JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HEINE

Lettre adressée à M. Resal

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 2 (1876), p. 155-157.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1876_3_2__155_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Lettre adressée à M. Resal;

PAR M. HEINE.

MONSIEUR,

Je fais appel à votre bienveillante impartialité en vous demandant d'accueillir les observations suivantes au sujet du Mémoire *Sur les fonctions de Legendre,* publié par M. Laurent dans le Cahier du mois de novembre 1875 de votre *Journal de Mathématiques*.

Avant la publication de mon Traité *Sur les fonctions sphériques*, les recherches sur ces fonctions se réduisaient en général à établir et à démontrer, de la manière la plus directe et la plus rigoureuse, les découvertes profondes de Laplace. C'est en considérant, en même temps que la fonction P (de Laplace et de Legendre), une nouvelle fonction Q, de seconde espèce, que j'ai été conduit aux résultats obtenus dans mon Ouvrage. Or, en parlant de mon livre, M. Laurent se contente de dire : « M. Heine a publié en Allemagne un Traité complet des fonctions X_n et de leurs conjuguées; mais ce Traité pourrait être considérablement simplifié en faisant usage du calcul des résidus. » Après avoir, de cette manière, cité mon nom, M. Laurent donne dans la suite de son Mémoire presque exclusivement mes résultats, à l'exception toutefois de ceux qu'il emprunte, sans les nommer, à Ivory, à Jacobi, à Dirichlet et à Neumann.

La formule (10) de M. Laurent

$$\Xi = \int_0^\infty \frac{d\varphi}{(x + \cosh\varphi\sqrt{x^2-1})^{n+1}}$$

a été trouvée par moi [p. 59, formule (19); p. 70, formule (21) de mon Traité].

L'article V de M. Laurent « sur un développement important » contient ma formule

$$\frac{1}{y-x} = \Sigma(2n+1)P^n(x)Q^n(y),$$

[formule (14) de mon Traité] avec cette seule différence que M. Laurent ne donne que plus tard, dans son article VII, à la fonction Q, la forme simple sous laquelle je l'ai présentée. C'est encore moi qui ai donné le théorème que le développement dont il s'agit est inadmissible, si la condition

$$\text{mod.}\,(x+\sqrt{x^2-1}) < \text{mod.}\,(y+\sqrt{y^2-1})$$

n'est pas remplie (§ 41 de mon Traité).

La fonction génératrice des quantités Q (Ξ de M. Laurent) a été également trouvée par moi [p. 57, formule (18) de mon Traité]. En voilà assez de mon droit; les lecteurs jugeront d'ailleurs s'ils trouvent, dans le Mémoire de M. Laurent, la rigueur des démonstrations, la filiation des idées et la généralité que j'ai obtenues dans mon livre.

Dans ses préliminaires (art. I), M. Laurent introduit les fonctions X_n par la formule de Lagrange, en se servant de la méthode de Jacobi [voir *Journal de Crelle,* vol. II, p. 223, ou le *Journal de M. Liouville,* vol. II, p. 105], et il parvient à la formule d'Ivory

$$X_n = \frac{1}{2^n.1.2\ldots n}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},$$

qu'il attribue à Rodrigues. Dans quel recueil, dans quelle publication se trouvent les titres de Rodrigues à cette découverte?

La formule (16) de M. Laurent

$$\Xi = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{Z_n dz}{z-x}$$

a été obtenue par M. François Neumann père [formule (24) de mon Traité].

L'article VIII de M. Laurent se trouve dans une brochure de M. Charles Neumann fils, qui prend pour point de départ mon développement de $(y-x)^{-1}$.

M. Laurent attribue à Laplace la formule (qui n'est admissible que pour des valeurs de x, dont la partie réelle est positive)

$$(8)\qquad X_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+1}},$$

mais sans donner le moyen de contrôler son assertion, en indiquant dans quel passage de ses Œuvres elle a été donnée. Cette assertion, en la supposant exacte, serait très-précieuse pour moi; car, malgré mes recherches, je n'ai pu trouver la formule (8) que dans le Mémoire de Jacobi (*Journal de Crelle*, vol. XXVI, p. 82, 85], et je serais heureux de pouvoir rectifier cette erreur (si c'en est une) dans la seconde édition de mon Traité, qui va paraître bientôt.

L'équation (6) de M. Laurent est l'expression connue de X_n, trouvée par Dirichlet (*voir* mon Traité, § 10) et simplifiée par M. Mehler (*Annales de Clebsch*, t. V, p. 141); mais la démonstration que M. Laurent en donne manque de rigueur.

Après avoir eu aussi longtemps le devoir de critiquer M. Laurent, je ne terminerai pas sans lui avoir fait mon compliment sur sa formule

$$\Sigma(2n+1)X_nZ_n = \frac{n+1}{z-x}(Z_{n+1}X_n - X_{n+1}Z_n),$$

de laquelle on peut réellement se servir d'une manière utile pour la démonstration de mon développement de $(y-x)^{-1}$.

Veuillez agréer, etc.

HEINE.

Halle-sur-Saale, 6 janvier 1876.