JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

V. PUISEUX

Rapport sur deux Mémoires présentés à l'Académie par M. Maximilien Marie, et ayant pour titres, l'un: « Détermination du point critique où est limitée la région de convergence de la série de Taylor », l'autre: « Construction du périmètre de la région de convergence de la série de Taylor »

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 18 (1873), p. 180-184.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1873_2_18__180_0>

RAPPORT

Sur deux Mémoires présentés à l'Académie par M. MAXIMILIEN MARIE, *et ayant pour titres, l'un : « Détermination du point critique où est limitée la région de convergence de la série de Taylor », l'autre : « Construction du périmètre de la région de convergence de la série de Taylor »;*

PAR M. V. PUISEUX.

(Commissaires : MM. BERTRAND, BONNET et PUISEUX. — *Comptes rendus*, t. LXXVI, p. 618; séance du 10 mars 1873.)

Lorsqu'une fonction y d'une variable imaginaire x doit satisfaire à une équation algébrique

$$f(x, y) = 0,$$

elle a généralement plusieurs valeurs pour chaque valeur de x. Concevons que x varie d'une manière continue à partir d'une certaine valeur initiale a; choisissons pour la valeur initiale b de y une racine de l'équation

$$f(a, y) = 0,$$

que nous supposerons n'être ni multiple ni infinie, et enfin assujettissons y à varier d'une manière continue avec x. Alors y ne cessera pas d'être une fonction finie et déterminée de x, si toutefois on évite de faire prendre à cette variable certaines valeurs critiques dont la définition n'a pas toujours été donnée avec une précision suffisante.

On peut, en multipliant l'inconnue y par une fonction entière de x, faire en sorte que la nouvelle inconnue ne devienne plus infinie pour aucune valeur finie de x. Cette supposition admise, on a souvent dit que les valeurs critiques de x sont celles pour lesquelles la fonction y devient une racine multiple de l'équation proposée.

Cette définition est exacte en général; en effet, pour une telle valeur c de x et pour la valeur correspondante de y, on a

$$\frac{df}{dy} = 0;$$

mais généralement on n'aura pas en même temps

$$\frac{df}{dx} = 0.$$

Alors la racine considérée fera partie d'un groupe de fonctions qui échangent circulairement leurs valeurs lorsque le point M, correspondant à la variable x [*], décrit un cercle infiniment petit autour du point C correspondant à c. Lors donc que le point mobile M suivra un chemin passant par le point C, la valeur de y cessera au delà de ce point d'être complétement déterminée; car si l'on déforme un peu le chemin sans en changer les extrémités, la valeur finale de y sera différente, selon que le point M aura passé d'un côté ou de l'autre du point C.

Mais si au point C on avait à la fois

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0,$$

il pourrait arriver que la fonction y ne s'échangeât avec aucune autre autour de ce point, et restât par conséquent déterminée, lorsqu'on le franchirait; c'est ce qui aurait lieu, par exemple, si les dérivées partielles $\frac{d^2f}{dx^2}$, $\frac{d^2f}{dy^2}$ n'étaient nulles ni l'une ni l'autre, non plus que l'expression

$$\frac{d^2f}{dx^2}\frac{d^2f}{dy^2} - \left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)^2.$$

Dans ce cas, la valeur c de x ne serait pas véritablement critique.

[*] Nous entendons par là, suivant l'usage, le point qui a pour coordonnées rectangulaires la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans la valeur de x.

Pour éviter les exceptions que comporte la définition précédente, M. Marie appelle *valeurs critiques de* x les valeurs qui rendent infinie y ou l'une de ses dérivées. Cette définition nous semble préférable à l'autre, surtout quand on se propose d'étudier les conditions de possibilité du développement de la fonction y par la série de Taylor.

M. Marie s'est occupé spécialement de ce dernier problème, que l'on peut poser comme il suit : Étant données la valeur initiale a de x et la valeur correspondante b de y, trouver dans quelles limites la fonction y peut être développée en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de $x - a$.

On sait par les travaux de Cauchy qu'un tel développement subsiste tant que le point mobile M, correspondant à x, reste dans l'intérieur d'un cercle, qui a pour centre le point A correspondant à a et qui ne renferme aucun point critique, c'est-à-dire aucun point correspondant à une valeur critique de x.

Mais il convient de faire ici une distinction sur laquelle M. Marie insiste dans son premier Mémoire. Le point M, décrivant un chemin continu à partir de la position initiale A, peut arriver dans une position C qui soit critique pour quelques-unes des valeurs de y, que détermine l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

et qui ne le soit pas pour les autres. Dans ce cas, la circonférence décrite du point A comme centre avec AC pour rayon ne limitera la convergence de la série que si le point C est critique pour la racine particulière y que l'on considère. Il ne serait donc pas exact de dire d'une manière générale que la convergence est limitée par la circonférence dont le rayon est la distance du point A au plus voisin de tous les points critiques répondant aux diverses racines de l'équation

$$f(x, y) = 0.$$

Cette distinction n'a sans doute pas échappé à la plupart des géomètres qui se sont occupés de ces questions; cependant elle n'a pas toujours été formulée assez nettement, et le rapporteur pourrait citer un passage de ses propres écrits d'où il semblerait résulter que la circonférence de moindre rayon donne toujours la limite de la convergence. Il est vrai que cette interprétation se trouve démentie par un autre passage du même Mémoire; mais enfin on doit reconnaître que, si l'erreur n'a pas existé dans l'esprit de l'auteur, son langage n'a pas été suffisamment correct. Quoi qu'il en soit, M. Marie a eu raison d'insister sur la nécessité de faire cesser la confusion qui pourrait rester à cet égard dans quelques esprits [*].

Cette remarque faite, M. Marie s'est proposé de traiter la question suivante :

Une équation

$$f(x, y) = 0$$

étant donnée, et une fonction particulière y étant choisie parmi celles que détermine l'équation, assigner le rayon du cercle de convergence correspondant à une valeur initiale donnée de x.

On voit aisément que ce problème se ramène à celui-ci :

Étant donnés deux points A et B correspondant à des valeurs a et b de x, étant donnée de plus, parmi les racines de l'équation

$$f(a, y) = 0,$$

celle qu'on regarde comme la valeur initiale de y, assigner, parmi les racines de l'équation

$$f(b, y) = 0,$$

celle qui est la valeur finale de y, en supposant connu le chemin par lequel le point mobile correspondant à la variable x est allé de A en B.

La solution générale de ce problème dépasse sans doute les forces actuelles de l'Analyse, et les procédés qu'on peut imaginer pour le traiter ne sont pratiquement applicables qu'à des équations d'une

---

[*] Dans le préambule de son travail, M. Marie signale plusieurs auteurs comme n'ayant pas connu la vraie limite de la région de convergence; à notre avis, on peut tout au plus leur reprocher des inexactitudes de rédaction qui s'expliquent par cette circonstance, que la limitation précise de la convergence était inutile aux recherches de ces géomètres. Quant à MM. Briot et Bouquet, que M. Marie comprend dans ses critiques, nous n'avons aperçu dans leurs Ouvrages aucun passage qui y donnât prise.

simplicité exceptionnelle. La méthode que M. Marie propose de suivre, et qu'il a effectivement appliquée à plusieurs exemples, repose sur un mode de représentation des imaginaires qui lui est propre et qui consiste à considérer les valeurs

$$x = \alpha + \beta i, \quad y = \alpha' + \beta' i,$$

satisfaisant à l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

comme répondant à un point réel, ayant $\alpha + \beta$ pour abscisse et $\alpha' + \beta'$ pour ordonnée. Il arrive ainsi à représenter la marche des solutions imaginaires d'une équation

$$f(x, y) = 0,$$

à l'aide d'une suite de courbes réelles auxquelles il donne le nom de *conjuguées*. Il fait connaître diverses propriétés de ces lignes, et c'est par une discussion fondée sur leur forme et leur situation qu'il cherche à établir la correspondance entre les valeurs initiale et finale de la fonction.

Vos Commissaires n'ont vu là ni une solution complète du problème, ni un moyen de l'aborder plus facilement : quelques-uns des exemples particuliers auxquels l'auteur applique sa méthode ont été traités par l'un de nous à l'aide du mode de représentation ordinaire de la variable x, et il nous a semblé qu'on arrivait ainsi plus simplement et plus naturellement au but.

Pour justifier notre manière de voir, il faudrait entrer dans des développements qui donneraient à ce Rapport une étendue exagérée. Nous nous bornerons donc à proposer à l'Académie de remercier M. Marie de ses Communications, dans lesquelles il insiste avec raison sur des distinctions qui n'avaient pas été faites avec assez de précision, tout en déclarant que les méthodes de l'auteur ne nous paraissent pas avoir une supériorité réelle sur celles dont les géomètres ont jusqu'ici fait usage.