JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. DARBOUX

Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles et qui servent à exprimer des fonctions arbitraires entre des limites données

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 19 (1874), p. 1-18.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1874_2_19__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles et qui servent à exprimer des fonctions arbitraires entre des limites données;

PAR M. G. DARBOUX.

Dirichlet a le premier démontré d'une manière rigoureuse, dans un célèbre Mémoire inséré au tome XVII du *Journal de Crelle*, que toute fonction continue ou discontinue de deux angles θ et φ, qui est assujettie seulement à ne pas devenir infinie, est toujours développable en une série convergente ordonnée suivant ces fonctions de deux angles que les géomètres désignent sous le nom de *fonctions sphériques* ou *fonctions* Y_n *de Laplace*. Depuis, dans un nouveau travail lu, en 1850, à l'Académie de Berlin, et dont une traduction française a paru au tome II de ce Journal (2^e série) [*], il a étendu ses premières recherches en les appliquant à la solution d'un problème très-important dans

[*] DIRICHLET, *Sur une nouvelle formule pour la détermination de la densité d'une couche sphérique infiniment mince quand la valeur du potentiel de cette couche est donnée en chaque point de la surface*, t. II, 2^e série, p. 57.

la théorie du potentiel et connu sous le nom de *problème de Gauss*. Je me propose d'établir ici, par une voie nouvelle et plus simple que celle de Dirichlet, les principales propositions de cet illustre géomètre; j'indique même un cas assez étendu, et qui me paraît nouveau, dans lequel on peut développer en série une fonction qui devient infinie pour un ou plusieurs systèmes de valeurs des angles θ, φ. Il m'a suffi, pour obtenir ces résultats, de développer l'analyse que j'ai fait connaître, en 1866, dans mon enseignement, et dont M. Bertrand a bien voulu publier le résumé et les points essentiels dans son *Traité de Calcul intégral*.

Il me semble inutile de reprendre ici la théorie classique, et si souvent exposée, des fonctions Y_n; les lecteurs qui désireront en prendre connaissance pourront consulter soit le premier Mémoire de Dirichlet, soit une Thèse de M. O. Bonnet insérée au tome XVII de ce Journal (1re série), soit l'Ouvrage de M. Bertrand. On sait que, si l'on se propose de développer une fonction en une série ordonnée suivant les fonctions Y_n, les différents termes de la série s'obtiennent par des intégrales définies. Toute la difficulté des deux problèmes distincts traités par Dirichlet dans les Mémoires que nous venons de citer consiste à démontrer la convergence et à déterminer la somme des deux séries suivantes :

$$(\mathrm{A})\quad \sum \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^\pi \sin\theta'\,d\theta'\int_0^{2\pi} f(\theta',\varphi')\,P_n[\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')]\,d\varphi',$$

$$(\mathrm{B})\quad \sum \frac{(2n+1)^2}{4\pi}\int_0^\pi \sin\theta'\,d\theta'\int_0^{2\pi} f(\theta',\varphi')\,P_n[\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')]\,d\varphi'.$$

Dans ces deux séries, le signe P_n indique la fonction X_n de Legendre, dans laquelle on a remplacé l'argument x par

$$\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi').$$

Le terme général de chaque série est donc une fonction des deux angles θ, φ, et il faut prouver que les séries sont convergentes et déterminer leur somme pour des valeurs quelconques de ces angles, la fonction $f(\theta', \varphi')$ étant d'ailleurs entièrement arbitraire et n'étant assujettie qu'à la seule condition de ne pas devenir infinie dans les limites de l'intégration.

Mais on peut déjà notablement simplifier le problème en ramenant l'examen du cas général où θ, φ ont des valeurs quelconques à celui du cas où $\theta = 0$.

En effet, considérons θ, φ comme les coordonnées polaires d'un point fixe A à la surface d'une sphère de rayon 1; θ', φ' comme les coordonnées polaires d'un autre point M variable de cette sphère. Alors la fonction $f(\theta', \varphi')$ a une valeur déterminée pour chaque point M de la sphère, valeur qu'on peut représenter par $f(\mathrm{M})$. Le produit $\sin\theta' d\theta' d\varphi'$ représente l'élément $d\sigma'$ de la surface de la sphère; enfin l'arc de grand cercle $\widehat{\mathrm{AM}}$, qui réunit les deux points A, M, est donné par la formule

$$\cos\widehat{\mathrm{AM}} = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi').$$

Les termes généraux de nos deux séries prennent donc les formes suivantes :

$$\frac{2n+1}{4\pi}\int f(\mathrm{M})\,\mathrm{P}_n\left(\cos\widehat{\mathrm{AM}}\right)d\sigma', \quad \frac{(2n+1)^2}{4\pi}\int f(\mathrm{M})\,\mathrm{P}_n\left(\cos\widehat{\mathrm{AM}}\right)d\sigma',$$

indépendantes de tout système de coordonnées et où l'intégration est étendue à toute la surface de la sphère.

Si maintenant nous revenons au système de coordonnées polaires, mais en prenant pour nouveau pôle le point A, les deux séries (A) et (B) se transformeront dans les suivantes :

$$(\mathrm{A}') \qquad \sum\frac{(2n+1)}{4\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta' d\theta'\int_0^{2\pi} f_1(\theta', \varphi')\,\mathrm{P}_n(\cos\theta')\,d\varphi',$$

$$(\mathrm{B}') \qquad \sum\frac{(2n+1)^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta' d\theta'\int_0^{2\pi} f_1(\theta', \varphi')\,\mathrm{P}_n(\cos\theta')\,d\varphi',$$

qui ont les mêmes formes que les premières, dans lesquelles on supposerait $\theta = 0$.

Posons enfin

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta', \varphi')\,d\varphi' = \Phi(\theta').$$

$\Phi(\theta')$ sera la valeur moyenne de la fonction donnée $f(\theta, \varphi)$ sur le cercle décrit du point A comme pôle avec θ' comme rayon, et, si nous effectuons un dernier changement de variables en posant $x = \cos\theta'$, nos deux séries (A′), (B′) se transformeront dans les suivantes :

$$\sum \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} F(x) X_n dx, \tag{1}$$

$$\sum \frac{(2n+1)^2}{2} \int_{-1}^{+1} F(x) X_n dx, \tag{2}$$

$F(x)$ étant ce que devient la fonction $\Phi(\theta')$ quand on y remplace θ' en fonction de x.

Avant d'entrer dans l'examen des séries précédentes, nous rappellerons les formules suivantes, relatives aux fonctions X_n :

$$(2n+1) X_n = \frac{dX_{n+1}}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx}, \tag{3}$$

$$X_n = \frac{dX_{n+1}}{dx} + \frac{dX_{n-1}}{dx} - 2x \frac{dX_n}{dx}, \tag{4}$$

$$X_0 + 3X_1 + 5X_2 + \ldots + (2n+1) X_n = \frac{dX_{n+1}}{dx} + \frac{dX_n}{dx}. \tag{5}$$

Ces préliminaires étant admis, nous allons d'abord examiner la série (1), de beaucoup la plus importante.

I.

Désignons par S_{n+1} la somme des $n+1$ premiers termes de cette série. On aura

$$S_{n+1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} F(x) [X_0 + 3X_1 + 5X_2 + \ldots + (2n+1) X_n] dx, \tag{6}$$

ou, d'après l'équation (5),

$$S_{n+1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} F(x) \left(\frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n+1}}{dx} \right) dx. \tag{7}$$

Si nous supposons que la fonction $F(x)$ demeure finie et continue pour chaque valeur de x comprise entre -1 et $+1$, on pourra intégrer par parties de la manière suivante :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \left[\frac{1}{2}F(x)(X_n + X_{n+1})\right]_{-1}^{+1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F'(x)(X_n + X_{n+1})\,dx \\ &= F(1) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F'(x)(X_n + X_{n+1})\,dx. \end{aligned}$$

L'intégrale qui figure dans le second membre tend évidemment vers zéro quand n croît indéfiniment. En effet, pour des valeurs croissantes de n, X_n et X_{n+1} tendent vers zéro pour toute valeur fixe de x comprise entre -1 et $+1$. Chacun des éléments de l'intégrale tend donc vers zéro quand n croît, et l'on a

$$\lim S_{n+1} = F'(1) = \Phi(0). \tag{8}$$

La série est convergente et nous en connaissons la somme; c'est le résultat de Dirichlet.

La démonstration précédente, qui s'appuie sur l'intégration par parties, n'est valable que sous certaines conditions, et, avant de poursuivre ces recherches, nous allons examiner comment on doit la modifier dans le cas où la fonction $\Phi(\theta)$ ou $F(x)$, qui représente la moyenne des valeurs de $f(\theta, \varphi)$ sur des cercles décrits du point A comme pôle, est une fonction continue en général, mais présentant un nombre limité de discontinuités. Dans cette hypothèse, la fonction $F(x)$ deviendra discontinue pour certaines valeurs de x en nombre fini $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_p$, comprises entre -1 et $+1$; mais, dans l'intervalle de ces valeurs, elle demeurera continue et aura une dérivée finie en général, mais qui pourra devenir infinie pour un certain nombre de valeurs de x.

Alors, dans chacun des intervalles de l_h à l_{h+1}, on pourra appliquer l'intégration par parties et l'on aura

$$\begin{aligned} S_{n+1} = \left[\frac{1}{2}F(x)(X_n + X_{n+1})\right]_{-1}^{l_1} + \left[\frac{1}{2}F(x)(X_n + X_{n+1})\right]_{l_1}^{l_2} + \cdots \\ + \left[\frac{1}{2}F(x)(X_n + X_{n+1})\right]_{l_p}^{1} \\ - \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{l_1} + \int_{l_1}^{l_2} + \int_{l_2}^{l_3} + \cdots + \int_{l_p}^{1}\right) F'(x)(X_n + X_{n+1})\,dx. \end{aligned}$$

Cela posé, faisons croître n indéfiniment. La partie intégrée de S_n se réduit évidemment à $F(1)$; car les valeurs de X_n, X_{n+1}, pour $l_1, l_2, \ldots, l_p$, tendent vers zéro quand n augmente. La limite est donc la même que s'il n'y avait pas discontinuité.

Quant aux intégrales

$$\frac{1}{2}\int_{l_k}^{l_{k+1}} F'(x)(X_n + X_{n+1})\,dx,$$

qui forment la seconde partie de la formule, chacune d'elles, et par conséquent leur somme, tend vers zéro. Cela est évident si $F'(x)$ ne devient pas infini entre les limites de l'intégration; car les éléments de l'intégrale contiennent $X_n + X_{n+1}$ en facteur et, par conséquent, deviennent tous plus petits que toute quantité donnée quand n augmente indéfiniment.

Si, au contraire, $F'(x)$ devient infini pour une valeur α de x, on pourra isoler de l'intégrale précédente les intégrales singulières

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} F'(x)(X_n + X_{n+1})\,dx, \quad \int_{\alpha-\varepsilon'}^{\alpha} F'(x)(X_n + X_{n+1})\,dx.$$

Elles seront plus petites en valeur absolue (X_n étant plus petit que 1) que

$$F(\alpha+\varepsilon) - F(\alpha), \quad F(\alpha) - F(\alpha - \varepsilon').$$

On pourra donc choisir ε, ε' assez petits pour que ces intégrales soient plus petites, *quel que soit n*, qu'une quantité donnée, et l'on pourra ensuite prendre n assez grand pour rendre ce qui reste de l'intégrale

$$\int_{l_k}^{l_{k+1}} F'(x)(X_n + X_{n+1})\,dx,$$

après qu'on a retranché les deux intégrales singulières, plus petit aussi que toute quantité donnée; donc le cas où $F'(x)$ devient infini ne fait pas difficulté [*].

[*] Remarquons toutefois que nous supposons $F'(x)$ toujours de même signe dans le voisinage de α, ce signe pouvant différer pour les valeurs supérieures et pour les valeurs inférieures à α. Si $F'(x)$ devenait infini d'une autre manière, il faudrait employer les méthodes que nous indiquons plus loin pour le cas où $F(x)$ lui-même devient infini.

La démonstration précédente paraît, au premier abord, devoir comprendre moins de cas que celle de Dirichlet. L'illustre géomètre ne fait, en effet, aucune supposition explicite sur l'existence de la dérivée de la fonction que nous avons appelée $F(x)$; mais, si l'on examine attentivement sa démonstration, on verra que Dirichlet considère (*Journal de Crelle*, t. XVII, p. 47) une fonction $\Theta(\psi)$ et qu'il admet l'existence d'une dérivée pour cette fonction. Cette hypothèse nous paraît entraîner des restrictions équivalentes à celles qui forment la base de notre démonstration.

Il resterait à traiter le cas où la fonction qu'il s'agit de développer devient infinie pour un ou plusieurs systèmes de valeurs des variables indépendantes. Nous en réservons l'examen pour la fin de ce travail.

II.

Passons maintenant à l'étude de la série suivante, considérée aussi par Dirichlet dans son premier Mémoire :

$$\text{(C)} \quad \sum \int_0^{\pi} \sin\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} f(\theta', \varphi')\, P_n[\cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi')]\, d\varphi,$$

que l'on ramène, par le changement de variables déjà indiqué, à la forme

$$\sum \int_{-1}^{+1} \varphi(x) X_n dx.$$

Remarquons d'abord que le terme général de cette série tend vers zéro quand n croît indéfiniment. On pourra donc chercher, au lieu de la limite de la somme S_n des n premiers termes, celle de $\frac{S_n + S_{n-1}}{2}$. Nous aurons à faire usage de cette remarque.

Soit $f(x)$ une nouvelle fonction de x, et posons

$$(9) \qquad \sum_n = \int_{-1}^{+1} f(x)[X_0 + X_1 + \ldots + X_n].$$

Si nous substituons à la place de $X_0, X_1, \ldots, X_n$ leurs expressions déduites de la formule (4), nous aurons

$$\begin{aligned}
X_0 &= \frac{dX_1}{dx} \qquad\qquad - 2x\frac{dX_0}{dx},\\
X_1 &= \frac{dX_2}{dx} + \frac{dX_0}{dx} - 2x\frac{dX_1}{dx},\\
X_2 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
X_n &= \frac{dX_{n+1}}{dx} + \frac{dX_{n-1}}{dx} - 2x\frac{dX_n}{dx},
\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_n = \int_{-1}^{+1} f(x)\left(2\frac{dX_0}{dx} + \cdots + 2\frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n+1}}{dx} - \frac{dX_n}{dx}\right) dx\\
- 2\int_{-1}^{+1} xf(x)\left(\frac{dX_0}{dx} + \frac{dX_1}{dx} + \cdots + \frac{dX_n}{dx}\right) dx,
\end{aligned}$$

ou, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_n = [2(1-x)f(x)X_0 + X_1 + \ldots + X_n)]_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1} f(x)\left(\frac{dX_{n+1}}{dx} - \frac{dX_n}{dx}\right) dx\\
- 2\int_{-1}^{+1} \frac{d}{dx}[(1-x)f(x)](X_0 + X_1 + \ldots + X_n)dx,
\end{aligned}$$

ou enfin

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_{-1}^{+1} [2(1-x)f'(x) - f(x)](X_0 + X_1 + \ldots + X_n)dx\\
&\quad = \int_{-1}^{+1} f(x)\left(\frac{dX_{n+1}}{dx} - \frac{dX_n}{dx}\right) dx\\
&\qquad + [2(1-x)f(x)(X_0 + X_1 + \ldots + X_n)]_{-1}^{+1}.
\end{aligned}\right.$$

Supposons qu'on ait choisi $f(x)$ de manière à satisfaire à l'équation

$$\varphi(x) = 2(1-x)f'(x) - f(x);$$

on pourra prendre

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\int_1^x \frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{1-x}}$$

en choisissant la limite inférieure de l'intégrale de telle manière que $f(x)$ demeure fini quand $x = 1$. Alors, si $\varphi(x)$ est une fonction continue ou discontinue, demeurant finie ou devenant infinie, *pourvu que son intégrale soit toujours finie*, $f(x)$ sera une fonction toujours finie et continue, et les intégrations par parties que nous venons de faire seront parfaitement légitimes.

Posons

$$(11) \qquad S_n = \int_{-1}^{+1} \varphi(x)(X_0 + X_1 + \ldots + X_n)\,dx;$$

la formule (10) nous donnera

$$(12) \qquad \begin{cases} S_n = \displaystyle\int_{-1}^{+1} f(x)\left(\frac{dX_{n+1}}{dx} - \frac{dX_n}{dx}\right)dx \\ \qquad + 2[f(x)(1-x)(X_0 + X_1 + \ldots + X_n)]_{-1}^{+1}, \end{cases}$$

et l'on déduira facilement de cette équation, en y changeant n en $(n-1)$,

$$\frac{S_n + S_{n-1}}{2} = -2f(-1) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\left(\frac{dX_{n+1}}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx}\right)dx,$$

ou, en tenant compte de la formule (3) et remplaçant $f(-1)$ par sa valeur,

$$\frac{S_{n+1} + S_{n-1}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1-x}} - \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\,X_n\,dx.$$

Remarquons que l'intégrale

$$(2n+1)\int_{-1}^{+1} f(x)\,X_n\,dx$$

est le terme général d'une série considérée dans l'article précédent, et qui est toujours convergente quand $f(x)$ est, comme cela a lieu ici, toujours fini. Le terme général de cette série tend donc vers zéro, et l'on a

$$(13) \quad \lim S_n = \lim \frac{S_n + S_{n-1}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1-x}} = \int_0^{\pi} \varphi(\cos\gamma)\cos\frac{\gamma}{2}\,d\gamma.$$

C'est le résultat obtenu par Dirichlet (*Journal de Crelle*, t. XVII, p. 46).

III.

Venons maintenant à la série

$$\sum\int_{-1}^{+1}(2n+1)^2 X_n F(x)\,dx,$$

dont on peut mettre le terme général sous la forme

$$\int_{-1}^{+1}(2n+1)F(x)\,dx\left(\frac{dX_{n+1}}{dx}-\frac{dX_{n-1}}{dx}\right),$$

en vertu de la formule (3), et désignons par S_n la somme des $n+1$ premiers termes de cette série. On aura, après des réductions évidentes,

$$\begin{aligned}S_n = &\int_{-1}^{+1}F(x)\,dx\left[(2n+1)\frac{dX_{n+1}}{dx}+(2n-1)\frac{dX_n}{dx}\right]\\ &-4\int_{-1}^{+1}F(x)\,dx\left(\frac{dX_0}{dx}+\frac{dX_1}{dx}+\dots+\frac{dX_{n-1}}{dx}\right).\end{aligned}$$

En intégrant par parties, on trouve

$$(14)\left\{\begin{aligned}S_n = &\{F(x)[(2n+1)X_{n+1}+(2n-1)X_n-4X_0-4X_1-\dots-4X_{n-1}]\}_{-1}^{+1}\\ &+4\int_{-1}^{+1}F'(x)\,dx\,(X_0+X_1+\dots+X_{n-1})\\ &-\int_{-1}^{+1}F'(x)\,dx\,[(2n+1)X_{n+1}+(2n-1)X_n].\end{aligned}\right.$$

Le second membre se compose de trois parties. Pour en trouver la limite, nous ferons cette unique hypothèse : $F'(x)$ satisfait aux conditions, déjà indiquées, qui assurent la convergence de la série

$$\sum(2n+1)\int_{-1}^{+1}X_n F'(x)\,dx.$$

Alors $F(x)$ sera une fonction finie et continue; nos intégrations par parties seront permises, et, en outre, le terme général de la série précédente tendant vers zéro, il en sera de même des deux intégrales

$$\int n \mathrm{X}_n \mathrm{F}'(x)\, dx, \quad \int \mathrm{X}_n \mathrm{F}'(x)\, dx.$$

La troisième partie du second membre de la formule (14) aura donc zéro pour limite. Quant à la seconde, elle sera donnée par la formule (13), et la première s'obtient sans difficulté. On a, en réunissant tous ces résultats,

$$\lim \mathrm{S}_n = 2\mathrm{F}(-1) + \frac{4}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{F}'(x)\, dx}{\sqrt{1-x}}, \tag{15}$$

En résumé, nous avons étudié trois séries :

$$\sum (2n+1) \int f(\mathrm{M})\, \mathrm{P}_n\left(\cos \widehat{\mathrm{AM}}\right) d\sigma, \tag{A}$$

$$\sum (2n+1)^2 \int f(\mathrm{M})\, \mathrm{P}_n\left(\cos \widehat{\mathrm{AM}}\right) d\sigma, \tag{B}$$

$$\sum \int f(\mathrm{M})\, \mathrm{P}_n\left(\cos \widehat{\mathrm{AM}}\right) d\sigma, \tag{C}$$

et nous avons obtenu les propositions qu'on peut traduire géométriquement de la manière suivante.

Décrivons du point A comme centre, avec un rayon sphérique égal à γ, un petit cercle de la sphère, et soit $\varphi(\gamma)$ la moyenne des valeurs de la fonction $f(\mathrm{M})$ sur ce cercle :

1° La série (A) est convergente tant que $\varphi(\gamma)$ est une fonction finie et continue pouvant devenir discontinue pour un nombre limité de valeurs de γ, ayant une dérivée qui peut devenir infinie pour une ou plusieurs valeurs de γ. Dans ce cas, la somme de la série est $\Phi(0)$, c'est-à-dire la valeur moyenne de $f(\mathrm{M})$ sur un cercle de rayon infiniment petit décrit autour du point A.

2° La série (B) demeure convergente tant que $\frac{\varphi'(\gamma)}{\sin\gamma}$ demeure fini; la fonction $\varphi(\gamma)$ sera alors nécessairement finie et continue, et la somme de la série sera

$$2\varphi(\pi) - 2\int_0^{\pi} \frac{\varphi'(\gamma)\, d\gamma}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

3° La série (C) est toujours convergente, alors même que la fonction $\varphi(\gamma)$ devient infinie ou discontinue, pourvu que l'intégrale $\int \varphi(\gamma)\cos\frac{\gamma}{2}d\gamma$ conserve toujours une signification précise et demeure finie et continue. La somme de la série (C) est alors

$$\int_0^\pi \varphi(\gamma)\cos\frac{\gamma}{2}d\gamma.$$

Nous nous proposons de compléter ces propositions, à divers points de vue, dans les articles suivants.

IV.

En examinant les séries qui précèdent, nous avons indiqué des conditions qui *suffisent* à assurer la convergence de ces séries, mais qui ne sont pas toutes nécessaires, comme nous allons le voir. Il y aurait donc lieu de se poser d'abord le problème suivant :

Rechercher les conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence des trois séries (A), (B), (C).

Sans entrer dans l'examen détaillé de ce problème, nous allons cependant montrer que les séries précédentes peuvent demeurer convergentes quand les fonctions qu'elles doivent développer deviennent infinies. Nous allons étudier surtout la série (A), de beaucoup la plus importante de toutes.

Reprenons la formule (7), qui fait connaître la somme des $n+1$ premiers termes de la série, et qu'on peut écrire, en introduisant $\varphi(\gamma)$ au lieu de $F(x)$,

$$(16)\qquad S_{n+1} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi(\gamma)\frac{d}{d\gamma}[P_n(\cos\gamma) + P_{n+1}(\cos\gamma)]d\gamma.$$

Pour transformer cette expression et en obtenir la limite, nous rappellerons la formule de Laplace, qui donne la valeur approchée de P_n quand n est très-grand,

$$(17)\qquad P_n = \frac{2\cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2n\pi\sin\gamma}} + \frac{p}{n\sqrt{n}},$$

p étant une fonction inconnue, mais qui demeure inférieure, quel que soit n, à un nombre déterminé quand γ demeure compris entre deux quantités fixes plus grandes que zéro et plus petites que π. Nous ferons usage d'une expression toute semblable pour la dérivée de P_n :

$$(18)\qquad \frac{dP_n}{d\gamma} = \frac{-2\sqrt{n}\sin\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\pi\sin\gamma}} + \frac{p'}{\sqrt{n}}.$$

On déduit de cette dernière équation

$$(19)\quad \frac{d}{d'\gamma}(P_n + P_{n+1}) = \frac{-2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}\sin\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\cot\frac{\gamma}{2}} + \frac{p_1}{n\sqrt{n}},$$

où p_1 est toujours une quantité analogue à p.

Cela posé, revenons à la formule (16) et supposons, pour plus de netteté, que $\varphi(\gamma)$ devienne infini pour une seule valeur a de γ. Décomposons $\varphi(\gamma)$ en deux fonctions

$$\varphi(\gamma) = \varphi_1(\gamma) + \varphi_2(\gamma),$$

en assujettissant cette décomposition aux seules conditions suivantes : 1° $\varphi_2(\gamma)$ ne deviendra pas infini pour $\gamma = a$ ni pour toute autre valeur de γ; 2° $\varphi_1(\gamma)$ sera nul en dehors de l'intervalle de $(a - h')$ à $(a + h)$ comprenant l'infini a. Ces conditions laissent subsister une grande indétermination; on choisira, dans chaque cas particulier, la décomposition qui paraîtra la plus avantageuse ou celle qui s'offrira naturellement. Remarquons que l'on a, en vertu des conditions posées,

$$\varphi_2(0) = \varphi(0).$$

Ces points étant admis, l'intégrale (16) peut se décomposer en deux parties

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi_1(\gamma)\frac{d}{d\gamma}(P_n + P_{n+1})d\gamma = \frac{1}{2}\int_{a-h'}^{a+h}\varphi_1(\gamma)\frac{d}{d\gamma}(P_n + P_{n+1})d\gamma$$

et

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi_2(\gamma)\frac{d}{d\gamma}(P_n + P_{n+1})d\gamma.$$

Cette deuxième intégrale, où $\varphi_2(\gamma)$ demeure toujours fini, tend, d'après les résultats acquis, vers la valeur $\varphi_2(0)$ ou $\varphi(0)$. Tout dépend donc de l'examen de la première

$$(20) \qquad \frac{1}{2}\int_{a-h'}^{a+h} \varphi_1(\gamma)\frac{d(\mathrm{P}_n+\mathrm{P}_{n+1})}{d\gamma}d\gamma,$$

et de là résulte déjà une proposition remarquable :

Quand la fonction $\varphi(\gamma)$ devient infinie dans les limites considérées, la convergence de la série (A) ne dépend que de la manière dont varie la fonction dans le voisinage immédiat des valeurs de γ pour lesquelles elle devient infinie.

En appliquant maintenant la formule (19), nous voyons que l'intégrale (20), dont nous cherchons la limite, se décompose en deux parties

$$-\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{a-h'}^{a+h}\frac{\varphi_1(\gamma)\sin\left(n\gamma+\frac{\gamma}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\operatorname{tang}\gamma}}d\gamma \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{a-h'}^{a+h} p_1\varphi_1(\gamma)\,d\gamma.$$

La seconde partie peut être rendue infiniment petite quand n croît indéfiniment. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante, en étendant nos raisonnements au cas où il y a plusieurs infinis :

La série (A) ne sera convergente et n'aura pour somme $\varphi(0)$ que si les intégrales

$$(21) \qquad \sqrt{n}\int_{a-h'}^{a+h}\frac{\varphi_1(\gamma)\sin\left(n\gamma+\frac{\gamma}{2}-\frac{\pi}{4}\right)d\gamma}{\sqrt{\operatorname{tang}\gamma}},$$

relatives à chaque infini, ont une somme qui tende vers zéro quand n croît indéfiniment, h et h' étant fixes, mais aussi petits qu'on le veut.

Appliquons cette règle au cas, très-étendu et très-important, où, dans le voisinage de a, on peut mettre $\varphi(\gamma)$ sous la forme

$$\varphi(\gamma) = \frac{\mathrm{A}_1}{(\gamma-a)^p} + \psi_1(\gamma),$$

où p est, bien entendu, plus petit que 1. A_1 est une constante et $\psi_1(\gamma)$

désigne une fonction toujours finie. De cette équation on déduira facilement la suivante :

$$(22)\qquad \frac{\varphi(\gamma)}{\sqrt{\tang\frac{\gamma}{2}}} = \frac{A}{(\gamma-a)^p} + \psi(\gamma),$$

où A et ψ ont la même définition que A_1 et ψ_1. On pourra donc poser, dans l'intervalle de $a - h'$ à $a + h$,

$$\varphi_1(\gamma) = \frac{A\sqrt{\tang\frac{\gamma}{2}}}{(\gamma-a)^p},$$

et l'intégrale (21) sera ramenée à la forme

$$A\sqrt{n}\int_{a-h'}^{a+h} \frac{\sin\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{(\gamma-a)^p}\,d\gamma.$$

On peut même supposer, pour plus de généralité, que la formule (22) convienne seulement pour les valeurs de γ supérieures à a, et qu'une autre formule semblable doive être employée pour les valeurs de γ inférieures à a. Alors on aura à rechercher la valeur limite lorsque n grandit de deux expressions telles que

$$A\sqrt{n}\int_{a}^{a+h} \frac{\sin\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)d\gamma}{(\gamma-a)^p},\quad B\sqrt{n}\int_{a-h'}^{a} \frac{\sin\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)d\gamma}{(\gamma-a)^p}.$$

Il suffira de considérer la première; on peut évidemment y remplacer $\sqrt{n}$ par $\sqrt{n+\frac{1}{2}}$, puis $n+\frac{1}{2}$ par n, et l'on est ramené à chercher la limite de

$$\sqrt{n}\int_{a}^{a+h} \frac{\sin\left(n\gamma - \frac{\pi}{4}\right)d\gamma}{(\gamma-a)^p},$$

ou, en posant $n\gamma - na = u$,

$$(23)\quad n^{p-\frac{1}{2}}\cos\left(na-\frac{\pi}{4}\right)\int_0^{nh}\frac{\sin u\,du}{u^p}+n^{p-\frac{1}{2}}\sin\left(na-\frac{\pi}{4}\right)\int_0^{nh}\frac{\cos u\,du}{u^p}.$$

Lorsque n croît indéfiniment, les deux intégrales qui figurent dans l'expression précédente tendent vers les valeurs limites

$$\int_0^\infty\frac{\cos u\,du}{u^p}=\Gamma(1-p)\cos(1-p)\frac{\pi}{2},\quad \int_0^\infty\frac{\sin u\,du}{u^p}=\Gamma(1-p)\sin(1-p)\frac{\pi}{2}.$$

On voit donc :

1° Que si $p>\frac{1}{2}$, l'expression (23) croît sans limite;

2° Que si $p<\frac{1}{2}$, la limite de cette expression est zéro;

3° Que si $p=\frac{1}{2}$, l'expression, sans augmenter indéfiniment, n'a aucune limite déterminée.

Donc *on pourra développer la fonction* $f(\theta,\varphi)$ *en une série de fonctions* Y_n *tant que la fonction* $\varphi(\gamma)$, *déduite de la précédente, ne deviendra pas infiniment grande d'un ordre supérieur ou égal à* $\frac{1}{2}$ [*].

Cette proposition est confirmée dans les exemples particuliers étudiés par Poisson et Dirichlet.

Dirichlet n'a pas étudié au point de vue précédent la série (A), mais il a donné au sujet de la série (B), qui était l'objet principal de son deuxième Mémoire, une règle à laquelle on sera conduit en adoptant la marche suivante.

Nous avons vu que la série (B) sera convergente toutes les fois que la fonction $F'(x)=\frac{\varphi'(\gamma)}{\sin\gamma}$ est telle, que la série

$$\sum\int_{-1}^{+1}X_nF'(x)\,dx\quad\text{ou}\quad\sum\int_0^\pi P_n\varphi'(\gamma)\,d\gamma$$

soit convergente. Il suffira donc d'appliquer à la fonction $F'(x)$ les résultats que nous avons obtenus pour la série (A).

---

[*] La valeur $p=\frac{1}{2}$ est, on le voit, une *limite précise* qui sépare les cas pour lesquels le développement est possible de ceux dans lesquels la série serait divergente.

V.

Les trois séries que nous avons examinées sont des cas particuliers de la suivante :

$$\sum(2n+1)^\alpha \int f(\mathrm{M})\mathrm{P}_n\left(\cos\widehat{\mathrm{AM}}\right)d\sigma,$$

où α est un nombre entier positif quelconque. En donnant à α les valeurs 0, 1, 2, on retrouve les séries (C), (A), (B), qui font l'objet de ce travail. Je me propose de montrer, en le terminant, que les méthodes précédentes peuvent être appliquées pour des valeurs quelconques de α. Je prendrai comme exemple le cas où $\alpha = 3$; les autres se traiteraient de la même manière.

Supposons, pour plus de simplicité, que la fonction $\mathrm{F}(x)$, déjà définie et qui est la moyenne des valeurs de $f(\mathrm{M})$ sur un cercle, ait sa dérivée seconde finie pour toutes les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$. Alors les séries ayant pour termes généraux les intégrales

$$\int \mathrm{F}'(x)\mathrm{X}_n dx,\quad n\int \mathrm{F}'(x)\mathrm{X}_n dx,\quad n^2\int \mathrm{F}'(x)\mathrm{X}_n dx$$

seront convergentes, et ces trois intégrales tendront, par conséquent, vers zéro quand n croîtra indéfiniment.

On peut, en vertu de la formule (3), écrire le terme général de notre série

$$(2n+1)^2\int_{-1}^{+1}\mathrm{F}(x)\left(\frac{d\mathrm{X}_{n+1}}{dx}-\frac{d\mathrm{X}_{n-1}}{dx}\right),$$

et, par suite, si l'on désigne par S_n la somme des $n+1$ premiers termes, on aura, après quelques réductions,

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_n = &\int_{-1}^{+1}\mathrm{F}(x)dx\left[(2n+1)^2\frac{d\mathrm{X}_{n+1}}{dx}+(2n+1)^2\frac{d\mathrm{X}_n}{dx}\right]\\ &-8\int_{-1}^{+1}\mathrm{F}(x)dx\left[(2n-1)\frac{d\mathrm{X}_n}{dx}+(2n-3)\frac{d\mathrm{X}_{n-1}}{dx}+\cdots\right].\end{aligned}$$

Intégrons par parties, nous trouverons

$$\begin{aligned}
S_n = \Big\{ F(x)\Big[&(2n+1)^2\frac{dX_{n+1}}{dx} - (2n-1)^2\frac{dX_n}{dx} \\
&- 8(2n-1)\frac{dX_n}{dx} - 8(2n-3)\frac{dX_{n-1}}{dx} - \ldots\Big]\Big\}_{-1}^{+1} \\
&- \int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx\,[(2n+1)^2 X_{n+1} + (2n-1)^2 X_n] \\
&- 16\int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx\,(X_n + X_{n-1} + \ldots) \\
&+ 8\int_{-1}^{+1} F'(x)\,dx\,[(2n+1)X_n + \ldots].
\end{aligned}$$

La première intégrale qui figure dans cette formule tend vers zéro, d'après les remarques faites plus haut, quand n croît indéfiniment. Les deux derniers termes ont déjà été calculés, et le premier se trouve sans difficulté. On saura donc obtenir la somme de la série proposée.

Il resterait à démontrer l'expression approchée que nous avons admise pour $\frac{dP_n}{dy}$; je pourrai revenir sur cette question dans un autre article.