surface quelconque S peut être appelée *ligne de niveau* sur S. Je me propose de déterminer cette dernière surface, de manière que le point M, obligé de rester sur elle, et abandonné sans vitesse initiale à l'action de F, décrive toujours une trajectoire C orthogonale à toutes les lignes de niveau; si, par exemple, M n'était sollicité que par la pesanteur, il devrait tomber sur la surface cherchée suivant une ligne de plus grande pente.

Désignons, selon l'usage, par p, q, r, s, t les dérivées partielles de z par rapport à x et à y, que fournirait l'équation de la surface S; le temps n'entre pas explicitement dans nos calculs, mais les dérivées des diverses variables par rapport à lui seront représentées par des lettres accentuées. Les équations du mouvement de M ont une forme bien connue :

$$x'' = X + \lambda p, \quad y'' = Y + \lambda q, \quad z'' = Z - \lambda.$$

En un point quelconque A de la trajectoire C passe une ligne de niveau H dont la tangente AB est perpendiculaire sur la normale à S. AN, et sur la direction AP de F; si donc α, β, γ sont les cosinus directeurs de AB, nous aurons

$$p\alpha + q\beta - \gamma = 0, \quad \alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0;$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{\alpha}{qZ + Y} = \frac{\beta}{-X - pZ} = \frac{\gamma}{pY - qX}.$$

La tangente AT à la trajectoire C doit être perpendiculaire sur AN et sur AB; donc

$$(2) \quad px' + qy' - z' = 0, \quad (qZ + Y)x' - (X + pZ)y' + (pY - qX)z' = 0.$$

La dernière de ces équations, différentiée par rapport au temps, donne

$$(3) \left\{ \begin{aligned} &(qZ + Y)x'' - (X + pZ)y'' + (pY - qX)z'' - Xz'(sx' + ty') \\ &\quad + Yz'(rx' + sy') + Z[s(x'^2 - y'^2) + (t - r)x'y'] \\ &\quad - (y' + qz')\left(x'\frac{dX}{dx} + y'\frac{dX}{dy} + z'\frac{dX}{dz}\right) \\ &\quad + (x' + pz')\left(y'\frac{dY}{dx} + y'\frac{dY}{dy} + z'\frac{dY}{dz}\right) \\ &\qquad\qquad + (qx' - py')\left(x'\frac{dZ}{dx} + y'\frac{dZ}{dy} + z'\frac{dZ}{dz}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on ajoute membre à membre les trois équations du mouvement, multipliées respectivement par $qZ + Y$, $-X - pZ$, $pY - qX$, on reconnaît que la somme des termes en x'', y'' et z'' dans l'équation (3) est nulle; les autres termes forment une fonction homogène du second degré en x', y', z'; on peut y remplacer ces dérivées par des quantités proportionnelles tirées du système (2),

$$\frac{x'}{(1 + p^2 + q^2)X - p(pX + qY - Z)} = \frac{y'}{(1 + p^2 + q^2)Y - q(pX + qY + Z)}$$
$$= \frac{z'}{(1 + p^2 + q^2)Z + pX + qY - Z}.$$

En faisant après la substitution quelques transpositions de termes, remplaçant $pY - qX$ par $p(Y + qZ) - q(X + pZ)$, enfin, en divisant par $(1+p^2+q^2)^2$, nous pourrons écrire l'équation (3) de la manière suivante :

$$(4)\left\{\begin{aligned}&(\mathrm{Y}+q\mathrm{Z})\Big\{\left(\frac{d\mathrm{X}}{dx}+p\frac{d\mathrm{Z}}{dx}\right)\mathrm{X}+\left(\frac{d\mathrm{X}}{dy}+p\frac{d\mathrm{Z}}{dy}\right)\mathrm{Y}+\left(\frac{d\mathrm{X}}{dz}+p\frac{d\mathrm{Z}}{dz}\right)\mathrm{Z}\\&\qquad+\frac{pr+qs}{(1+p^2+q^2)^2}(p\mathrm{X}+q\mathrm{Y}-\mathrm{Z})^2-\frac{p\mathrm{X}+q\mathrm{Y}-\mathrm{Z}}{1+p^2+q^2}\\&\qquad\times\left[r\mathrm{X}+s\mathrm{Y}+p\left(\frac{d\mathrm{X}}{dx}+p\frac{d\mathrm{Z}}{dx}\right)+q\left(\frac{d\mathrm{X}}{dy}+p\frac{d\mathrm{Z}}{dy}\right)-\frac{d\mathrm{X}}{dz}-p\frac{d\mathrm{Z}}{dz}\right]\Big\}\\&=(\mathrm{X}+p\mathrm{Z})\Big\{\left(\frac{d\mathrm{Y}}{dx}+q\frac{d\mathrm{Z}}{dx}\right)\mathrm{X}+\ldots+\frac{ps+qt}{(1+p^2+q^2)^2}(p\mathrm{X}+q\mathrm{Y}-\mathrm{Z})^2\ldots\Big\}.\end{aligned}\right.$$

C'est l'équation aux dérivées partielles du second ordre qui représente la surface cherchée; sa forme met en évidence l'intégrale première. Je fais, pour abréger,

$$\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2-\frac{(p\mathrm{X}+q\mathrm{Y}-\mathrm{Z})^2}{1+p^2+q^2}=\mathrm{V};$$

V est exprimé comme u en fonction de x, y, z; mais, pour les points de la surface S, z dépend de x et de y, u et V deviennent fonctions de ces deux seules variables, et c'est à ce point de vue qu'on peut les considérer dans l'équation (4); je prends la caractéristique ∂ pour désigner dans ce cas les dérivées partielles, qui sont liées aux dérivées partielles prises en regardant x, y, z comme indépendantes, par les relations

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dx}+p\frac{du}{dz},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{du}{dy}+q\frac{du}{dz},\quad \ldots,$$

et de même pour les autres variables; on se rappellera que X, Y, Z sont les dérivées partielles de u par rapport à x, y, z et qu'on a, par conséquent,

$$\frac{d\mathrm{Y}}{dz}=\frac{d\mathrm{Z}}{dy},\quad \frac{d\mathrm{Z}}{dx}=\frac{d\mathrm{X}}{dz},\quad \frac{d\mathrm{X}}{dy}=\frac{d\mathrm{Y}}{dx};$$

on voit alors que l'équation (4) revient à la suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}.$$

V et u dépendant tous deux de x et y ont leurs dérivées proportionnelles; l'une est une fonction arbitraire, φ, de l'autre, et en mettant dans V, $X^2+Y^2+Z^2$ en facteur, on pourra écrire l'intégrale première de l'équation (4)

$$(5)\qquad (X^2+Y^2+Z^2)\left[1-\frac{(pX+qY-Z)^2}{(1+p^2+q^2)(X^2+Y^2+Z^2)}\right]=\varphi(u).$$

Cette équation ne peut être elle-même intégrée généralement, mais elle donne une propriété géométrique des surfaces S. Soit i l'angle de la normale AN au point quelconque A avec la normale AP à la surface de niveau qui y passe; l'équation (5) revient à

$$(6)\qquad \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\sin i = F\sin i = \sqrt{\varphi(u)};$$

le sinus de l'angle sous lequel une surface de niveau coupe S varie aux divers points de la ligne H d'intersection en raison inverse de F ou du paramètre différentiel du premier ordre de la surface de niveau. Appelons A′ et A″ les points où la surface de niveau infiniment voisine rencontre la normale AN et la trajectoire C; on a

$$AA' = \frac{du}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\quad AA'' = \frac{AA'}{\sin i};$$

l'équation (6) exprime que la longueur analogue à AA″ est constante tout le long de H; deux lignes de niveau infiniment voisines interceptent des arcs égaux sur toutes leurs trajectoires orthogonales C, et celles-ci sont, d'après un théorème connu, des lignes géodésiques sur S. On aurait pu établir directement cette propriété et en tirer les équations (6), (5) et (4) par la marche inverse de celle que j'ai suivie. Pour démontrer que C est une ligne géodésique, je remarque que la tangente AT à cette courbe, la normale AN et la direction AP de F, toutes trois perpendiculaires à AB, sont dans un même plan; F peut se décomposer en deux forces, l'une suivant AT, qui produit l'accélération tangentielle, l'autre suivant AN; cette dernière et la réaction de la surface S sur le point M ont même direction, et, comme leur résultante donne l'accélération centripète de M, la normale principale de C et la normale à S sont confondues.

Quand on connaîtra S dans un cas particulier, on aura ses lignes de niveau et leurs trajectoires orthogonales; le mouvement sur l'une de ces dernières se déduira de l'équation des forces vives

$$v^2 = 2(u - u_0).$$

Je donnerai quelques exemples très-simples des surfaces que je viens de définir.

Supposons le point M attiré vers l'origine O des coordonnées par une force F qui dépende de la distance. Une surface de niveau quelconque est une sphère dont le centre est en O et sur laquelle F a une grandeur constante; cette sphère coupe S sous un angle constant (6), et le théorème de Joachimstahl permet d'en conclure que l'intersection est une ligne de courbure de S. La surface cherchée admet un système de lignes de courbure situées sur des sphères concentriques; voici un calcul simple qui permet d'en déduire le second système de lignes de courbure, situées, on le sait, dans des plans qui passent en O. Je désigne par d et δ les variations que subit un élément quand on se déplace, soit sur une ligne du premier système H, soit sur une du second C; l'équation des lignes de courbure et une combinaison de fractions donnent

$$\frac{\delta p}{\delta q} = \frac{\delta x + p\,\delta z}{\delta y + q\,\delta z} = \frac{\delta x + p\,\delta z + z\,\delta p}{\delta y + q\,\delta z + z\,\delta q} = \frac{\delta(x + pz)}{\delta(y + qz)}.$$

Ollinde Rodrigues a remarqué que $\frac{\delta p}{\delta q} = -\frac{dy}{dx}$; d'ailleurs $\frac{dy}{dx}$ est égal au rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ défini par les équations (1), où X, Y, Z sont proportionnels à x, y, z; donc

$$\frac{\delta(x + pz)}{\delta(y + qz)} = -\frac{dy}{dx} = -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{x + pz}{y + qz}, \quad \frac{x + pz}{y + qz} = k,$$

k étant constant tout le long de C; or $x + pz$ et $y + qz$ sont les coordonnées du point où la normale à S en x, y, z perce le plan des xy; les pieds des normales aux divers points de C sont sur une droite qui passe en O, et, comme la direction de XOY est quelconque, ces normales sont dans un plan passant par l'origine et contenant la ligne de courbure C cherchée. De la nature de ces deux systèmes, on conclut que S peut être engendré par une ligne plane quelconque dont le plan s'enroulerait sur un cône qui a son sommet en S. Un cas particulier est celui des surfaces sur lesquelles un point pesant tomberait toujours suivant une ligne de plus grande pente; elles peuvent être engendrées par une courbe plane dont le plan s'enroule sur un cylindre vertical.

Soient, en second lieu, $X = Rx$, $Y = Ry$, $Z = 0$, R étant une fonction donnée de la distance ρ à l'axe des z. Les surfaces de niveau sont des cylindres de révolution autour de OZ, et l'équation (5) peut, en désignant par f une fonction arbitraire, être mise sous la forme

$$1 + p^2 + q^2 = (px + qy)^2 f(\rho);$$

en remplaçant x et y par $\rho\cos\theta$ et $\rho\sin\theta$, cette équation se transforme dans la suivante :

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 + [\rho^2 - \rho^4 f(\rho)]\left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2 + \rho^2 = 0.$$

J'obtiens une intégrale complète de la forme $z = \psi(\theta) + \varpi(\rho)$, en posant

$$\psi'(\theta) = a, \quad [\rho^4 f(\rho) - \rho^2]\varpi'(\rho) = a^2 + \rho^2,$$

d'où

$$z = b + a\theta + \int \frac{d\rho}{\rho}\sqrt{\frac{a^2 + \rho^2}{\rho^2 f(\rho) - 1}};$$

a et b sont des constantes; nous avons un héliçoïde dont l'axe est OZ. Si l'on cherche son enveloppe en liant a et b par une relation arbitraire, on aura la forme générale de S; pour $a = 0$, on a des surfaces de révolution autour de OZ.

Supposons enfin que les surfaces de niveau soient des plans passant par OZ, et que les arcs de trajectoires compris entre deux de ces plans dont l'angle est donné aient une longueur constante, on trouve, avec les notations du paragraphe précédent, l'intégrale complète

$$z = b + a\theta + \int d\rho\sqrt{\frac{a^2 + \rho^2 - k^2}{k^2 - \rho^2}};$$

c'est encore un héliçoïde dont l'enveloppe représentera l'intégrale de l'équation (5).