

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

J. LIOUVILLE

**Sur une intégrale définie**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2<sup>e</sup> série*, tome 19 (1874), p. 55-56.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1874\\_2\\_19\\_55\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1874_2_19_55_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

## SUR UNE INTÉGRALE DÉFINIE;

PAR M. J. LIOUVILLE.

L'intégrale dont je veux parler, et que je représente par A, est la suivante :

$$(1) \quad A = \int_0^{\pi} dx \varphi \left( \frac{\sin^2 x}{1 \pm 2a \cos x + a^2} \right),$$

où  $a$  désigne un paramètre constant et  $\varphi$  une fonction arbitraire soumise seulement aux restrictions imposées par la nature même de l'intégrale A dont la valeur doit rester finie et déterminée.

J'ai reconnu que, quand la constante  $a$  (ou plutôt sa valeur absolue) est  $< 1$ , on a simplement

$$(2) \quad A = \int_0^{\pi} \varphi(\sin^2 x) dx,$$

en sorte que le paramètre  $a$  n'influe pas du tout sur la valeur de A.

Si l'on suppose  $a > 1$ , il n'en sera plus ainsi. On aura alors

$$(3) \quad A = \int_0^{\pi} \varphi \left( \frac{\sin^2 x}{a^2} \right) dx.$$

Au reste, les deux équations (2) et (3) coïncident dans le cas limite de  $a = 1$ , et elles se déduisent toujours aisément l'une de l'autre par le changement de  $a$  en  $\frac{1}{a}$ , de sorte qu'il suffit d'établir par exemple l'équation (2) pour en conclure l'équation (3).

En prenant pour la fonction  $\varphi$  une simple puissance de la variable, on est conduit à des résultats obtenus jadis par Poisson, dans le XVII<sup>e</sup> Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. Cela seul suffirait pour fournir une démonstration rigoureuse de nos formules; mais j'engage nos jeunes lecteurs à en chercher une démonstration directe et générale. Ce sera pour eux un exercice utile.

