JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DIEU

Mouvement d'un point matériel sur une ligne fixe, eu égard au frottement

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 18 (1873), p. 1-24.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1873_2_18__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

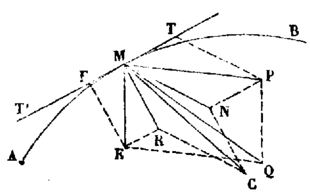
PURES ET APPLIQUÉES.

Mouvement d'un point matériel sur une ligne fixe, eu égard au frottement;

Par M. DIEU.

1. Soient AB (*fig.* 1) la courbe fixe, M(x, y, z) la position du mobile à la fin du temps t, P la force ou la résultante des forces agissant alors sur lui (angles directeurs α, β, γ), m sa masse, s la longueur de l'arc AM dont l'extrémité A est donnée, et ρ le rayon de courbure de AB en M.

Fig. 1.



Le mobile partant d'une de ses positions sur AB avec sa vitesse dans cette position et rendu libre aurait le mouvement qu'il a effectivement si, en supprimant la force P, on lui appliquait la force dont les composantes sont $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}$, $m\frac{d^2z}{dt^2}$. Soit Q cette force.

La force Q peut s'obtenir en composant avec P une force E (angles directeurs λ, μ, ν), qu'on nomme l'*effet* ou l'*action de la courbe* sur le point matériel en mouvement; on a, d'après cela,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \mathrm{P}\cos\alpha + \mathrm{E}\cos\lambda,\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \mathrm{P}\cos\beta + \mathrm{E}\cos\mu,\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \mathrm{P}\cos\gamma + \mathrm{E}\cos\nu.\end{aligned}\right.$$

Ces équations sont celles du mouvement d'un point libre de masse m sur lequel agissent à la fois les forces P, E. En y joignant les deux équations de la courbe et $\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$, on n'a en tout que six équations; cela ne suffit pas, car il y a sept inconnues x, y, z, E, λ, μ et ν.

2. La force appliquée P se décompose en deux : T suivant la tangente en M à AB, N suivant la trace du plan PMT sur le plan normal correspondant. On a

$$(2)\qquad \mathrm{T} = \mathrm{P}\left(\frac{dx}{ds}\cos\alpha + \frac{dy}{ds}\cos\beta + \frac{dz}{ds}\cos\gamma\right)$$

pour la première, si on la regarde comme positive ou négative, selon qu'elle est dans le sens du mouvement ou dans le sens opposé. La valeur de la seconde, qu'il convient de regarder toujours comme positive, est donnée par

$$(3)\qquad \mathrm{N} = \mathrm{P}\sqrt{1 - \left(\frac{dx}{ds}\cos\alpha + \frac{dy}{ds}\cos\beta + \frac{dz}{ds}\cos\gamma\right)^2},$$

car elle est perpendiculaire à la première.

L'action E de la courbe sur le mobile se décompose de même en deux forces, l'une F tangentielle, l'autre R suivant la trace du plan EMF sur le plan normal en M. On admet que la première, qu'on nomme le *frottement de la courbe,* est de sens opposé au mouvement; la seconde se nomme la *résistance normale* ou simplement la *résistance* de la courbe (les forces R et N sont en général suivant deux normales différentes).

La force Q est la résultante des quatre forces T, F (tangentielles) et N, R (normales); elle est aussi (mouvement d'un point libre) la résultante de la force positive ou négative $m\frac{dv}{dt}$ correspondant à l'accélération tangentielle et de la force centripète $\frac{mv^2}{\rho}$, v désignant la vitesse du mobile dans la position M; donc $m\frac{dv}{dt}$ *est la résultante de* T, F, *et* $m\frac{v^2}{\rho}$ *celle de* N, R.

De la première partie de cette proposition on conclut immédiatement l'équation

$$(4) \qquad m\frac{dv}{dt} = \mathrm{T} - \mathrm{F}.$$

Multipliant le premier membre par $v\,dt$, le second par ds, on a

$$(5) \qquad \tfrac{1}{2}\,dmv^2 = (\mathrm{T} - \mathrm{F})\,ds.$$

Donc *la moitié de la différentielle de la force vive est égale à la différence entre les travaux élémentaires dus à la force appliquée et au frottement de la courbe fixe sur le mobile.*

Si l'on connaissait la loi du frottement, c'est-à-dire si l'on avait l'expression de F en fonction des quantités qui déterminent la force P et la courbe AB, il est clair que l'équation (4) suffirait avec celles de AB pour résoudre le problème, en employant d'ailleurs la formule (3) et des formules connues. L'observation et l'expérience conduisent à admettre, au moins quand v n'est pas trop grand, qu'on a

$$(6) \qquad \mathrm{F} = f\,\mathrm{R},$$

f étant une constante qu'on appelle le *coefficient du frottement,* et qui doit être assignée pour chaque point matériel et chaque courbe en particulier. Il ne reste alors qu'à chercher l'expression de la force R.

3. N est la résultante de P et d'une force T′ égale et contraire à T; les composantes de T′ suivant les axes ne diffèrent que par le signe de celles de T, savoir : $T\frac{dx}{ds}$, $T\frac{dy}{ds}$, $T\frac{dz}{ds}$: les composantes de N sont donc $P\cos\alpha - T\frac{dx}{ds}$, $P\cos\beta - T\frac{dy}{ds}$, $P\cos\gamma - T\frac{dz}{ds}$, soit X, Y, Z pour abréger. On tire de ces expressions la valeur de N donnée plus haut, et en les divisant par cette valeur on a les cosinus directeurs.

De même, R est la résultante de la force centripète $\frac{mv^2}{\rho}$ et d'une force N′ égale et contraire à N. La composante de la première suivant l'axe des x est $\frac{mv^2}{\rho}\frac{\rho}{ds}d\frac{dx}{ds} = \frac{mv}{dt}d\frac{dx}{ds}$, puisque le cosinus directeur correspondant est $\frac{\rho}{ds}d\frac{dx}{ds}$, et les composantes suivant les deux autres axes sont évidemment $\frac{mv}{dt}d\frac{dy}{ds}$, $\frac{mv}{dt}d\frac{dz}{ds}$; d'autre part, les composantes de N′ sont $-X$, $-Y$, $-Z$; on a donc pour R

$$\frac{mv}{dt}d\frac{dx}{ds} - X,\quad \frac{mv}{dt}d\frac{dy}{ds} - Y,\quad \frac{mv}{dt}d\frac{dz}{ds} - Z.$$

D'après cela, on trouve

$$(7)\quad R = \sqrt{\frac{m^2v^4}{\rho^2} + N^2 - 2\frac{mv}{dt}P\left(\cos\alpha\, d\frac{dx}{ds} + \cos\beta\, d\frac{dy}{ds} + \cos\gamma\, d\frac{dz}{ds}\right)},$$

en tenant compte de

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = N^2,\quad \frac{dx}{ds}d\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}d\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}d\frac{dz}{ds} = 0,$$

et

$$\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2 = \frac{ds^2}{\rho^2} = \frac{v^2dt^2}{\rho^2}.$$

Si la courbe AB est plane et si, en outre, la force P est constamment dirigée dans son plan, la force N′ est suivant une des deux parties de la normale proprement dite, en sorte que R est égal à la somme de N et de $\frac{mv^2}{\rho}$ ou à leur différence prise en valeur absolue. La quantité sous le radical dans la formule précédente est alors un carré; mais il faut avoir soin de mettre à la place de R, pour former chaque équation particulière provenant de l'équation générale,

$$m\frac{dv}{dt} = \mathrm{T} - f\mathrm{R}, \tag{8}$$

la valeur positive de la racine. Cela exige une discussion assez minutieuse, comme on le verra par des applications.

Il suffit de changer de signe les composantes de R pour avoir la *pression* du point matériel en mouvement sur la courbe; les composantes de l'action totale sont $\mathrm{P}\cos\alpha - m\frac{d^2x}{dt^2}, \ldots$, et l'on a encore $\mathrm{E} = \mathrm{R}\sqrt{1+f^2}$.

En égalant respectivement les composantes de la force Q suivant les axes aux sommes des composantes de T, F, N, R, dont Q est la résultante, on ne forme pas des équations distinctes de la précédente. D'une de ces équations

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = (\mathrm{T} - f\mathrm{R})\frac{dx}{ds} + \frac{mv}{dt}d\frac{dx}{ds},$$

on tire en effet

$$\mathrm{T} - f\mathrm{R} = m\frac{\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{v}{dt}d\frac{dx}{ds}}{\frac{dx}{ds}} = m\frac{\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{ds}{dt}\frac{d\left(\frac{dx}{dt}:\frac{ds}{dt}\right)}{dt}}{\frac{dx}{ds}}$$

$$= \frac{\frac{d^2x}{dt^2} - \left(\frac{ds}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}\right):\frac{ds}{dt}}{\frac{dx}{ds}} = m\frac{d^2s}{dt^2},$$

et les deux autres donneront évidemment le même résultat.

4. Quelle que soit la courbe fixe AB, si le mobile arrive ou est placé sans vitesse dans une position M, et si alors la composante tangentielle de la force appliquée P ne surpasse pas le frottement, il reste en repos dans cette position. Le frottement est, en effet, une *force passive* influant sur le mouvement quand il existe, mais incapable de le produire, et qui ne peut, dans le cas dont il s'agit, que faire équilibre à la composante tangentielle. L'équilibre ne s'établit pas seulement lorsque la composante tangentielle et le frottement sont de sens contraires quand la vitesse va s'annuler, mais encore lorsque ces forces sont de même sens; le frottement, dans ce dernier cas, change brusquement de sens à l'instant où la vitesse devient nulle.

Soit θ l'angle, nécessairement entre O et $\frac{\pi}{2}$, des directions de P et de N; on a $T = \pm P \sin\theta$ et $N = P\cos\theta$. Le frottement étant proportionnel à la pression, on a $F = fP\cos\theta$ lorsque $v = 0$, car alors $R = N$; la condition d'équilibre $F \geqq T$ revient donc à $f \geqq \operatorname{tang}\theta$. Soit encore λ l'angle aigu pour lequel $\operatorname{tang}\lambda = f$, et qu'on nomme l'*angle du frottement*, on a $\operatorname{tang}\theta \leqq \operatorname{tang}\lambda$ ou enfin $\theta \leqq \lambda$. D'après cela, si l'on décrit autour de TT', tangente en M à la courbe AB, le cône de révolution dont M est le sommet et dont le demi-angle est égal à $\frac{\pi}{2} - \lambda$, le point matériel arrivant en M sans vitesse y reste en équilibre quand la force P est dirigée hors de ce cône, quelle que soit sa grandeur; tandis que le mouvement continue sans interruption, soit dans le sens où il avait lieu lors de l'arrivée en M, soit dans le sens contraire, quand la direction de P est intérieure par rapport au cône. Dans le premier cas, le point matériel serait remis en mouvement par une variation de la force P, en suite de laquelle sa direction viendrait dans le cône.

Lorsque la direction de P est constante, la courbe AB se partage facilement en parties telles que l'angle θ est inférieur à λ sur les unes et, au contraire, supérieur à λ sur les autres; les premières renferment toutes les positions où il est possible que le mobile s'arrête.

5. *Prenons pour* AB *une droite indéfinie,* P *étant une force quelconque.*

En désignant par θ l'angle des directions de P et de sa composante normale N, et en considérant cet angle comme positif ou négatif, selon que la composante T se trouve dans le sens du mouvement ou dans le sens opposé, on a toujours

$$T = P \sin\theta, \quad N = P \cos\theta.$$

R est égal à N, car le rayon ρ est infini. L'équation (8) du n° 3 donne, d'après cela,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P}{m \cos\lambda} \sin(\theta - \lambda).$$

On n'a pas besoin d'une définition précise de la force P pour déduire de cette formule les circonstances essentielles du mouvement :

1° Si $\theta - \lambda$ est toujours positif, la vitesse croît sans cesse.

2° Si $\theta - \lambda$ est toujours nul, c'est-à-dire si la direction de P est toujours sur le cône du frottement (n° 4), le mouvement est uniforme.

3° Lorsque $\theta - \lambda$ est susceptible de valeurs négatives, la vitesse peut devenir nulle dans une certaine position. S'il en est ainsi, le point matériel reste en équilibre dans cette position quand on a ensuite $\theta^2 \leq \lambda^2$, ou bien le mouvement continue soit dans le sens précédent quand on a $\theta > \lambda$, soit en sens contraire quand on a $-\theta > \lambda$.

4° Lorsque $\theta - \lambda$ est toujours négatif, au moins à partir d'un certain instant, la vitesse finit nécessairement par devenir nulle, et alors l'équilibre ou le mouvement en sens contraire s'établit indéfiniment.

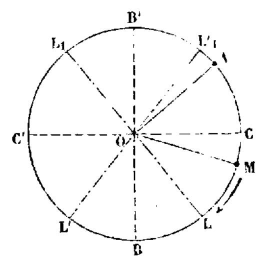
En particulier, quand la force P est constante, ou du moins quand P et θ ont des valeurs constantes, le mouvement est uniforme si l'on a $\theta = \lambda$, uniformément varié si l'on a $\theta \gtrless \lambda$. Pour $\theta > \lambda$, il continue indéfiniment dans le sens initial; pour $-\lambda < \theta < \lambda$, il cesse et le point reste en équilibre dans une certaine position où la vitesse est devenue nulle; enfin, pour $\theta < -\lambda$, il change de sens à partir de cette position, et continue ensuite indéfiniment de B vers A.

6. *La ligne fixe* AB *est une circonférence située dans un plan vertical, et la force* P *est le poids du mobile.*

Soient A (*fig.* 2) la position initiale du mobile, M sa position à la fin du temps t compté depuis l'instant où le mouvement commence, B et B′ le point le plus bas et le point le plus haut de la circonférence.

La position M sera déterminée par l'angle au centre AOM représenté par θ, qui sera regardé comme négatif de A en B et positif au delà

Fig. 2.



de B, si le mobile peut dépasser cette position, ce qui dépend de la grandeur de la vitesse initiale.

On a $v = a\frac{d\theta}{dt}$, le rayon de la circonférence étant représenté par a, et $P = mg$, $T = -mg\sin\theta$, $N = mg\cos\theta$ si l'on considère N comme positif ou négatif, sēlon qu'il se trouve sur le prolongement extérieur du rayon (positions au-dessous du diamètre horizontal CC') ou de M vers O (positions au-dessus de CC').

La force centripète est exprimée par $ma\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$, et il suffit d'ajouter $mg\cos\theta$ pour avoir la force R considérée de la même manière que N; on aura donc toujours

$$F = fm\left[a\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + g\cos\theta\right],$$

si toutefois on admet que f représente ici le coefficient du frottement pris avec le signe + ou avec le signe −, selon que la quantité $a\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + g\cos\theta$ aura une valeur positive ou bien une valeur négative.

L'équation générale (8) du n° **3** donne, d'après cela,

$$(1) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + f\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{g}{a}(\sin\theta + f\cos\theta) = 0.$$

Cette équation convient à tout le mouvement de A vers B sous la convention qui vient d'être indiquée pour f; elle s'applique même, comme on va le voir, au retour dans le sens contraire, lorsqu'il a lieu.

En posant $\frac{d\theta}{dt} = y^{\frac{1}{2}}$, d'où $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{dy}{d\theta}$, il vient

$$\frac{dy}{d\theta} + 2fy + \frac{2g}{a}(\sin\theta + f\cos\theta) = 0,$$

dont l'intégrale générale, facile à calculer, est

$$y = Ce^{-2f\theta} + \frac{2g}{a(1+4f^2)}[(1-2f^2)\cos\theta - 3f\sin\theta];$$

on a donc

$$(2) \qquad v^2 = \frac{2ga}{1+4f^2}[ce^{-2f\theta} + (1-2f^2)\cos\theta - 3f\sin\theta].$$

Avant de chercher comment il faut disposer de la constante arbitraire c pour avoir la valeur de v correspondant à chaque valeur de θ, quelques remarques sont nécessaires :

1° LL_1, $L'L'_1$ étant les diamètres qui font avec BB' des angles égaux à λ, les positions dans lesquelles le point matériel restera en équilibre, s'il y arrive sans vitesse, sont toutes sur les deux arcs LL', $L_1L'_1$, où le frottement, qui se réduit à $fmg\cos\theta$ pour $v = 0$, surpasse en valeur absolue la composante tangentielle.

2° Le mouvement ayant lieu dans le sens indiqué par la flèche, la composante tangentielle est de sens contraire au frottement sur LB et $B'L'_1$, mais elle a une grandeur moindre, et sur BL'B' elle est de même sens; la vitesse sera donc partout décroissante sur $LL'L'_1$.

3° La vitesse ne peut aller en croissant que sur L'_1L, mais il n'est pas impossible qu'elle soit décroissante au moins sur une partie de cet arc; il est facile de voir qu'elle n'y deviendra nulle dans aucune position. Le mobile ne peut effectivement rester nulle part en équilibre sur L'_1L; le mouvement devrait donc continuer au delà de toute position où la vitesse y serait nulle, en sorte que zéro serait un minimum de v^2; or l'équation $v^2 = 0$, c'est-à-dire

$$ce^{-2f\theta} + (1 - 2f^2)\cos\theta - 3f\sin\theta = 0,$$

et l'équation $\frac{d(v^2)}{d\theta} = 0$, c'est-à-dire

$$2fce^{-2f\theta} + (1 - 2f^2)\sin\theta + 3f\cos\theta = 0,$$

qui devraient, d'après cela, être vérifiées simultanément, donnent, par l'élimination de $e^{-2f\theta}$,

$$\operatorname{tang}\theta + f = 0, \quad \text{d'où} \quad \theta = -\lambda,$$

ce qui, en général, ne satisfait pas, et du reste conduirait au point L.

5° La vitesse devenant nulle pour une position sur $L'L_1$, ce qui peut n'avoir lieu qu'après un certain nombre de révolutions, le mobile reviendra de cette position vers le point B, car la composante tangentielle tend à déterminer le mouvement dans ce sens et surpasse le frottement contraire. L'intégrale particulière qui aura donné v, au moins depuis un certain temps jusqu'à l'instant dont il s'agit, ne pourra plus servir; il est, en effet, évident que la vitesse du mobile, lorsqu'il revient en sens contraire dans une position où il a passé, ne saurait reprendre la même valeur.

Soient f_1 la valeur positive de f, $-\alpha$ et v_0 les valeurs initiales de θ et de v. Si la quantité $\frac{v_0^2}{a} + g\cos\alpha$ est positive, il faut prendre $f = f_1$ dans l'équation (2), et la constante c est d'abord donnée par

$$c = e^{-2f_1\alpha}\left[\frac{1 + 4f_1^2}{2ga}v_0^2 - (1 - 2f_1^2)\cos\alpha - 3f_1\sin\alpha\right]; \tag{3}$$

mais pour $\frac{v_0^2}{a} + g\cos\alpha < 0$ (le point A est au-dessus de C), il faut premièrement prendre $f = -f_1$ dans l'équation (2), et l'on a

$$c = e^{2f_1\alpha}\left[\frac{1 + 4f_1^2}{2ga}v_0^2 - (1 - 2f_1^2)\cos\alpha + 3f_1\sin\alpha\right]. \tag{4}$$

Dans ce cas, la quantité $\frac{v^2}{a} + g\cos\theta$, d'abord négative à partir de $\theta = -\alpha$, passe par zéro pour une valeur $-\theta'$ de θ entre $-\alpha$ et $-\frac{\pi}{2}$, qui satisfait à l'équation $\frac{v^2}{a} + g\cos\theta = 0$, puis devient positive. A partir de $\theta = -\theta'$, il faut prendre $f = f_1$ dans l'équation (2) et

$$(5) \qquad c = e^{-2f_1\theta'}\left[\frac{1+4f_1^2}{2ga}v'^2 - (1-2f_1^2)\cos\theta' - 3f_1\sin\theta'\right],$$

v' désignant la valeur de v donnée par cette équation quand f et c sont déterminés, comme il vient d'être dit, pour le mouvement qui a lieu depuis $\theta = -\alpha$ jusqu'à $\theta = -\theta'$.

La constante c étant déterminée de l'une ou de l'autre des manières qui viennent d'être indiquées, suivant le cas qui se présente, on doit résoudre l'équation $v^2 = 0$, c'est-à-dire

$$ce^{-2f_1\theta} + (1-2f_1^2)\cos\theta - 3f_1\sin\theta = 0,$$

en s'aidant, si l'on veut, des courbes

$$y = ce^{-2f_1x}, \quad Y = 3f_1\sin x - (1-2f^2)\cos x.$$

Cette équation ne peut avoir de racine entre $-\alpha$ et $-\lambda$, d'après ce qui a été dit plus haut. Si elle en a une entre $-\lambda$ et λ, cette racine détermine une position entre L et L', où le mobile s'arrêtera et restera en équilibre. Si elle a une racine θ'' entre λ et $\pi-\lambda$, et si, en outre, $\frac{v^2}{a} + g\cos\theta$ reste positif jusqu'à $\theta = \theta''$, cette racine donne une position entre L' et L, d'où le mobile reviendra vers B. Si, au contraire, la quantité $\frac{v^2}{a} + g\cos\theta$ devient négative à partir d'une valeur θ_1 de θ, nécessairement supérieure à $\frac{\pi}{2}$, jusqu'à laquelle il ne se trouve pas de racine de l'équation précédente, il faut revenir à $f = -f_1$ et prendre

$$c = e^{2f_1\theta_1}\left[\frac{1+4f_1^2}{2ga}v_1^2 - (1+2f_1^2)\cos\theta_1 - 3f_1\sin\theta_1\right],$$

v_1 désignant la valeur de v qui résulte de l'équation (2) pour $f=f_1$ et de la formule (5).

On aura alors à résoudre l'équation

$$ce^{2f_1\theta} + (1 - 2f_1^2)\cos\theta + 3f_1\sin\theta = 0.$$

Si elle a une racine inférieure à $\pi - \lambda$, cette racine détermine une position au-dessous de L_1, d'où le mobile revient vers B. Quand il y a seulement une racine entre $\pi - \lambda$ et $\pi + \lambda$, le mobile arrive à une position entre L_1 et L'_1, où il reste en équilibre. Enfin, si aucune valeur ne satisfait jusqu'à $\pi + \lambda$, le mobile dépasse L'_1, et tout ce qui précède s'applique en considérant cette position comme initiale, la vitesse qui y est acquise étant prise pour v_0 et $\pi - \lambda$ pour α.

Lorsque le mobile revient d'une position sur $L'L_1$ vers le point B, l'équation (2) convient à ce retour, pourvu que l'on considère θ comme négatif à gauche de BB' et positif à droite. Si l'on désigne, comme plus haut, par θ'' la valeur correspondant à la position dont il s'agit, la constante c sera pour le retour déterminée d'abord par la condition que $v = 0$ réponde à $\theta = -\theta''$, f ayant la dernière valeur (f_1 ou $-f_1$) qu'il a fallu prendre.

Le cas d'une position initiale sur LB ou même BC'B' est compris dans la discussion précédente, qui s'applique, par conséquent, *mutatis mutandis*, à une vitesse initiale de sens contraire à la flèche.

De l'équation (2) et de la formule $v = a\frac{d\theta}{dt}$ on déduit

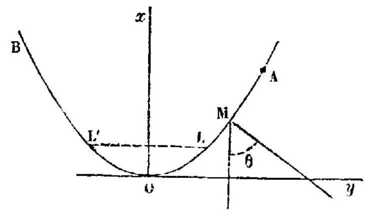
$$t = \sqrt{\frac{a(1+4f^2)}{2g}}\int\frac{d\theta}{\sqrt{ce^{-2f\theta} + (1-2f^2)\cos\theta - 3\sin\theta}}.$$

Il faudra prendre pour f dans cette formule tantôt $-f_1$, tantôt f_1, et successivement pour c les valeurs indiquées ci-dessus, du moins en général; t aura donc des expressions différentes pendant les périodes successives du mouvement. Lorsqu'on doit, par exemple, premièrement donner à f la valeur $-f_1$ en attribuant à c la valeur fournie par la formule (4), on n'aura t que jusqu'à l'instant où $\theta = -\theta'$; puis, en prenant ensuite $f=f_1$ et en tirant c de la formule (5), on aura le temps qui s'écoule depuis cet instant jusqu'à celui qui répond à une position quelconque du mobile dans la seconde période du mouvement; et ainsi de suite. Enfin la limite inférieure de l'intégration sera d'abord $-\alpha$, puis $-\theta'$, etc.

7. *La courbe fixe* AB *est une parabole dont l'axe est vertical et de sens opposé à la pesanteur; la force* P *est le poids du mobile.*

Soient Ox, Oy (*fig.* 3) l'axe et la tangente au sommet O. L'arc AM

FIG. 3.



compris entre les positions du mobile à l'origine du mouvement et à la fin du temps t étant désigné par s, et l'angle que la partie extérieure de la normale fait avec la direction de la pesanteur par θ, on a

$$\frac{dx}{ds} = -\sin\theta, \quad \frac{dy}{ds} = -\cos\theta \quad \text{et} \quad T = mg\sin\theta, \quad N = mg\cos\theta,$$

en considérant θ comme positif de A en O et négatif au delà de O.

De l'équation $y^2 - 2px = 0$ de la parabole on tire $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$; on a donc

$$y = p\tang\theta, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{p}{\cos^2\theta}.$$

Divisant membre à membre cette dernière formule et la seconde de celles qui précèdent, il vient

$$\frac{ds}{d\theta} = -\frac{p}{\cos^3\theta}, \quad \text{d'où} \quad v = -\frac{p}{\cos^3\theta}\frac{d\theta}{dt}.$$

Des formules connues $n = \frac{p}{\cos\theta}$, $\rho = \frac{n^3}{p^2}$, où n représente la normale, il résulte $\rho = \frac{p}{\cos^3\theta}$. On a donc la formule

$$R = m\left[\frac{p}{\cos^3\theta}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + g\cos\theta\right],$$

qui donnera toujours pour R une valeur positive, puisque θ reste entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

L'équation du mouvement est, d'après cela [(8), n° 3],

$$p\mathrm{D}_t\left(\frac{1}{\cos^3\theta}\frac{d\theta}{dt}\right) + g\sin\theta - f\left[\frac{p}{\cos^3\theta}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + g\cos\theta\right] = 0,$$

d'où

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + (3\tang\theta - f)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{g}{p}(\tang\theta - f)\cos^4\theta = 0. \tag{1}$$

En posant $\frac{d\theta}{dt} = z^{\frac{1}{2}}$, d'où $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{dz}{d\theta}$, on passe à l'équation linéaire

$$\frac{dz}{d\theta} + 2(3\tang\theta - f)z + \frac{2g}{p}(\tang\theta - f)\cos^4\theta = 0.$$

Comme $2\int(3\tang\theta - f)\,d\theta = -l\cos^6\theta - 2f\theta + \text{const.}$, l'intégrale générale est d'abord

$$z = e^{2f\theta}\cos^6\theta\left(\mathrm{C} - \frac{2g}{p}\int e^{-2f\theta}\frac{\tang\theta - f}{\cos^2\theta}d\theta\right)$$

d'après la règle connue, et en effectuant l'intégration indiquée on a

$$z \quad \text{ou} \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(\mathrm{C}e^{2f\theta}\cos^2\theta - \frac{g}{p}\right)\cos^4\theta.$$

Il faut que la constante C satisfasse à

$$\frac{v_0^2}{p^2}\cos^2\alpha = \mathrm{C}e^{2f\alpha}\cos^2\alpha - \frac{g}{p}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{C} = \left(\frac{v_0^2}{p} + g\,\text{séc}^2\alpha\right)\frac{e^{-2f\alpha}}{p};$$

car on doit avoir $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{v_0\cos^3\alpha}{p}$ pour $\theta = \alpha$, v_0 et α désignant les valeurs initiales de v et de θ; la vitesse est donc déterminée en fonction de θ par la formule

$$(2) \qquad v^2 = p^2 C e^{2f\theta} - pg \text{ séc}^2\theta,$$

en conservant C pour abréger au lieu de sa valeur.

Il résulte de l'équation générale (8), n° 3, et des expressions particulières de T et de R, que la quantité $\frac{dv}{dt}$, si elle est d'abord positive, devient négative à partir d'une certaine valeur de θ entre α et zéro; lorsque la vitesse ne décroît pas tout d'abord, elle finit donc par devenir décroissante à partir d'un maximum correspondant à une valeur de θ satisfaisant à l'équation $\frac{d(v^2)}{d\theta} = 0$ ou

$$(3) \qquad fpCe^{2f\theta} - \frac{g \sin\theta}{\cos^3\theta} = 0.$$

On aura $v = 0$, c'est-à-dire

$$(4) \qquad pCe^{2f\theta} - g \text{ séc}^2\theta = 0$$

pour une valeur θ' de θ entre α et $-\frac{\pi}{2}$, car le premier membre de cette équation, positif pour $\theta = \alpha$, devient infini négativement si l'on donne à θ la valeur $-\frac{\pi}{2}$.

Soient L et L' les points de la parabole où la tangente a sur Oy une inclinaison égale à l'angle du frottement λ, et où, par conséquent, $\theta = \pm \lambda$. La valeur θ' ne peut pas surpasser λ, car le mobile, arrivant sans vitesse dans la position entre A et L déterminée par cette valeur, ne pourrait y rester en équilibre, en sorte que la valeur nulle de v^2 correspondante serait un minimum, et devrait satisfaire aux équations (3) et (4); or l'élimination de l'exponentielle entre elles donne $f - \text{tang}\,\theta = 0$, d'où $\theta = \lambda$, ce qui, en général, ne satisfait pas à l'équation (3) et détermine d'ailleurs le point L.

Si θ' est entre λ et $-\lambda$, sans exclure ces limites, le mobile s'arrête et reste en équilibre dans la position sur LL' déterminée par $\theta = \theta'$.

Pour $\theta' < -\lambda$, le mobile, parvenu sans vitesse dans la position correspondant à $\theta = \theta'$ sur L'B, revient de cette position vers A. Les équations précédentes s'appliquent toutes à ce retour en prenant $v_0 = 0$, et pour α la valeur absolue de θ', si l'on considère θ comme positif à gauche de Ox et négatif à droite.

Quand la position initiale A est sur LOB, la vitesse décroît dès l'origine du mouvement. La discussion précédente subsiste du reste; on n'a donc pas besoin de considérer à part le cas d'une vitesse initiale telle, que le mobile remonte d'abord sur la courbe.

Pendant le mouvement de A vers B, on a

$$t = p\int_\theta^\alpha \frac{d\theta}{\cos^2\theta\sqrt{Ce^{2f\theta}\cos^2\theta - \frac{g}{p}}},$$

et lorsque le mobile revient d'une position extrême sur OB vers le point O, le temps écoulé depuis l'instant où le retour commence est donné par

$$t = \sqrt{\frac{p}{g}}\int_\theta^{-\theta'} \frac{d\theta}{\cos^2\theta\sqrt{\operatorname{séc}^2\theta'\cos^2\theta\, e^{2f(\theta'+\theta)} - 1}}.$$

8. *La courbe fixe est une cycloïde dont l'axe est vertical et de sens opposé à la pesanteur; la force est le poids du mobile.*

Si l'on prend les axes des coordonnées comme dans le cas de la parabole et le même angle auxiliaire, les quatre premières formules du numéro précédent s'appliquent. En désignant par a le rayon du cercle générateur, on a

$$x = a(1 - \cos 2\theta), \quad \text{d'où} \quad \frac{dx}{d\theta} = 4a\sin\theta\cos\theta, \quad \text{et} \quad \rho = 4a\cos\theta.$$

D'après cela,

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} : \frac{dx}{ds} = -4a\cos\theta, \quad v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -4a\cos\theta\frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{v^2}{\rho} = 4a\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \quad R = m\left[4a\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + g\right]\cos\theta.$$

L'équation générale [(8), n° 3] donne, par conséquent,

$$\frac{d\left(\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)}{dt} - f\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{g}{4a}(\sin\theta - f\cos\theta) = 0,$$

d'où

$$(1)\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} - (\operatorname{tang}\theta + f)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{g}{4a}(\operatorname{tang}\theta - f) = 0.$$

Si l'on pose $\frac{d\theta}{dt} = z^{\frac{1}{2}}$, d'où $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{dz}{d\theta}$, cette équation se ramène à

$$\frac{dz}{d\theta} - 2(\operatorname{tang}\theta + f)z + \frac{g}{2a}(\operatorname{tang}\theta - f) = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$z = e^{2f\theta}\operatorname{séc}^2\theta\left[C - \frac{g}{2a}\int(\operatorname{tang}\theta - f)e^{-2f\theta}\cos^2\theta\, d\theta\right],$$

car

$$2\int(\operatorname{tang}\theta + f)d\theta = 2f\theta - l\cos^2\theta + \text{const.}$$

Mais, abstraction faite des constantes arbitraires, on a

$$\begin{aligned}\int(\operatorname{tang}\theta - f)e^{-2f\theta}\cos^2\theta\, d\theta &= \tfrac{1}{2}e^{-2f\theta}\sin^2\theta - f\int e^{-2f\theta}\cos 2\theta\, d\theta\\ &= \tfrac{1}{2}e^{-2f\theta}\left(\sin^2\theta - f\frac{\sin 2\theta - f\cos 2\theta}{1+f^2}\right)\\ &= \frac{e^{-2f\theta}}{2(1+f^2)}(\sin\theta - f\cos\theta)^2 = \tfrac{1}{2}e^{-2f\theta}\sin^2(\theta-\lambda).\end{aligned}$$

L'intégrale première de l'équation (1) est donc

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{g}{4a}\,\frac{ce^{2f\theta} - \sin^2(\theta-\lambda)}{\cos^2\theta},$$

c étant la constante arbitraire.

v_0 et α désignant les valeurs initiales de v et de θ, on doit avoir $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{v_0}{4a\cos\alpha}$ pour $\theta = \alpha$; il faut donc prendre

$$c = \left[\frac{v_0^2}{4ga} + \sin^2(\alpha-\lambda)\right]e^{-2f\alpha},$$

et l'on a

$$(2) \qquad v^2 = 4ga[ce^{2f\theta} - \sin^2(\theta - \lambda),$$

en laissant c au lieu de sa valeur, pour abréger.

D'après l'équation générale précitée et les valeurs particulières de T et de R, la vitesse doit finir par diminuer sur AO, quand elle n'est pas tout d'abord décroissante. Soient L et L′ les points de la cycloïde où l'inclinaison de la tangente sur Oy est égale à l'angle du frottement. On voit, comme pour la circonférence et la parabole, que la vitesse ne deviendra pas nulle sur AL. Le mouvement devant continuer au delà d'une position sur AL où l'on aurait $v = 0$, une valeur nulle de v^2 sur cet arc serait effectivement un minimum, en sorte que la valeur correspondante de θ devrait satisfaire aux deux équations $v^2 = 0$, $\frac{d(v^2)}{d\theta} = 0$, c'est-à-dire

$$(3) \quad ce^{2f\theta} - \sin^2(\theta - \lambda) = 0 \quad \text{et} \quad cfe^{2f\theta} - \sin(\theta - \lambda)\cos(\theta - \lambda) = 0,$$

par conséquent à

$$\sin(\theta - \lambda)[f\sin(\theta - \lambda) - \cos(\theta - \lambda)] = 0,$$

qui s'en déduit par l'élimination de $e^{2f\theta}$; or cette dernière équation n'est évidemment vérifiée que par $\theta = \lambda$ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, ce qui ne donne pas $v = 0$.

Si le résultat $ce^{-\pi f} - \cos^2\lambda$ de la substitution de $-\frac{\pi}{2}$ à θ dans le premier membre de l'équation (3) était positif, la vitesse ne deviendrait pas nulle sur la demi-cycloïde OB, et le mobile arriverait avec la vitesse $2\sqrt{ga(ce^{-\pi f} - \cos^2\lambda)}$ à son extrémité B, par laquelle il pourrait s'échapper. Si l'on a, au contraire,

$$ce^{-\pi f} - \cos^2\lambda < 0,$$

il y aura une racine θ' de l'équation (3) entre λ et $-\frac{\pi}{2}$, puisque $\theta = \lambda$ donne le résultat positif $ce^{2f\lambda}$, et le mobile arrivera sans vitesse dans une certaine position D sur LOB. Dans ce dernier cas, lorsque θ' est compris entre λ et $-\lambda$, le mobile reste en équilibre dans la position D qui se trouve sur LL′, et lorsqu'on a $\theta' < -\lambda$, il revient de D, situé alors sur L′B, vers le point O. La formule (2) convient à ce retour en prenant $c = e^{-2f\theta'}\sin^2(\theta' - \lambda)$.

La discussion précédente comprend le cas d'une position initiale sur LO ou sur OB, dans lequel la vitesse est immédiatement décroissante.

Si le mobile partait sans vitesse d'une position sur LA ou L′B, on aurait

$$dt = -2\sqrt{\frac{a}{g}}\,\frac{\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{c'e^{2f\theta} - \sin^2(\theta - \lambda)}},$$

c' représentant $\sin^2(\alpha - \lambda)e^{-2f\alpha}$ et α la valeur initiale de θ, regardé ici comme positif de part et d'autre de Ox. Pour que le mobile puisse arriver au point le plus bas de la cycloïde, il faut que c' surpasse $\sin^2\lambda$, ce qui exige que α soit supérieur à un angle plus grand que 2λ. En admettant que cela ait lieu, la durée T du mouvement jusqu'au point O est donnée par la formule

$$T = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^\alpha \frac{\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{c'e^{2f\theta} - \sin^2(\theta - \lambda)}}.$$

En supposant $f = 0$, ce qui entraîne $\lambda = 0$, on tire de cette formule la valeur connue $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ indépendante de α, c'est-à-dire de la position initiale.

9. *La courbe fixe est une hélice tracée sur un cylindre de révolution dont l'axe est vertical; la force* P *est le poids du mobile.*

ε désignant le complément de l'angle sous lequel l'hélice coupe les génératrices du cylindre, et a le rayon, on a

$$T = \pm\, mg\sin\varepsilon,\quad N = mg\cos\varepsilon,\quad \rho = \frac{a}{\cos^2\varepsilon};$$

par conséquent [(7), n° 5]

$$R = \frac{m\cos\varepsilon}{a}\sqrt{v^4\cos^2\varepsilon + g^2a^2},$$

car $\cos\alpha$, $\cos\beta$ et $d\frac{dz}{ds}$ sont nuls.

Deux cas se présentent : selon le sens de la vitesse initiale, le mobile s'élèvera ou descendra d'abord sur l'hélice; nous considérerons premièrement le second. Dans celui-ci, l'équation générale [(8), n° 3] donne, d'après les valeurs précédentes,

$$\frac{dv}{dt} = g \sin\varepsilon - \frac{f\cos\varepsilon}{a}\sqrt{v^4\cos^2\varepsilon + g^2a^2},$$

d'où l'on tire, en posant $ga \operatorname{tang}\varepsilon = b^2 f$,

(1) $$\frac{f\cos\varepsilon}{a}dt = \frac{dv}{b^2 - \sqrt{v^4\cos^2\varepsilon + g^2a^2}}.$$

Remplaçant dt par $\frac{ds}{v}$ et posant

(2) $$\sqrt{v^4\cos^2\varepsilon + g^2a^2} = v^2\cos\varepsilon + \xi,$$

d'où

(3) $$v^2\cos\varepsilon = \frac{g^2a^2 - \xi^2}{2\xi}, \quad \text{et} \quad v\,dv\cos\varepsilon = -\frac{g^2a^2 + \xi^2}{4\xi^2}d\xi,$$

il vient

(4) $$\frac{2f\cos^2\varepsilon}{a}ds - \frac{\xi^2 + g^2a^2}{\xi(\xi^2 - 2b^2\xi + g^2a^2)}d\xi = 0.$$

La nature de l'intégrale de cette équation dépend de celle des racines de

(5) $$\xi^2 - 2b^2\xi + g^2a^2 = 0,$$

savoir :

(6) $$\xi = b^2 \pm \sqrt{b^4 - g^2a^2} = ga\left(\frac{\operatorname{tang}\varepsilon}{f} \pm \sqrt{\frac{\operatorname{tang}^2\varepsilon}{f^2} - 1}\right),$$

lesquelles sont réelles et inégales, égales entre elles ou imaginaires, selon qu'on a $\varepsilon > \lambda$, $\varepsilon = \lambda$ ou $\varepsilon < \lambda$, λ désignant toujours l'angle du frottement.

Soit $\varepsilon > \lambda$. Si l'on représente par α, β les deux racines de l'équation (5), la fraction rationnelle de l'équation (4) prend la forme

$$\frac{1}{\xi} + \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{\xi-\alpha} - \frac{1}{\xi-\beta}\right),$$

et l'on a

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{b^2 f}{ga\sqrt{\operatorname{tang}^2\varepsilon - f^2}} = \frac{\operatorname{tang}\varepsilon}{\sqrt{\operatorname{tang}^2\varepsilon - \operatorname{tang}^2\lambda}}.$$

Posant encore

$$\sqrt{1 - \frac{\operatorname{tang}^2\lambda}{\operatorname{tang}^2\varepsilon}} = \mu \quad \text{et} \quad \frac{2\mu f\cos^2\varepsilon}{a} = k,$$

l'équation (4) revient à

$$k\,ds - \mu\frac{d\xi}{\xi} - \frac{d\xi}{\xi-\alpha} + \frac{d\xi}{\xi-\beta} = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$(7) \qquad \xi^\mu \frac{\xi-\alpha}{\xi-\beta} = Ce^{ks}.$$

Soient v_0 la valeur initiale de v et ξ_0 la valeur correspondante de ξ. Comme la quantité auxiliaire ξ est nécessairement positive [formule (2)], on peut supposer, quel que soit l'exposant μ, que ξ^μ est positif; la constante C est ainsi de même signe que $\frac{\xi_0-\alpha}{\xi_0-\beta}$. ξ est évidemment inférieur à ga [formule (2)]; on a donc $\xi_0 < \alpha$, en supposant $\alpha > \beta$, car α surpasse ga [formule (6)]; mais ξ_0 peut se trouver entre α et β ou être inférieur à β. La substitution de ξ_0, c'est-à-dire de $\sqrt{v_0^4\cos^2\varepsilon + g^2a^2} - v_0^2\cos\varepsilon$, à ξ dans le premier membre de l'équation (5), donne

$$v_0^4\cos^2\varepsilon + b^2v_0^2\cos\varepsilon + g^2a^2 - (v_0^2\cos\varepsilon + b^2)\sqrt{v_0^4\cos^2\varepsilon + g^2a^2},$$

et la comparaison des carrés des deux parties de ce résultat fait voir qu'il est négatif ou positif, selon qu'on a

$$v_0^4\cos^2\varepsilon < \quad \text{ou} \quad > b^4 - g^2a^2.$$

Soit

$$\frac{\sqrt{b^4 - g^2a^2}}{\cos\varepsilon} \quad \text{ou} \quad \frac{ga}{\cos\varepsilon}\sqrt{\frac{\tang^2\varepsilon}{f^2} - 1} = v'^2;$$

si l'on a $v_0 < v'$, ξ_0 est donc entre α et β, tandis que ξ_0 est inférieur à β pour $v_0 > v'$.

En prenant la position initiale du mobile pour l'origine de l'arc s, la constante C est déterminée par la formule

$$(8) \qquad C = \xi_0 \frac{\xi_0 - \alpha}{\xi_0 - \beta},$$

qui, d'après la discussion précédente, donne une valeur négative ou positive, selon que v_0 est inférieur à v' ou supérieur. Dans le premier cas, d'après l'équation (7), la différence $\xi - \beta$ doit toujours être positive, en sorte que ξ décroît de ξ_0 à β; dans le second, au contraire, cette différence doit toujours être négative, en sorte que ξ va en augmentant de ξ_0 à β; mais, dans l'un comme dans l'autre, la limite β ne peut pas être atteinte, car elle entraîne $s = \infty$.

Si l'on attribue à ξ la valeur β dans la formule (3), on a, eu égard à l'équation (5),

$$v^2\cos\varepsilon = \frac{g^2a^2 - \beta^2}{2\beta} = \frac{g^2a^2}{\beta} - b^2 = \sqrt{b^4 - g^2a^2},$$

d'où

$$v^2 = \frac{ga}{\cos\varepsilon}\sqrt{\frac{\tang^2\varepsilon}{f^2} - 1} = v'^2.$$

Donc, en même temps que la variable auxiliaire ξ tend vers β, la vitesse v tend vers la valeur v', qu'elle ne peut cependant pas atteindre, et qui est une limite supérieure ou inférieure, selon qu'on a $v_0 < v'$ ou $v_0 > v'$.

Enfin, si l'on avait $v_0 = v'$, il s'ensuivrait $\xi_0 = \beta$. La vitesse serait constante, car il faudrait prendre $\frac{1}{C} = 0$, ce qui donne $\xi = \beta$ [équation (7)], d'où $v = v' = v_0$.

Soit $\varepsilon = \lambda$. On a $b^2 = ga$, par conséquent $\xi^2 - 2b^2\xi + g^2a^2 = (\xi - ga)^2$; d'autre part, l'auxiliaire ξ ne peut avoir [formule (2)] que des valeurs comprises entre o et ga; le coefficient de $d\xi$ dans l'équation (4) est donc toujours positif. Comme il en est de même du premier terme de cette équation, la différentielle $d\xi$ ne peut avoir que des valeurs positives; par conséquent ξ ira toujours en augmentant. Il résulte de là, d'après la formule (3), que v décroît pendant tout le mouvement.

La fraction rationnelle de l'équation (4) revient à $\frac{1}{\xi} + \frac{2ga}{(\xi - ga)^2}$; l'intégrale générale de cette équation est donc

$$\frac{\sin 2\lambda}{a} s - l\frac{\xi}{C} + \frac{2ga}{\xi - ga} = 0 \quad \text{ou} \quad \xi e^{\frac{2ga}{ga - \xi}} = Ce^{\frac{\sin^2\lambda}{a} s}.$$

En déterminant C d'après les conditions initiales, il est clair qu'on aurait pour cette constante une valeur positive finie; ξ ne pourra donc jamais atteindre à la valeur ga, car elle donnerait $s = \infty$. Par suite, la vitesse v ne pourra jamais devenir nulle.

Soit $\varepsilon < \lambda$. On a $b^2 < ga$ et, par conséquent, la quantité $\xi^2 - 2b^2\xi + g^2a^2$ est toujours positive; cela fait voir que la vitesse v diminue sans cesse, comme dans le cas précédent.

Le coefficient de $d\xi$, dans l'équation (4), revient à

$$\frac{1}{\xi} + \frac{2b^2}{(\xi - b^2)^2 + (g^2a^2 - b^4)};$$

l'intégrale générale de cette équation est donc

$$\frac{2f\cos^2\varepsilon}{a} s - l\frac{\xi}{C} - 2b^2 \operatorname{arctang} \frac{\xi - b^2}{\sqrt{g^2a^2 - b^4}} = 0.$$

La valeur de la constante C déduite des conditions initiales sera évidemment finie.

Ici $\xi = ga$ donne $v = 0$ et

$$s = \frac{a}{2f\cos^2\varepsilon}\left(l\frac{ga}{C} + 2b^2 \operatorname{arctang} \sqrt{\frac{ga - b^2}{ga + b^2}}\right);$$

cette valeur de s détermine la position où le mobile arrive sans vitesse et reste en équilibre.

Si la vitesse initiale est dirigée de manière que le mobile remonte d'abord sur l'hélice, il suffit de changer g en $-g$, par conséquent b^2 en $-b^2$, en prenant toujours $ga \tang\varepsilon = b^2, \ldots$, pour avoir les équations qui conviennent à ce mouvement. D'après l'équation (1), ainsi modifiée, dv est négatif et, par suite, v décroît, quelle que soit la relation entre les angles ε et λ; cela résulte d'ailleurs, *a priori*, de ce que la composante tangentielle du poids du mobile et le frottement sont tous deux de sens contraire au mouvement. Le mobile doit nécessairement arriver avec une vitesse nulle dans une certaine position. Quand on a $\varepsilon > \lambda$, cette position sera déterminée par l'équation (7) en prenant $\xi = ga$, et pour la constante C la valeur résultant de la formule (8) (les racines α et β sont négatives dans ce cas); le mobile, parvenu à la position dont il s'agit, descendra ensuite, et tout ce qui précède s'appliquera en supposant $v_0 = 0$. Si l'on a $\varepsilon \overline{\gtrless} \lambda$, c'est une des deux autres équations intégrales en s et ξ qu'il faut employer pour avoir la position où la vitesse devient nulle; le mobile y reste en équilibre.