JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

V. PUISEUX

**Mémoire sur l'accélération séculaire du mouvement de la Lune**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série*, tome 15 (1870), p. 9-116.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1870_2_15__9_0>

## *Mémoire sur l'accélération séculaire du mouvement de la Lune* [*];

PAR M. V. PUISEUX,

Membre du Bureau des Longitudes.

Si le moyen mouvement de la Lune était uniforme, l'expression de la longitude moyenne de cet astre en fonction du temps serait de la forme $A + Bt$, A et B désignant des nombres constants. Mais on sait au contraire que ce mouvement s'accélère actuellement de siècle en siècle, en sorte que l'expression précédente doit être complétée par un terme de la forme $Ct^2$, C désignant un nombre qui peut lui-même être variable avec le temps et que nous appellerons le *coefficient de l'accélération séculaire*.

Supposons le temps exprimé en siècles de cent années juliennes et compté à partir de l'époque actuelle, du 1er janvier 1850, par exemple; on trouve que pour rendre compte de quelques éclipses observées dans l'antiquité, il faut attribuer au coefficient C une valeur de $12''$ environ pour les époques qui précèdent la nôtre de vingt et quelques siècles.

Laplace, en cherchant l'explication théorique de ce fait, a trouvé que la diminution de l'excentricité de l'orbite de la Terre, causée par les actions perturbatrices des autres planètes, devait accélérer en effet le mouvement de notre satellite; mais comme le coefficient de l'accélération séculaire, conclu de cette seule considération et calculé d'ailleurs avec toute l'exactitude nécessaire [**], n'est guère que la moitié de

[*] Cet article est extrait d'un travail plus étendu dont l'Académie des Sciences a ordonné l'impression dans les *Mémoires des Savants étrangers*. Plusieurs développements de calcul ont dû naturellement être supprimés ici.

[**] Une première approximation avait donné à Laplace une valeur de ce coefficient voisine de $10''$. Les calculs plus complets de MM. Adams et Delaunay ont montré que cette valeur devait être réduite à $6'',1$.

celui qui paraît résulter des anciennes éclipses, on a été conduit à attribuer ce désaccord à quelque influence dont on n'aurait pas tenu compte jusqu'à présent. C'est ainsi que l'attraction exercée sur la Lune par le bourrelet liquide que les marées soulèvent à la surface des océans a été signalée comme pouvant à la longue accélérer le mouvement de cet astre, en même temps que l'action réciproque de la Lune sur ce bourrelet altérerait la constance du jour sidéral. Mais avant d'introduire dans la théorie de la Lune un effet de ce genre, dont le calcul rigoureux paraît bien difficile dans l'état actuel de la science, il m'a semblé qu'il convenait de ne négliger aucun terme sensible parmi ceux que fournit la théorie ordinaire, dans laquelle on n'a pas égard au changement de forme de la partie liquide de la Terre. En me plaçant à ce point de vue, je me suis demandé s'il était bien démontré que le déplacement séculaire du plan de l'orbite terrestre n'eût aucune influence sur l'accélération du mouvement de la Lune.

Laplace, Poisson, Plana ont admis que le plan de l'orbite lunaire se déplace en même temps que celui de l'orbite terrestre, de manière que l'inclinaison mutuelle de ces deux plans conserve une valeur moyenne constante, et ils en ont conclu qu'on pouvait, dans la théorie de la Lune, considérer le plan de l'écliptique comme un plan fixe. Ils ont pris ce plan pour un des plans coordonnés, et l'expression de la longitude de la Lune à laquelle ils ont été conduits s'est trouvée nécessairement indépendante du déplacement de l'écliptique.

Mais les illustres auteurs que je viens de nommer ne sont arrivés à ce résultat qu'en se contentant d'une approximation limitée relativement à l'inclinaison $\varphi$ de l'orbite lunaire, aux excentricités $e$ et $e'$ des orbites de la Lune et du Soleil et au rapport $\frac{a}{a'}$ de leurs demi-grands axes; on peut se demander si les mêmes conclusions subsistent encore, lorsqu'on tient compte de puissances plus élevées de ces petites quantités.

On aperçoit aisément que si l'on rapporte le mouvement de la Lune à des plans invariables dont l'un soit la position de l'écliptique à l'époque prise pour origine du temps, il s'introduit, dans l'expression de la dérivée de la longitude, des termes proportionnels au carré de l'inclinaison $\varphi'$ du plan de l'écliptique mobile. Au degré d'approximation où se sont arrêtés les géomètres déjà cités, ces termes se détruisent; mais admettons qu'il n'en soit plus ainsi lorsqu'on pousse plus loin l'approximation, et soit $c\varphi'^2$ la somme des termes de ce genre : il en résultera, dans la longitude même de la Lune, la partie $c\int\varphi'^2 dt$.

Pendant un temps considérable, on peut regarder l'inclinaison $\varphi'$ comme proportionnelle au temps et poser $\varphi' = \alpha t$; la partie de la longitude dont il s'agit sera donc $\frac{1}{3} c\alpha^2 t^3$ et croîtra comme le cube du temps. Un pareil terme pourrait être insensible pendant un certain nombre de siècles avant et après l'époque actuelle, mais acquérir une valeur appréciable aux époques éloignées, telles que celles des anciennes éclipses. Il aurait alors pour effet de modifier le coefficient de l'accélération qui conviendrait à ces temps reculés; car, en l'ajoutant au terme $c_1 t^2$ qui résulte de la diminution de l'excentricité de l'orbite terrestre, on obtient une somme de la forme $(c_1 + ct)t^2$, dans laquelle $t^2$ est multiplié par une quantité variable avec le temps. Il importe donc, pour la comparaison des éclipses historiques avec la théorie, de s'assurer s'il existe dans l'expression de la longitude de la Lune des termes proportionnels à une puissance du temps supérieure à la seconde et d'en déterminer la grandeur.

L'examen de cette question est l'objet du présent Mémoire; je le divise en trois Sections. Dans la première, je reproduis, sauf quelque changement dans la forme, l'analyse de Poisson, et je conclus, comme lui, qu'au degré d'approximation dont il s'est contenté, le déplacement du plan de l'écliptique n'influe pas sur l'accélération du mouvement de la Lune. Dans les deux autres Sections, je reprends le problème en poussant plus loin l'approximation relativement aux quantités $\varphi$, $e$, $e'$, $\frac{a}{a'}$. Mais alors se présente une difficulté qui tient au déplacement rapide du nœud de l'orbite lunaire.

Dans les théories des planètes et de la Lune, il y a deux sortes d'approximations à considérer : l'une est ordonnée suivant les puissances des excentricités, des inclinaisons et du rapport des grands axes des orbites; l'autre suivant les puissances de la force perturbatrice. Ne nous occupons en ce moment que de la dernière. Quand il s'agit des planètes, la méthode qu'on suit ordinairement consiste à regarder d'abord les éléments elliptiques comme constants dans les expressions de leurs dérivées; l'intégration fournit alors des valeurs des éléments où les erreurs sont de l'ordre du carré de la force perturbatrice; puis, à l'aide de ces valeurs approchées, on en forme de plus exactes où les erreurs sont de l'ordre du cube de la force perturbatrice, et ainsi de suite. Voici maintenant ce qui arriverait si l'on appliquait à la question qui nous occupe cette méthode d'approximations successives.

Nommons $n$ et $n'$ les vitesses angulaires moyennes de la Lune et du Soleil autour de la Terre. La fraction $\frac{n'^2}{n^2}$ caractérise, dans la théorie de la Lune, l'ordre de grandeur de la force perturbatrice, et, pour que les approximations successives fussent réellement convergentes, il faudrait que les parties des éléments fournies par chacune d'elles continssent le facteur $\frac{n'^2}{n^2}$ une fois de plus que les parties fournies par l'approximation précédente. Or c'est ce qui n'a pas lieu pour les parties de la longitude de la Lune proportionnelles à $\int \varphi'^2 dt$.

En effet, il y a d'abord dans la fonction perturbatrice R un terme non périodique de la forme $n'^2 \mathrm{K} \varphi'^2$, K étant de l'ordre zéro relativement à la force perturbatrice; il en résulte à la première approximation, dans l'expression de la longitude, une partie de la forme $\frac{n'^2}{n} \mathrm{K} \int \varphi'^2 dt$. Mais $\theta$ et $\theta'$ désignant les longitudes des nœuds ascendants de l'orbite lunaire et de l'écliptique, il y a aussi dans R un terme de la forme $n'^2 \mathrm{K} \varphi' \cos(\theta - \theta')$; il en résulte dans la dérivée, par rapport au temps de chaque élément de la Lune, une partie de la forme $\frac{n'^2}{n} \mathrm{K} \varphi' \genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}(\theta - \theta')$. On a d'ailleurs à peu près

$$\theta = \text{const.} - \frac{3}{4} \frac{n'^2}{n} t;$$

si donc on intègre, en traitant comme des constantes les quantités $\varphi'$ et $\theta'$ qui varient très-lentement, on voit que le facteur $\frac{n'^2}{n}$ disparaîtra et que l'élément considéré contiendra une partie de la forme

$$\mathrm{K} \varphi' \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(\theta - \theta').$$

Lorsque ensuite on voudra passer à la seconde approximation, il faudra, dans les dérivées des éléments, augmenter ceux-ci des inégalités fournies par la première approximation. Or quand, dans une expression de la forme $\frac{n'^2}{n} \mathrm{K} \varphi' \,{}^{\sin}_{\cos}(\theta - \theta')$, on augmente les éléments qui y figurent de quantités qui sont elles-mêmes de la forme $\mathrm{K} \varphi' \,{}^{\cos}_{\sin}(\theta - \theta')$, il en résulte des termes non périodiques de la forme $\frac{n'^2}{n} \mathrm{K} \varphi'^2$. La seconde approximation amènera donc, dans la dérivée de la longitude, des parties de cette dernière forme, et par suite, dans la longitude elle-même, des termes de la forme $\frac{n'^2}{n} \mathrm{K} \int \varphi'^2 dt$, c'est-à-dire du même ordre de grandeur que ceux qu'avait fournis la première approximation. En poursuivant ce raisonnement, on voit qu'il en serait de même des approximations suivantes. La méthode des approximations successives, telle qu'on la pratique dans la théorie des planètes, donnerait donc le coefficient de $\int \varphi'^2 dt$ dans la longitude de la Lune sous la forme d'une série non convergente, et par conséquent elle doit être rejetée.

Pour éviter cette difficulté, j'emprunte à M. Delaunay [*] l'idée qui sert de base à sa théorie de la Lune, et qui consiste à intégrer les équations du mouvement de cet astre en réduisant d'abord la fonction R à sa partie non périodique accompagnée seulement du terme périodique relatif à un certain argument.

Dans le cas actuel, je joins à la partie non périodique les deux termes dont les arguments sont $\theta - \theta'$ et $2\theta - 2\theta'$. Il est inutile d'avoir égard à ceux qui ont pour arguments des multiples plus élevés de $\theta - \theta'$; car les parties non périodiques qui pourraient en résulter dans la dérivée de la longitude de la Lune renfermeraient le facteur $\varphi'^4$ au moins et seraient certainement négligeables dans les limites des temps historiques.

---

[*] Dans la partie de sa *Théorie de la Lune* qu'il a publiée, M. Delaunay fait abstraction des changements qu'éprouvent les éléments de l'orbite du Soleil. Il suppose donc provisoirement $\varphi' = 0$ et ajourne le calcul qui nous occupe ici des effets dus au déplacement du plan de l'écliptique.

La fonction perturbatrice étant ainsi réduite, on peut intégrer, non plus seulement par approximation, mais rigoureusement. Pour avoir égard ensuite aux termes de la fonction perturbatrice qu'on a laissés de côté, il faudra regarder les constantes introduites par l'intégration comme de nouvelles variables; mais alors les dérivées de ces variables ne contiendront plus de termes dépendants des arguments $\theta - \theta'$, $2\theta - 2\theta'$, ou du moins ne renfermeront de pareils termes qu'avec des coefficients du second ordre, et la méthode des approximations successives deviendra applicable.

Nommons $R_1$ ce que devient R quand on y supprime tous les termes périodiques autres que ceux qui ont $\theta - \theta'$ et $2\theta - 2\theta'$ pour arguments. L'intégration des équations auxquelles se réduisent les équations différentielles du mouvement de la Lune, quand on remplace R par $R_1$, est l'objet de la seconde section du Mémoire, et elle me conduit, entre autres conclusions, à celle-ci :

La fonction perturbatrice étant supposée réduite à sa partie $R_1$, si la longitude de la Lune contenait un terme en $\int \varphi'^2 dt$ et qu'on le représentât par $\frac{n'^2}{n} K \int \varphi'^2 dt$, le coefficient K serait une fonction de $\varphi$, $e$, $e'$, $\sqrt{\frac{a}{a'}}$ du huitième degré au moins par rapport à ces petites quantités.

Il suit de là qu'en supposant toujours la fonction R réduite à $R_1$, la longitude de la Lune ne contient pas de terme proportionnel au cube du temps qui soit sensible; il reste à voir si les parties de R qu'on a d'abord laissées de côté n'en introduisent pas. Cette recherche, plus laborieuse que la précédente, est l'objet de la troisième section; j'y fais voir que les divers termes de la partie $R - R_1$ de la fonction R introduisent dans la longitude moyenne, à la seconde approximation, des termes en $t^4$, en $t^3$ et en $t^2$ qui proviennent du déplacement de l'écliptique. Mais les termes en $t^4$ se détruisent deux à deux et leur somme est nulle; d'un autre côté, la somme des termes en $t^2$ peut être regardée comme insensible. Reste donc la somme des termes en $t^3$ : elle n'est pas nulle, et on peut la considérer, ainsi qu'il a été dit plus haut, comme modifiant le coefficient de l'accélération aux époques très-éloignées de la nôtre. Toutefois, si l'on en calcule la valeur numérique, on trouve que, pour l'époque des éclipses le plus anciennement observées, les termes en question ont pour effet de diminuer le coefficient de l'accélération séculaire d'une quantité s'élevant à peine à $\frac{1}{10}$ de seconde. Comme ces éclipses paraissent exiger au contraire que ce coefficient soit augmenté et qu'il le soit de plusieurs secondes, on voit que ce n'est pas dans le fait du déplacement du plan de l'orbite terrestre qu'on peut trouver l'explication du désaccord qui semble exister entre la théorie et les observations.

Doit-on chercher à faire disparaître ce désaccord par une interprétation nouvelle des documents historiques relatifs aux anciennes éclipses, ou faut-il lui assigner pour cause l'attraction mutuelle de la Lune et du ménisque soulevé par les marées à la surface de notre globe? C'est ce que je n'entreprendrai pas d'examiner ici. Mais avant de s'engager dans l'une ou l'autre de ces deux voies, il importait, ce me semble, d'avoir vidé la question qui fait l'objet du présent Mémoire. A ce point de vue, la conclusion de mes recherches, bien que négative, ne paraîtra peut-être pas entièrement dépourvue d'intérêt.

### PREMIÈRE SECTION.

Soient M la masse de la Terre, $m$ celle de la Lune, $m'$ celle du Soleil; $a$ et $a'$ les demi-grands axes des orbites que la Lune et le Soleil décrivent autour de la Terre, $e$ et $e'$ les excentricités de ces orbites, $n$ et $n'$ les vitesses angulaires moyennes des mouvements elliptiques qui sont à l'époque $t$ ceux des deux astres; $\varphi$ et $\varphi'$ les inclinaisons des plans des orbites sur le plan fixe avec lequel coïncidait l'écliptique à l'époque $t = 0$; $\theta$ et $\theta'$ les longitudes des nœuds ascendants; $\varpi$ et $\varpi'$ les longitudes des périgées; $\lambda$ et $\lambda'$ les longitudes moyennes de la Lune et du Soleil à l'époque $t = 0$; $l$ et $l'$ les longitudes moyennes des mêmes astres à l'époque $t$, en sorte qu'on ait

$$l = \int_0^t n\,dt + \lambda, \quad l' = \int_0^t n'\,dt + \lambda'.$$

Lorsqu'on cherche les inégalités séculaires du mouvement de la Lune, on peut, sans grande erreur, omettre dans la fonction perturbatrice R les termes périodiques dont les arguments renferment les longitudes moyennes de la Lune et du Soleil et dont les périodes, par conséquent, sont comparables au mois ou à l'année. Si, de plus, on néglige les produits de quatre dimensions des quantités $e$, $e'$, $\varphi$, $\varphi'$, $\sqrt{\frac{a}{a'}}$, on trouve pour la fonction R l'expression suivante :

$$R = n'^2 \varepsilon a^2 \left[ -\frac{1}{4} - \frac{3}{8}e^2 - \frac{3}{8}e'^2 + \frac{3}{8}\varphi^2 + \frac{3}{8}\varphi'^2 - \frac{3}{4}\varphi\varphi' \cos(\theta - \theta') \right],$$

où $\varepsilon$ désigne la fraction très-voisine de l'unité $\dfrac{1}{1 + \dfrac{M}{m'}}$.

A ce degré d'approximation, les formules qui donnent les dérivées des éléments elliptiques du mouvement de la Lune, savoir :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1 - e^2}\sin\varphi}\frac{dR}{d\theta} + \frac{\tang\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1 - e^2}}\left(\frac{dR}{d\varpi} + \frac{dR}{d\lambda}\right),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{na^2\sqrt{1 - e^2}\sin\varphi}\frac{dR}{d\varphi},$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e}\frac{dR}{d\varpi} + \frac{\sqrt{1 - e^2} - 1 + e^2}{na^2 e}\frac{dR}{d\lambda},$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{\tang\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1 - e^2}}\frac{dR}{d\varphi} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e}\frac{dR}{de},$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{dR}{d\lambda},$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{2}{na}\frac{dR}{da} - \frac{\sqrt{1 - e^2} - 1 + e^2}{na^2 e}\frac{dR}{de} - \frac{\tang\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1 - e^2}}\frac{dR}{d\varphi},$$

se réduisent aux suivantes :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{3}{4}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\varphi' \sin(\theta - \theta'),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\left[1 - \frac{\varphi'}{\varphi}\cos(\theta - \theta')\right],$$

$$\frac{de}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{3}{4}\frac{n'^2\varepsilon}{n},$$

$$\frac{da}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{n'^2\varepsilon}{n}\left[-1 - \frac{9}{8}e^2 - \frac{3}{2}e'^2 + \frac{9}{8}\varphi^2 + \frac{3}{2}\varphi'^2 - \frac{21}{8}\varphi\varphi'\cos(\theta - \theta')\right].$$

Pour intégrer les deux premières, nous ferons

$$\varphi \sin\theta = x, \quad \varphi \cos\theta = y, \quad \varphi' \sin\theta' = x', \quad \varphi' \cos\theta' = y';$$

elles nous donneront

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha y + \alpha y', \quad \frac{dy}{dt} = \alpha x - \alpha x',$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\frac{3}{4}\frac{n'^2\varepsilon}{n} = \alpha.$$

Négligeons d'abord les termes en $x'$ et en $y'$; nous conclurons de ces équations

$$x = \mathrm{A}\cos\alpha t - \mathrm{B}\sin\alpha t, \quad y = \mathrm{A}\sin\alpha t + \mathrm{B}\cos\alpha t,$$

A et B étant des constantes arbitraires. Si maintenant nous voulons tenir compte des termes en $x'$ et en $y'$, nous devrons, dans les valeurs précédentes de $x$ et de $y$, regarder A et B, non plus comme des constantes, mais comme des fonctions inconnues de $t$ qui devront satisfaire aux équations suivantes :

$$\frac{d\mathrm{A}}{dt} = -\alpha x' \sin\alpha t + \alpha y' \cos\alpha t, \quad \frac{d\mathrm{B}}{dt} = -\alpha x' \cos\alpha t - \alpha y' \sin\alpha t.$$

Il en résulte, en appelant $\mathrm{A}_0$ et $\mathrm{B}_0$ deux constantes,

$$\begin{aligned}\mathrm{A} &= \mathrm{A}_0 - \alpha\int x' \sin\alpha t\,dt + \alpha\int y' \cos\alpha t\,dt,\\ \mathrm{B} &= \mathrm{B}_0 - \alpha\int x' \cos\alpha t\,dt - \alpha\int y' \sin\alpha t\,dt.\end{aligned}$$

Or on a, en intégrant par partie,

$$\alpha\int x' \sin\alpha t\,dt = -x' \cos\alpha t + \int \frac{dx'}{dt} \sin\alpha t\,dt,$$

ou sensiblement, à cause de la lenteur avec laquelle $x'$ varie,

$$\alpha\int x' \sin\alpha t\,dt = -x' \cos\alpha t,$$

et pareillement

$$\alpha\int x'\cos\alpha t\,dt = x'\sin\alpha t,$$
$$\alpha\int y'\sin\alpha t\,dt = -y'\cos\alpha t,$$
$$\alpha\int y'\cos\alpha t\,dt = y'\sin\alpha t.$$

On en conclut

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_0 + x'\cos\alpha t + y'\sin\alpha t, \quad \mathrm{B} = \mathrm{B}_0 - x'\sin\alpha t + y'\cos\alpha t,$$

et par conséquent

$$x = \mathrm{A}_0\cos\alpha t - \mathrm{B}_0\sin\alpha t + x', \quad y = \mathrm{A}_0\sin\alpha t + \mathrm{B}_0\cos\alpha t + y'.$$

Comme $x'$ et $y'$ s'annulent avec $t$, on voit que $\mathrm{A}_0$ et $\mathrm{B}_0$ sont les valeurs initiales de $x$ et de $y$, en sorte que, si l'on représente par $\varphi_0$ et $\theta_0$ celles de $\varphi$ et de $\theta$, on aura

$$\mathrm{A}_0 = \varphi_0\sin\theta_0, \quad \mathrm{B}_0 = \varphi_0\cos\theta_0.$$

Les formules précédentes peuvent donc s'écrire

$$\varphi\sin\theta = \varphi_0\sin(\theta_0 - \alpha t) + \varphi'\sin\theta', \quad \varphi\cos\theta = \varphi_0\cos(\theta_0 - \alpha t) + \varphi'\cos\theta',$$

et, en ajoutant les carrés de ces deux équations, on trouve

$$\varphi^2 = \varphi_0^2 + 2\varphi_0\varphi'\cos(\theta_0 - \alpha t - \theta') + \varphi'^2.$$

Les quantités $\varphi'$ et $\theta'$ variant avec le temps, on voit que l'inclinaison $\varphi$ de l'orbite lunaire sur le plan fixe n'est pas constante. Mais si l'on nomme $i$ l'inclinaison de la même orbite sur le plan de l'écliptique mobile, on aura

$$\cos i = \cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\cos(\theta - \theta'),$$

ou bien, en négligeant les produits de quatre dimensions de $i$, $\varphi$, $\varphi'$,

$$\begin{aligned} i^2 &= \varphi^2 + \varphi'^2 - 2\varphi\varphi'\cos(\theta - \theta') \\ &= (\varphi\sin\theta - \varphi'\sin\theta')^2 + (\varphi\cos\theta - \varphi'\cos\theta')^2 = \varphi_0^2. \end{aligned}$$

On voit que l'angle $i$ se réduit à la constante $\varphi_0$ : ainsi, au degré d'approximation dont nous nous sommes contentés, le plan de l'écliptique et celui de l'orbite lunaire se déplacent simultanément, de façon que leur inclinaison mutuelle reste constante.

Formons à présent la dérivée de la longitude moyenne $l$. On a

$$\frac{dl}{dt} = n + \frac{d\lambda}{dt};$$

si, dans la valeur de $\frac{d\lambda}{dt}$ écrite ci-dessus, on remplace $\varphi^2$ par

$$\varphi_0^2 + 2\varphi_0\varphi'\cos(\theta_0 - \alpha t - \theta') + \varphi'^2$$

et $\varphi\varphi'\cos(\theta - \theta')$ par

$$\varphi_0\varphi'\cos(\theta_0 - \alpha t - \theta') + \varphi'^2,$$

on trouvera que les termes en $\varphi'^2$ se détruisent, et il viendra

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{n'^2\varepsilon}{n}\left[-1 - \frac{9}{8}e^2 + \frac{9}{8}\varphi_0^2 - \frac{3}{2}e'^2 - \frac{3}{8}\varphi_0\varphi'\cos(\theta_0 - \alpha t - \theta')\right].$$

Nous avons donc

$$\frac{dl}{dt} = n + \frac{n'^2\varepsilon}{n}\left[-1 - \frac{9}{8}e^2 + \frac{9}{8}\varphi_0^2 - \frac{3}{2}e'^2 - \frac{3}{8}\varphi_0\varphi'\cos(\theta_0 - \alpha t - \theta')\right].$$

Si la valeur de $\frac{dl}{dt}$ était constante, la longitude moyenne de la Lune croîtrait proportionnellement au temps, et il n'y aurait aucune accélération dans le mouvement de cet astre. Or les équations

$$\frac{de}{dt} = 0, \quad \frac{da}{dt} = 0,$$

trouvées ci-dessus, montrent que $e$ et $a$ sont des constantes, et il en est de même de $n$, qui est lié avec $a$ par l'équation

$$n = \sqrt{\frac{f(M+m)}{a^3}},$$

où $f$ désigne la constante de l'attraction. Les quantités $\varphi_0$ et $\theta_0$ sont aussi des constantes par définition; mais $e'$, $\varphi'$ et $\theta'$ varient à cause des actions perturbatrices des autres planètes sur la Terre. La longitude moyenne de la Lune contiendra donc une partie non proportionnelle au temps, savoir :

$$-\frac{3}{2}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\int e'^2\,dt - \frac{3}{8}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\varphi_0\int \varphi'\cos(\theta_0 - \alpha t - \theta')\,dt.$$

Considérons d'abord le second terme; en effectuant l'intégration comme si $\varphi'$ et $\theta'$ étaient des constantes, on le mettra sous la forme $\frac{1}{2}\varphi_0\varphi'\sin(\theta_0 - \alpha t - \theta')$. C'est, comme on voit, une quantité périodique dont la période est sensiblement égale à la durée d'une révolution du nœud de la Lune, mais dans laquelle le coefficient du sinus croît avec le temps : toutefois, comme, au bout de vingt-cinq siècles, ce coefficient n'atteint pas 1', et qu'à une époque aussi éloignée une erreur de 1' sur la longitude de la Lune est sans importance, nous pouvons faire abstraction du terme dont il s'agit.

Pour évaluer l'autre terme $-\frac{3}{2}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\int e'^2\,dt$, nous y remplacerons $e'^2$ par son développement, suivant les puissances du temps; soit donc

$$e'^2 = e_0'^2 + \mathrm{A}t + \mathrm{B}t^2,$$

ce terme deviendra

$$-\frac{3}{2}\frac{n'^2\varepsilon}{n}e_0'^2 t - \frac{3}{4}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\mathrm{A}t^2 - \frac{1}{2}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\mathrm{B}t^3.$$

La première partie est proportionnelle au temps et se confond avec le moyen mouvement : on a donc, pour la portion de la longitude moyenne d'où résulte l'accélération du mouvement de la Lune, l'expression

$$-\frac{3}{4}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\mathrm{A}\left(1 + \frac{2}{3}\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}t\right)t^2.$$

Lorsqu'on remplace A et B par leurs valeurs numériques [*], le fac-

---

[*] On a, d'après M. Le Verrier (*Annales de l'Observatoire*, t. IV, p. 102),

$$\frac{e}{\sin 1''} = 3459{,}78 - 8{,}755\,t - 0{,}0282\,t^2;$$

il en résulte

$$e^2 = 0{,}00028127 - 0{,}000001424\,t - 0{,}000000002\,79\,t^2,$$

et par suite

$$\mathrm{A} = -0{,}000001424, \quad \mathrm{B} = -0{,}000000002\,79.$$

teur entre parenthèses devient $1 + 0,00131\,t$, et pour $t = -25$ il se réduit à $0,97$. Ainsi le terme en $t^3$, provenant de la variation de $e'$, a pour effet de diminuer des trois centièmes de sa valeur le coefficient de l'accélération relatif à l'époque des plus anciennes éclipses observées. Or ces éclipses paraissent exiger que ce coefficient soit, non pas diminué, mais au contraire à peu près doublé : l'analyse précédente ne fournit donc pas, dans la longitude moyenne de la Lune, de terme proportionnel au cube du temps qui puisse modifier notablement le coefficient de l'accélération applicable aux anciennes éclipses et faire concorder celles-ci avec la théorie.

Observons que la conclusion aurait pu être toute différente si les termes en $\varphi'^2$ ne s'étaient pas détruits dans la valeur de $\frac{dl}{dt}$, page 19; il importe donc de chercher si cette dérivée ne contient pas de pareils termes lorsqu'on pousse l'approximation plus loin. C'est ce que nous allons faire dans la suite de ce travail.

## DEUXIÈME SECTION.

Nous nous proposons, dans cette Section, d'intégrer les équations différentielles du mouvement de la Lune en conservant seulement, dans la fonction perturbatrice, avec la partie non périodique, les termes d'arguments $\theta - \theta'$ et $2\theta - 2\theta'$. On a vu ci-dessus les motifs qui nous conduisent à traiter d'abord la question ainsi simplifiée, sauf à tenir compte ensuite des parties de la fonction R, que nous laissons de côté en ce moment.

Les lettres M, $m$, $m'$, $a$, $a'$, $e$, $e'$, $n$, $n'$, $\varphi$, $\varphi'$, $\theta$, $\theta'$, $\varpi$, $\varpi'$, $\lambda$, $\lambda'$, $l$, $l'$, $f$, $\varepsilon$, conservant la signification qui leur a été attribuée dans la première Section, posons de plus

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \gamma, \quad \sin\frac{\varphi'}{2}\gamma';$$

appelons $r$ et $r'$ les rayons vecteurs menés du centre de la Terre aux centres de la Lune et du Soleil, et désignons par $s$ le cosinus de l'angle compris entre ces deux rayons. La fonction perturbatrice relative au mouvement de la Lune sera

$$fm'\left(\frac{rs}{r'^2} - \frac{1}{\sqrt{r'^2 - 2rr's + r^2}}\right).$$

Si l'on développe $\frac{1}{\sqrt{r'^2 - 2rr's + r^2}}$ suivant les puissances descendantes de $r'$, cette expression deviendra

$$fm'\left(-\frac{1}{r'} + \frac{r^2}{r'^3}Q_1 + \frac{r^3}{r'^4}Q_2 + \frac{r^4}{r'^5}Q_3 + \frac{r^5}{r'^6}Q_4 + \frac{r^6}{r'^7}Q_5 + \ldots\right),$$

$Q_1$, $Q_2$,... étant des polynômes entiers en $s$ dont voici les valeurs :

$$Q_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}s^2,$$
$$Q_2 = \frac{3}{2}s - \frac{5}{2}s^3,$$
$$Q_3 = -\frac{3}{8} + \frac{15}{4}s^2 - \frac{35}{8}s^4,$$
$$Q_4 = -\frac{15}{8}s + \frac{35}{4}s^3 - \frac{63}{8}s^5,$$
$$Q_5 = \frac{5}{16} - \frac{105}{16}s^2 + \frac{315}{16}s^4 - \frac{231}{16}s^6,$$
.................................

Mais la fonction perturbatrice n'entre dans les équations du problème que par ses dérivées partielles prises relativement aux éléments de la Lune; nous pouvons donc y supprimer le terme $-\frac{fm'}{r'}$, qui ne dépend pas de ces éléments; et en désignant par R la nouvelle fonction qui résulte de cette suppression, nous aurons

$$R = fm'\left(\frac{r^2}{r'^3}Q_1 + \frac{r^3}{r'^4}Q_2 + \frac{r^4}{r'^5}Q_3 + \ldots\right),$$

ou bien

$$\frac{R}{n'^2 a'^3} = \frac{r^2}{r'^3}Q_1 + \frac{r^3}{r'^4}Q_2 + \frac{r^4}{r'^5}Q_3 + \ldots$$

Si maintenant, à l'aide des formules du mouvement elliptique, on exprime à la manière ordinaire les diverses parties de R par des séries de cosinus d'angles multiples de $l$, $\varpi$, $\theta$, $l'$, $\varpi'$, $\theta'$, les coefficients de ces cosinus étant des fonctions de $a$, $e$, $\gamma$, $a'$, $e'$, $\gamma'$ developpées elles-mêmes suivant les puissances croissantes de $e$, $\gamma$, $e'$, $\gamma'$, $\frac{a}{a'}$, on aura formé ce qu'on appelle le *développement de la fonction perturbatrice.*

On négligera ici les parties de ce développement qui contiennent des puissances de $\gamma'$ supérieures à la seconde. Si l'on observe d'ailleurs qu'un terme dont l'argument renferme $i\theta'$ a nécessairement dans son coefficient le facteur $\gamma'^i$ ou le produit de ce facteur par une puissance positive et paire de $\gamma'$, on voit que la partie $R_1$ de la fonction perturbatrice dont nous avons besoin dans cette Section se présentera sous la forme

$$R_1 = n'^2 \varepsilon a^2 [U + V\gamma'^2 + X\gamma' \cos(\theta - \theta') + Y\gamma'^2 \cos(2\theta - 2\theta')],$$

U, V, X, Y désignant des séries qui procèdent suivant les puissances de $e$, $\gamma$, $e'$, $\frac{a}{a'}$.

Les petites quantités $e$, $\gamma$, $e'$, $\sqrt{\frac{a}{a'}}$ étant regardées comme du premier degré [*], j'ai calculé les valeurs de U, V, X, Y en négligeant les termes du dixième degré dans U, V, Y, et ceux du neuvième dans X. Pour abréger, je ne transcris pas ici ces développements; mais je les suppose formés, et il sera aisé de les retrouver.

Adoptons pour éléments du mouvement elliptique de la Lune les six quantités $\gamma$, $\theta$, $e$, $\varpi$, $a$, $\lambda$; les formules qui expriment les dérivées de ces éléments par rapport au temps en fonction des dérivées partielles de R se déduisent des équations de la page 16, en ayant égard à

---

[*] C'est pour éviter la confusion que je me sers ici du mot *degré* au lieu du mot *ordre*, qui serait plus conforme à l'usage : ce dernier sera employé, en effet, dans une autre acception, et nous dirons qu'une grandeur est de l'ordre $i$, quand elle sera comparable à $\gamma'^i$.

la relation $\gamma = \sin\frac{\varphi}{2}$; on trouve ainsi :

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\frac{dR}{d\theta} + \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{dR}{d\varpi} + \frac{dR}{d\lambda}\right),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\frac{dR}{d\gamma},$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{dR}{d\varpi} + \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\frac{dR}{d\lambda},$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{dR}{d\gamma} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{dR}{de},$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{dR}{d\lambda},$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{2}{na}\frac{dR}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\frac{dR}{de} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{dR}{d\gamma}.$$

Si maintenant nous réduisons R à la fonction $R_1$, qui ne contient ni $\varpi$ ni $\lambda$, ces formules deviendront

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\frac{dR_1}{d\theta},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\frac{dR_1}{d\gamma},$$

$$\frac{de}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{dR_1}{d\gamma} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{dR_1}{de},$$

$$\frac{da}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{2}{na}\frac{dR_1}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\frac{dR_1}{de} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{dR_1}{d\gamma},$$

et à l'aide de ces équations où $\gamma'$ et $\theta'$ doivent être regardées comme des fonctions connues du temps, il faudra trouver les valeurs de $\gamma$, $\theta$, $e$, $\varpi$, $a$, $\lambda$ [*].

[*] Dans tout ce qui va suivre, $e'$ et $\varpi'$ seront traitées comme des constantes. Nous ne nous proposons pas en effet de reprendre ici le calcul de la partie de l'accélération séculaire qui dépend de la déformation de l'orbite terrestre, nous en référant à cet égard aux travaux déjà mentionnés de MM. Adams et Delaunay.

C'est ce que nous allons faire en développant les inconnues en séries dont les termes soient des ordres 1, 2, 3,..., la quantité $\gamma'$ étant regardée comme du premier ordre; il suffira d'ailleurs, pour notre objet, de pousser ces développements jusqu'au second ordre.

Remarquons d'abord qu'en vertu de la troisième et de la cinquième équation, $a$ et $e$ sont des constantes et ne doivent plus compter parmi les inconnues. Il en est de même de $n$, en vertu de la relation

$$n^2 a^3 = f(\mathrm{M} + m).$$

Les deux premières équations ne contiennent donc que deux inconnues $\gamma$, $\theta$ et peuvent être traitées séparément. Si l'on négligeait $\gamma'$, la première se réduirait à $\frac{d\gamma}{dt} = 0$, d'où l'on conclurait $\gamma =$ const.; alors l'autre donnerait $\frac{d\theta}{dt} =$ const., et, par suite, $\theta =$ une fonction linéaire du temps. En partant de cette solution comme d'une première approximation, on formera des valeurs plus approchées de $\gamma$ et de $\theta$, où l'approximation devra être poussée jusqu'aux quantités du second ordre. Ces valeurs étant obtenues, la quatrième et la sixième de nos équations différentielles nous donneront $\varpi$ et $\lambda$ par de simples quadratures.

Entrons maintenant dans le détail des calculs qui viennent d'être indiqués. Posons

$$\gamma' \sin\theta' = u, \quad \gamma' \cos\theta' = v;$$

la valeur de $\mathrm{R}_1$ pourra s'écrire

$$\begin{aligned}\mathrm{R}_1 = n'^2 \varepsilon a^2 \Big\{ & \mathrm{U} + \mathrm{X}(u \sin\theta + v\cos\theta) + \mathrm{V}(u^2 + v^2) \\ & + 2\mathrm{Y}\left[\tfrac{1}{2}(v^2 - u^2)\cos 2\theta + uv \sin 2\theta\right]\Big\}.\end{aligned}$$

Mais la théorie des inégalités séculaires du mouvement des planètes donne les valeurs de $u$ et de $v$, développées suivant les puissances du temps; écrivons-les

$$u = \mathrm{A}t + \mathrm{A}_1 t^2, \quad v = \mathrm{B}t + \mathrm{B}_1 t^2,$$

formules où A et B doivent être considérées comme des quantités du premier ordre, $A_1$ et $B_1$ comme des quantités du deuxième ordre [*]. On n'y a pas conservé les termes en $t^3$, $t^4$,..., lesquels seraient respectivement du troisième, du quatrième,... ordre, par la raison que les parties de la longitude que nous cherchons sont du second ordre.

En substituant dans $R_1$ ces valeurs de $u$ et de $v$, et négligeant toujours les quantités du troisième ordre, on trouve

$$R_1 = n'^2 \varepsilon a^2 \Big\{ U + X(A\sin\theta + B\cos\theta)t + X(A_1\sin\theta + B_1\cos\theta)t^2 + V(A^2 + B^2)t^2 + 2Y\left[\frac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos 2\theta + AB\sin 2\theta\right]t^2 \Big\};$$

les équations

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\frac{dR_1}{d\theta}, \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\frac{dR_1}{d\gamma}$$

deviennent, par suite,

$$(\gamma)\quad \frac{d\gamma}{dt} = \frac{n'^2\varepsilon}{4n\gamma}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\Big\{ X(A\cos\theta - B\sin\theta)t + X(A_1\cos\theta - B_1\sin\theta)t^2 - 4Y\left[\frac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin 2\theta - AB\cos 2\theta\right]t^2 \Big\},$$

$$(\theta)\quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{n'^2\varepsilon}{4n\gamma}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\Big\{ U' + X'(A\sin\theta + B\cos\theta)t + X'(A_1\sin\theta + B_1\cos\theta)t^2 + V'(A^2 + B^2)t^2 + 2Y'\left[\frac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos 2\theta + AB\sin 2\theta\right]t^2 \Big\};$$

[*] On remarquera que les lettres A et B reçoivent ici et conserveront dans le reste du Mémoire une signification différente de celles qu'elles ont reçues précédemment, soit p. 17, soit encore p. 20.

où il faut entendre par U', V', X', Y' les dérivées de U, V, X, Y prises par rapport à $\gamma$, sans faire varier $a$, $a'$, $e$, $e'$.

Lorsqu'on néglige $\gamma'$, c'est-à-dire quand on suppose nulles les quantités A, B, $A_1$, $B_1$, on a

$$\frac{d\gamma}{dt} = 0, \quad \gamma = \gamma_0,$$

$\gamma_0$ désignant une constante, et en même temps

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{n'^2\varepsilon}{4n}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{U'}{\gamma}\right)_0,$$

en convenant d'indiquer par l'indice zéro ce que devient une fonction de $\gamma$ quand on y remplace $\gamma$ par la constante $\gamma_0$ : on conclut de là, en intégrant,

$$\theta = \text{const.} - \frac{n'^2\varepsilon}{4n}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{U'}{\gamma}\right)_0 t.$$

Représentons par $\theta_0$ cette valeur approchée de $\theta$, et, pour approcher davantage de nos deux inconnues, posons

$$\gamma = \gamma_0 + \delta_1\gamma + \delta_2\gamma + \ldots, \quad \theta = \theta_0 + \delta_1\theta + \delta_2\theta + \ldots,$$

$\delta_1\gamma$ et $\delta_1\theta$ étant du premier ordre, $\delta_2\gamma$ et $\delta_2\theta$ du deuxième, etc. Substituons ces valeurs dans les équations ($\gamma$) et ($\theta$), et égalons séparément les quantités d'un même ordre dans les deux membres de chaque équation; si nous posons, pour abréger,

$$A\cos\theta_0 - B\sin\theta_0 = p, \quad A\sin\theta_0 + B\cos\theta_0 = q,$$
$$A_1\cos\theta_0 - B_1\sin\theta_0 = p_1, \quad A_1\sin\theta_0 + B_1\cos\theta_0 = q_1,$$

$$\frac{1}{2}(B^2-A^2)\cos 2\theta_0 - AB\sin 2\theta_0 = P, \quad \frac{1}{2}(B^2-A^2)\sin 2\theta_0 - AB\cos 2\theta_0 = Q,$$

nous trouverons

$$(\gamma_1) \quad \frac{d\delta_1\gamma}{dt} = \frac{n'^2\varepsilon}{4n}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{X}{\gamma}\right)_0 pt,$$

$$(\theta_1) \quad \frac{d\delta_1\theta}{dt} = -\frac{n'^2\varepsilon}{4n}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{d}{d\gamma}\frac{U'}{\gamma}\right)_0\delta_1\gamma + \left(\frac{X'}{\gamma}\right)_0 qt\right],$$

4..

$$(\gamma_2)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\delta_2\gamma}{dt} = \frac{n'^2\varepsilon}{4n}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\Big[\left(\frac{d}{d\gamma}\frac{X}{\gamma}\right)_0 pt\,\delta_1\gamma - \left(\frac{X}{\gamma}\right)_0 qt\,\delta_1\theta \\ + \left(\frac{X}{\gamma}\right)_0 p_1 t^2 - 4\left(\frac{Y}{\gamma}\right)_0 Qt^2\Big], \end{aligned}\right.$$

$$(\theta_2)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\delta_2\theta}{dt} = -\frac{n'^2\varepsilon}{4n}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\Big[\left(\frac{d}{d\gamma}\frac{U'}{\gamma}\right)_0 \delta_2\gamma \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{d\gamma^2}\frac{U'}{\gamma}\right)_0 \delta_1\gamma^2 + \left(\frac{d}{d\gamma}\frac{X}{\gamma}\right)_0 qt\,\delta_1\gamma \\ + \left(\frac{X'}{\gamma}\right)_0 pt\,\delta_1\theta + \left(\frac{X'}{\gamma}\right)_0 q_1 t^2 \\ + \left(\frac{V'}{\gamma}\right)_0 (A^2+B^2)\,t^2 + 2\left(\frac{Y'}{\gamma}\right)_0 Pt^2\Big]. \end{aligned}\right.$$

Observons que $p$ et $q$ sont des quantités du premier ordre, que $p_1$, $q_1$, P, Q sont du deuxième, et qu'on a les relations

$$p^2 = \frac{1}{2}(A^2+B^2) - P, \quad q^2 = \frac{1}{2}(A^2+B^2) + P, \quad pq = -Q;$$

ajoutons que l'angle $\theta_0$ étant une fonction linéaire de $t$, les intégrales $\int p\,dt$, $\int pt\,dt$, $\int pt^2\,dt$, $\int q\,dt$, $\int qt\,dt$, $\int qt^2\,dt$, $\int p_1\,dt$, $\int p_1 t\,dt$, $\int p_1 t^2\,dt$, $\int q_1\,dt$, $\int q_1 t\,dt$, $\int q_1 t^2 dt$, $\int P\,dt$, $\int Pt\,dt$, $\int Pt^2\,dt$, $\int Q\,dt$, $\int Qt\,dt$, $\int Qt^2\,dt$ s'obtiendront, soit immédiatement, soit au moyen de l'intégration par partie.

Nous pourrons, d'après cela, trouver $\delta_1\gamma$ en intégrant l'équation $(\gamma_1)$, puis substituer la valeur de $\delta_1\gamma$ dans l'équation $(\theta_1)$ et intégrer cette dernière qui nous fera connaître $\delta_1\theta$. Intégrant ensuite l'équation $(\gamma_2)$ après y avoir porté les valeurs de $\delta_1\gamma$ et de $\delta_1\theta$, nous obtiendrons $\delta_2\gamma$, et, pour avoir $\delta_2\theta$, il ne restera plus qu'à intégrer l'équation $(\theta_2)$, après y avoir remplacé $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$, $\delta_2\gamma$ par leurs valeurs. On trouve ainsi

$$\delta_1\gamma = -\left(\frac{X}{U'}\right)_0 qt + \frac{4n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma X}{U'^2}\right)_0 p,$$

$$\delta_1\theta = -\left(\frac{1}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma X}{U'}\right)_0 pt - \frac{4n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma^2 X}{U'^2}\right)_0 q,$$

$$\delta_2\gamma = \left(\frac{1}{4\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma X^2}{U'^2}\right)_0 (A^2+B^2)t^2$$
$$-\left(\frac{X}{U'}\right)_0 q_1 t^2 + \frac{8n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma X}{U'^2}\right)_0 p_1 t$$
$$+\frac{32n^2}{n'^4\varepsilon^2}(1-e^2)\left(\frac{\gamma^2 X}{U'^3}\right)_0 q_1 - \frac{2}{U'_0}\left(\frac{X^2}{4\gamma^2}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma^2}{U'}+Y\right)_0 Pt^2$$
$$-\frac{8n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma}{U'^2}\right)_0\left(\frac{X^2U'^2}{4\gamma^5}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma^5}{U'^3}+Y\right)_0 Qt$$
$$+\frac{16n^2}{n'^4\varepsilon^2}(1-e^2)\left(\frac{\gamma^2}{U'^3}\right)_0\left(\frac{X^2U'^2}{4\gamma^5}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma^5}{U'^3}+Y\right)_0 P,$$

$$\delta_2\theta = \frac{n'^2\varepsilon}{12n}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4\gamma}\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma X^2}{U'}\right)-\frac{V'}{\gamma}\right]_0 (A^2+B^2)t^3$$
$$-\frac{n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma^2X^2}{U'^4}\frac{d^2}{d\gamma^2}\frac{U'}{\gamma}\right)_0 (A^2+B^2)t$$
$$-\left(\frac{1}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma X}{U'}\right)_0 p_1 t^2$$
$$-\frac{8n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma^2 X}{U'^2}\right)_0 q_1 t$$
$$+\frac{32n^2}{n'^4\varepsilon^2}(1-e^2)\left(\frac{1}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma^3X}{U'^3}\right)_0 p_1$$
$$+\left[\frac{1}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma Y}{U'}+\frac{\gamma^3X^2}{4U'^4}\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{U'}{\gamma^2}\frac{d}{d\gamma}\frac{U'}{\gamma}\right)+\frac{X'^2}{2\gamma^2U'}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma^2X}{U'X'}\right]_0 Qt^2$$
$$-\frac{2n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma^2Y}{U'^2}+\frac{\gamma^9X^2}{2U'^8\left(\frac{d}{d\gamma}\frac{U'}{\gamma}\right)^2}\frac{d}{d\gamma}\frac{U'^4\left(\frac{d}{d\gamma}\frac{U'}{\gamma}\right)^3}{\gamma^7}\right.$$
$$\left.+\frac{X'^3}{\gamma^4X}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma^5X^2}{U'^3X'^2}\right]_0 Pt$$
$$-\frac{4n^2}{n'^4\varepsilon^2}(1-e^2)\left[\frac{2}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma^3Y}{U'^3}+\frac{\gamma^{15}X^2}{2U'^{12}\left(\frac{d}{d\gamma}\frac{U'}{\gamma}\right)^4}\frac{d}{d\gamma}\frac{U'^7\left(\frac{d}{d\gamma}\frac{U'}{\gamma}\right)^5}{\gamma^{12}}\right.$$
$$\left.+\frac{X'^3}{\gamma^3U'X}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma^5X^2}{U'^3X'^2}\right]_0 Q.$$

En ajoutant à $\gamma_0$ les valeurs de $\delta_1\gamma$ et de $\delta_2\gamma$ qu'on vient d'écrire, on aura la valeur de $\gamma$. De même, en ajoutant à la valeur de $\theta_0$, savoir :

$$\theta_0 = \text{const.} - \frac{n'^2\varepsilon}{4n}(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{U'}{\gamma}\right)_0 t,$$

les valeurs de $\delta_1\theta$ et de $\delta_2\theta$ qu'on vient d'obtenir, on aura l'expression de $\theta$. Il reste à former celles de $\lambda$ et de $\varpi$.

Or, en se reportant aux valeurs de $\frac{d\lambda}{dt}$ et de $\frac{d\varpi}{dt}$ (p. 24), et en ayant égard à la valeur de $R_1$ (p. 25), on voit que si l'on pose

$$\frac{2}{a}\frac{d.a^2U}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{e}\frac{dU}{de} - \frac{\gamma}{2\sqrt{1-e^2}}\frac{dU}{d\gamma} = \Omega,$$

$$\frac{2}{a}\frac{d.a^2V}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{e}\frac{dV}{de} - \frac{\gamma}{2\sqrt{1-e^2}}\frac{dV}{d\gamma} = \Psi,$$

$$\frac{2}{a}\frac{d.a^2X}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{e}\frac{dX}{de} - \frac{\gamma}{2\sqrt{1-e^2}}\frac{dX}{d\gamma} = \Xi,$$

$$\frac{2}{a}\frac{d.a^2Y}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{e}\frac{dY}{de} - \frac{\gamma}{2\sqrt{1-e^2}}\frac{dY}{d\gamma} = \Upsilon,$$

$$-\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{dU}{de} - \frac{\gamma}{2\sqrt{1-e^2}}\frac{dU}{d\gamma} = \omega,$$

$$-\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{dV}{de} - \frac{\gamma}{2\sqrt{1-e^2}}\frac{dV}{d\gamma} = \psi,$$

$$-\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{dX}{de} - \frac{\gamma}{2\sqrt{1-e^2}}\frac{dX}{d\gamma} = \xi,$$

$$-\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{dY}{de} - \frac{\gamma}{2\sqrt{1-e^2}}\frac{dY}{d\gamma} = \upsilon,$$

on aura

$$(\lambda)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{n'^2\varepsilon}{n}\Big\{ & \Omega + \Xi(u\sin\theta + v\cos\theta) + \Psi(u^2+v^2) \\ & + 2\Upsilon\left[\frac{1}{2}(v^2-u^2)\cos 2\theta + uv\sin 2\theta\right]\Big\}, \end{aligned}\right.$$

$$(\varpi)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\varpi}{dt} = \frac{n'^2\varepsilon}{n}\Big\{ & \omega + \xi(u\sin\theta + v\cos\theta) + \psi(u^2+v^2) \\ & + 2\upsilon\left[\frac{1}{2}(v^2-u^2)\cos 2\theta + uv\sin 2\theta\right]\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Les quantités $\Omega$, $\Psi$, $\Xi$, $\Upsilon$, $\omega$, $\psi$, $\xi$, $\upsilon$ sont des fonctions de $\gamma$, et leurs dérivées, par rapport à cette variable, seront désignées à l'aide d'accents. A l'aide des développements de U, V, X, Y, suivant les puissances de $c$, $\gamma$, $e'$, $\frac{a}{a'}$, il est aisé de former ceux de $\Omega$, $\Psi$, $\Xi$, $\Upsilon$, $\omega$, $\psi$, $\xi$, $\upsilon$; je ne les transcrirai pas pour abréger; je ferai seulement remarquer que, d'après le degré d'approximation avec lequel ont été calculés U, V, X, Y, les termes négligés seront du dixième degré dans $\Omega$ et dans $\Psi$; du huitième, dans $\Xi$, $\Upsilon$, $\omega$, $\psi$; du sixième, dans $\xi$ et dans $\upsilon$.

Si maintenant, dans les premiers membres des équations ($\lambda$) et ($\varpi$), on remplace $\lambda$ et $\varpi$ par $\lambda_0 + \delta_1\lambda + \delta_2\lambda$, $\varpi_0 + \delta_1\varpi + \delta_2\varpi$, en sorte que $\lambda_0$ et $\varpi_0$ soient de l'ordre zéro, $\delta_1\lambda$ et $\delta_1\varpi$ du premier ordre, $\delta_2\lambda$ et $\delta_2\varpi$ du second; si de plus, dans les seconds membres des mêmes équations, on remplace $u$ par $\mathrm{A}t + \mathrm{A}_1t^2$, $v$ par $\mathrm{B}t + \mathrm{B}_1t^2$, $\gamma$ par $\gamma_0 + \delta_1\gamma + \delta_2\gamma$, $\theta$ par $\theta_0 + \delta_1\theta + \delta_2\theta$, et qu'on égale les parties du même ordre dans chaque membre, on trouvera

$$\frac{d\lambda_0}{dt} = \frac{n'^2\varepsilon}{n}\Omega_0,$$

$$\frac{d\delta_1\lambda}{dt} = \frac{n'^2\varepsilon}{n}(\Omega'_0\,\delta_1\gamma + \Xi_0\,qt),$$

$$\frac{d\delta_2\lambda}{dt} = \frac{n'^2\varepsilon}{n}\Big[\Omega'_0\,\delta_2\gamma + \tfrac{1}{2}\Omega''_0\,\delta_1\gamma^2 + \Xi_0\,q_1t^2$$
$$+ \Xi'_0\,qt\,\delta_1\gamma + \Xi_0\,pt\,\delta_1\theta + \Psi_0(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2)t^2 + 2\Upsilon_0\,\mathrm{P}t^2\Big],$$

$$\frac{d\varpi_0}{dt} = \frac{n'^2\varepsilon}{n}\omega_0,$$

$$\frac{d\delta_1\varpi}{dt} = \frac{n'^2\varepsilon}{n}(\omega'_0\,\delta_1\gamma + \xi_0\,qt),$$

$$\frac{d\delta_2\varpi}{dt} = \frac{n'^2\varepsilon}{n}\Big[\omega'_0\,\delta_2\gamma + \tfrac{1}{2}\omega''_0\,\delta_1\gamma^2$$
$$+ \xi_0\,q_1t^2 + \xi'_0\,qt\,\delta_1\gamma + \xi_0\,pt\,\delta_1\theta + \psi_0(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2)t^2 + 2\upsilon_0\,\mathrm{P}t^2\Big].$$

Intégrons maintenant ces équations, après avoir remplacé dans les seconds membres $\delta_1\gamma$, $\delta_2\gamma$, $\delta_1\theta$ par leurs valeurs (p. 28 et 29), il viendra

$$\lambda_0 = \text{const.} + \frac{n'^2\varepsilon}{n}\Omega_\rho t,$$

$$\delta_1\lambda = 4(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma}{U'}\right)_0\left(\Xi - \frac{\Omega' X}{U'}\right)_0 pt + \frac{16n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)\left(\frac{\gamma}{U'}\right)_0^2\left(\Xi - 2\frac{\Omega' X}{U'}\right)_0 q,$$

$$\begin{aligned}
\delta_2\lambda = {} & \frac{n'^2\varepsilon}{12n}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma\Omega' X^2}{U'^2} - \frac{2}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma\Xi X}{U'} + 4\Psi\right)_0(A^2+B^2)t^3 \\
& + \frac{4n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)\left(\frac{\gamma^2\Omega'' X^2}{U'^4}\right)_0(A^2+B^2)t \\
& + 4(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma}{U'}\right)_0\left(\Xi - \frac{\Omega' X}{U'}\right)_0 p_1 t^2 \\
& + \frac{32n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)\left(\frac{\gamma}{U'}\right)_0^2\left(\Xi - \frac{2\Omega' X}{U'}\right)_0 q_1 t \\
& - \frac{128n^2}{n'^4\varepsilon^2}(1-e^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\gamma}{U'}\right)_0^3\left(\Xi - \frac{3\Omega' X}{U'}\right)_0 p_1 \\
& - 2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{2\gamma\Omega' Y}{U'^2} + \frac{\gamma^3 X^2}{2U'^4}\frac{d}{d\gamma}\frac{U'\Omega'}{\gamma^2}\right. \\
& \qquad\qquad \left. - \frac{\gamma^2 X^2}{U'^3}\frac{d}{d\gamma}\frac{\Xi U'}{\gamma X} + \frac{2\gamma}{U'}\Upsilon\right)_0 Q t^2 \\
& + \frac{8n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)\left(-\frac{4\gamma^2\Omega' Y}{U'^3} + \frac{\gamma^9 X^2}{2U'^6\Omega'^2}\frac{d}{d\gamma}\frac{U'^4\Omega'^3}{\gamma^7}\right. \\
& \qquad\qquad \left. - \frac{\gamma^5 X^3}{U'^6\Xi}\frac{d}{d\gamma}\frac{U'^3\Xi^2}{\gamma^3 X^2} + \frac{2\gamma^2}{U'^2}\Upsilon\right)_0 Pt \\
& + \frac{16n^2}{n'^4\varepsilon^2}(1-e^2)^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{6\gamma^3\Omega' Y}{U'^4} + \frac{\gamma^{15} X^2}{2U'^{12}\Omega'^4}\frac{d}{d\gamma}\frac{U'^7\Omega'^5}{\gamma^{12}}\right. \\
& \qquad\qquad \left. - \frac{\gamma^6 X^3}{U'^7\Xi}\frac{d}{d\gamma}\frac{U'^3\Xi^2}{\gamma^3 X^2} + \frac{2\gamma^3}{U'^3}\Upsilon\right)_0 Q;
\end{aligned}$$

$$\varpi = \text{const.} + \frac{n'^2\varepsilon}{n}\omega_0 t,$$

$$\delta_1\varpi = 4(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma}{U'}\right)_0\left(\xi - \frac{\omega' X}{U'}\right)_0 pt + \frac{16n}{n'^2\varepsilon}(1-e^2)\left(\frac{\gamma}{U'}\right)_0^2\left(\xi - \frac{2\omega' X}{U'}\right)_0 q,$$

$$\begin{aligned}
\delta_2 \varpi = {} & \frac{n'^2 \varepsilon}{12 n}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma\omega' X^2}{U'^2} - \frac{2}{\gamma}\frac{d}{d\gamma}\frac{\gamma\xi X}{U'} + 4\psi\right)_0 (A^2 + B^2) t^3 \\
& + \frac{4n}{n'^2\varepsilon}(1 - e^2)\left(\frac{\gamma^2\omega'' X^2}{U'^4}\right)_0 (A^2 + B^2) t \\
& + 4(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma}{U'}\right)_0\left(\xi - \frac{\omega' X}{U'}\right)_0 p_1 t^2 \\
& + \frac{32 n}{n'^2\varepsilon}(1 - e^2)\left(\frac{\gamma}{U'}\right)_0^2\left(\xi - \frac{2\omega' X}{U'}\right)_0 q_1 t \\
& - \frac{128 n^2}{n'^4\varepsilon^2}(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\gamma}{U'}\right)_0^3\left(\xi - \frac{3\omega' X}{U'}\right)_0 p_1 \\
& - 2(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{2\gamma\omega' Y}{U'^4} + \frac{\gamma^3 X^2}{2U'^4}\frac{d}{d\gamma}\frac{U'\omega'}{\gamma^2}\right. \\
& \qquad\qquad \left. - \frac{\gamma^2 X^2}{U'^3}\frac{d}{d\gamma}\frac{U'\xi}{\gamma X} + \frac{2\gamma}{U'}\upsilon\right)_0 Q t^2 \\
& + \frac{8n}{n'^2\varepsilon}(1 - e^2)\left(-\frac{4\gamma^2\omega' Y}{U'^5} + \frac{\gamma^9 X^2}{2U'^8\omega'^2}\frac{d}{d\gamma}\frac{U'^4\omega'^3}{\gamma^7}\right. \\
& \qquad\qquad \left. - \frac{\gamma^5 X^3}{U'^6\xi}\frac{d}{d\gamma}\frac{U'^3\xi^2}{\gamma^3 X^2} + \frac{2\gamma^2}{U'^2}\upsilon\right)_0 P t \\
& + \frac{16 n^2}{n'^4\varepsilon^2}(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{6\gamma^3\omega' Y}{U'^4} + \frac{\gamma^{15} X^2}{2U'^{12}\omega'^4}\frac{d}{d\gamma}\frac{U'^7\omega'^5}{\gamma^{12}}\right. \\
& \qquad\qquad \left. - \frac{\gamma^6 X^3}{U'^7\xi}\frac{d}{d\gamma}\frac{U'^3\xi^2}{\gamma^3 X^2} + \frac{2\gamma^3}{U'^3}\upsilon\right) Q.
\end{aligned}$$

Il reste à substituer pour $U$, $V$, $X$, $Y$, $\Omega$, $\Psi$, $\Xi$, $\Upsilon$, $\omega$, $\psi$, $\xi$, $\upsilon$ leurs valeurs en fonction de $\gamma$, $e$, $e'$, $\sqrt{\frac{a}{a'}}$; faisons d'abord cette substitution dans les valeurs de $\theta_0$, $\lambda_0$, $\varpi_0$; nous obtiendrons les formules

$$\theta_0 = c_1 + h_0 t, \quad \lambda_0 = c_2 + k_0 t, \quad \varpi_0 = c_3 + j_0 t,$$

où $c_1$, $c_2$, $c_3$ désignent des constantes et où l'on a

$$\begin{aligned}
h_0 = -\frac{3}{4}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\Big[ & 1 - 2\gamma_0^2 + 2e^2 + \frac{3}{2}e'^2 - 4e^2\gamma_0^2 - 3e'^2\gamma_0^2 + \frac{9}{8}e^4 + 3e^2 e'^2 + \frac{15}{8}e'^4 + \frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2} \\
& - \frac{9}{4}e^4\gamma_0^2 - 6e^2 e'^2\gamma_0^2 - \frac{15}{4}e'^4\gamma_0^2 + \frac{7}{8}e^6 + \frac{27}{16}e^4 e'^2 + \frac{15}{4}e^2 e'^4 + \frac{35}{16}e'^6 \\
& - \frac{135}{8}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2 + \frac{165}{16}\frac{a^2}{a'^2}e^2 + \frac{75}{8}\frac{a^2}{a'^2}e'^2 + (8)\Big],
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
k_0 = -\frac{n'^2\varepsilon}{n}\Big[ & 1 - \frac{9}{2}\gamma_0^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 + 3\gamma_0^4 - \frac{15}{4}e^2\gamma_0^2 - \frac{27}{4}e'^2\gamma_0^2 + \frac{3}{32}e^4 + \frac{27}{16}e^2e'^2 + \frac{15}{8}e'^4 \\
& + \frac{9}{8}\frac{a^2}{a'^2} + \frac{3}{4}e^2\gamma_0^4 + \frac{9}{2}e'^2\gamma_0^4 + \frac{9}{8}e^4\gamma_0^2 - \frac{45}{8}e^2e'^2\gamma_0^2 - \frac{135}{16}e'^4\gamma_0^2 + \frac{3}{64}e^6 \\
& + \frac{9}{64}e^4e'^2 + \frac{135}{64}e^2e'^4 + \frac{35}{16}e'^6 - \frac{315}{16}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2 + \frac{315}{64}\frac{a^2}{a'^2}e^2 + \frac{45}{8}\frac{a^2}{a'^2}e'^2 \\
& - \frac{45}{16}e^4\gamma_0^4 + \frac{9}{8}e^2e'^2\gamma_0^4 + \frac{45}{8}e'^4\gamma_0^4 + \frac{33}{32}e^6\gamma_0^2 + \frac{27}{16}e^4e'^2\gamma_0^2 - \frac{225}{32}e^2e'^4\gamma_0^2 \\
& - \frac{315}{32}e'^6\gamma_0^2 + \frac{15}{512}e^8 + \frac{9}{128}e^6e'^2 + \frac{45}{256}e^4e'^4 + \frac{315}{128}e^2e'^6 + \frac{315}{128}e'^8 \\
& + \frac{1215}{16}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^4 - \frac{2655}{32}\frac{a^2}{a'^2}e^2\gamma_0^2 - \frac{1575}{16}\frac{a^2}{a'^2}e'^2\gamma_0^2 + \frac{225}{128}\frac{a^2}{a'^2}e^4 \\
& \qquad + \frac{1575}{64}\frac{a^2}{a'^2}e^2e'^2 + \frac{945}{64}\frac{a^2}{a'^2}e'^4 + \frac{75}{64}\frac{a^4}{a'^4} + (10)\Big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_0 = \frac{3}{4}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\Big[ & 1 - 8\gamma_0^2 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 + 10\gamma_0^4 - e^2\gamma_0^2 - 12e'^2\gamma_0^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{3}{4}e^2e'^2 + \frac{15}{8}e'^4 \\
& + \frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2} + 5e^2\gamma_0^4 + 15e'^2\gamma_0^4 - \frac{3}{2}e^4\gamma_0^2 - \frac{3}{2}e^2e'^2\gamma_0^2 - 15e'^4\gamma_0^2 - \frac{1}{16}e^6 \\
& - \frac{3}{16}e^4e'^2 - \frac{15}{16}e^2e'^4 + \frac{35}{16}e'^6 - \frac{165}{4}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2 + \frac{15}{32}\frac{a^2}{a'^2}e^2 + \frac{75}{8}\frac{a^2}{a'^2}e'^2 + (8)\Big].
\end{aligned}
$$

Faisons ensuite les mêmes substitutions dans $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$, $\delta_1\lambda$, $\delta_1\varpi$, $\delta_2\gamma$, $\delta_2\theta$, $\delta_2\lambda$, $\delta_2\varpi$; puis rassemblons les parties qui composent chacune de nos inconnues $\gamma$, $\theta$, $\lambda$, $\varpi$, d'après les formules

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \gamma_0 + \delta_1\gamma + \delta_2\gamma, \\
\theta &= \theta_0 + \delta_1\theta + \delta_2\theta, \\
\lambda &= \lambda_0 + \delta_1\lambda + \delta_2\lambda, \\
\varpi &= \varpi_0 + \delta_1\varpi + \delta_2\varpi;
\end{aligned}
$$

les seconds membres des trois dernières formules renfermeront chacun une partie qui sera fonction linéaire du temps; nous représenterons ces trois fonctions linéaires par $\theta^0$, $\lambda^0$, $\varpi^0$. On aura alors

$$
\theta^0 = c_1 + h^0 t, \quad \lambda^0 = c_2 + k^0 t, \quad \varpi^0 = c_3 + j^0 t,
$$

en faisant

$$h^0 = h_0 + \frac{4}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\Big[1 + 3\gamma_0^2 - 2e^2 - \frac{3}{2}e'^2 + 8\gamma_0^4 - 6e^2\gamma_0^2 - \frac{9}{2}e'^2\gamma_0^2 + \frac{23}{8}e^4$$
$$+ 3e^2e'^2 + \frac{3}{8}e'^4 + \frac{75}{16}\frac{a^2}{a'^2} + (6)\Big](A^2 + B^2).$$

$$k^0 = k_0 + \frac{4}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\Big[3 - 3\gamma_0^2 - \frac{19}{2}e^2 - \frac{9}{2}e'^2 - 12\gamma_0^4 + \frac{33}{2}e^2\gamma_0^2 + \frac{9}{2}e'^2\gamma_0^2$$
$$+ \frac{37}{2}e^4 + \frac{57}{4}e^2e'^2 + \frac{9}{8}e'^4 + \frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2} - 36\gamma_0^6 + 59e^2\gamma_0^4$$
$$+ 18e'^2\gamma_0^4 - \frac{153}{4}e^4\gamma_0^2 - \frac{99}{4}e^2e'^2\gamma_0^2 - \frac{9}{8}e'^4\gamma_0^2 - \frac{545}{16}e^6$$
$$- \frac{111}{4}e^4e'^2 - \frac{57}{16}e^2e'^4 + \frac{3}{16}e'^6 - \frac{1395}{8}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2 - \frac{15}{16}\frac{a^2}{a'^2}e^2$$
$$+ \frac{15}{4}\frac{a^2}{a'^2}e'^2 + (8)\Big](A^2 + B^2),$$

$$j^0 = j_0 - \frac{16}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\Big[1 - \frac{9}{2}\gamma_0^2 - \frac{31}{8}e^2 - \frac{3}{2}e'^2 - \frac{29}{2}\gamma_0^4 + \frac{117}{8}e^2\gamma_0^2 + \frac{27}{4}e'^2\gamma_0^2$$
$$+ \frac{151}{16}e^4 + \frac{93}{16}e^2e'^2 + \frac{3}{8}e'^4 + \frac{45}{32}\frac{a^2}{a'^2} + (6)\Big](A^2 + B^2).$$

Cela posé, les valeurs complètes de $\gamma$, $\theta$, $\varpi$, $\lambda$ seront

$$\gamma = \gamma_0 + \mathfrak{L}qt + \mathfrak{M}p + \mathfrak{N}(A^2 + B^2)t^2 + \mathfrak{L}q_1t^2 + 2\mathfrak{M}p_1t + \mathfrak{Q}q_1 + \mathfrak{R}Pt^2 + \mathfrak{S}Qt + \mathfrak{T}P,$$
$$\theta = \theta^0 + \mathfrak{L}'pt + \mathfrak{M}'q + \mathfrak{N}'(A^2 + B^2)t^3 + \mathfrak{L}'p_1t^2 + 2\mathfrak{M}'q_1t + \mathfrak{Q}'p_1 + \mathfrak{R}'Qt^2 + \mathfrak{S}'Pt + \mathfrak{T}'Q,$$
$$\varpi = \varpi^0 + \mathfrak{L}''pt + \mathfrak{M}''q + \mathfrak{N}''(A^2 + B^2)t^3 + \mathfrak{L}''p_1t^2 + 2\mathfrak{M}''q_1t + \mathfrak{Q}''p_1 + \mathfrak{R}''Qt^2 + \mathfrak{S}''Pt + \mathfrak{T}''Q,$$
$$\lambda = \lambda^0 + \mathfrak{L}'''pt + \mathfrak{M}'''q + \mathfrak{N}'''(A^2 + B^2)t^3 + \mathfrak{L}'''p_1t^2 + 2\mathfrak{M}'''q_1t + \mathfrak{Q}'''p_1 + \mathfrak{R}'''Qt^2 + \mathfrak{S}'''Pt + \mathfrak{T}'''Q,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\mathfrak{L} = 1 - \frac{1}{2}\gamma_0^2 - \frac{1}{8}\gamma_0^4 - \frac{1}{16}\gamma_0^6 + (8),$$
$$\mathfrak{L}' = \frac{1}{\gamma_0}\Big[1 - \frac{3}{2}\gamma_0^2 - \frac{5}{8}\gamma_0^4 - \frac{7}{16}\gamma_0^6 + (8)\Big],$$
$$\mathfrak{L}'' = -2\gamma_0\Big[1 + \frac{1}{2}\gamma_0^2 + \frac{3}{8}\gamma_0^4 + (6)\Big],$$
$$\mathfrak{L}''' = -2\gamma_0\Big[1 + \frac{1}{2}\gamma_0^2 + \frac{3}{8}\gamma_0^4 + \frac{5}{16}\gamma_0^6 + (8)\Big];$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M} = -\frac{4}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\Big[&1 + \frac{3}{2}\gamma_0^2 - 2e^2 - \frac{3}{2}e'^2 + \frac{23}{8}\gamma_0^4 - 3e^2\gamma_0^2 - \frac{9}{4}e'^2\gamma_0^2 + \frac{23}{8}e^4 + 3e^2e'^2\\ &+ \frac{3}{8}e'^4 - \frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2} + \frac{91}{16}\gamma_0^6 - \frac{23}{4}e^2\gamma_0^4 - \frac{69}{16}e'^2\gamma_0^4 + \frac{69}{16}e^4\gamma_0^2\\ &+ \frac{9}{2}e^2e'^2\gamma_0^2 + \frac{9}{16}e'^4\gamma_0^2 - \frac{35}{8}e^6 - \frac{69}{16}e^4e'^2 - \frac{3}{4}e^2e'^4 + \frac{1}{16}e'^6\\ &+ \frac{165}{16}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2 - \frac{45}{16}\frac{a^2}{a'^2}e^2 - \frac{15}{4}\frac{a^2}{a'^2}e'^2 + (8)\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}' = \frac{4}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\frac{1}{\gamma_0}\Big[&1 + \frac{9}{2}\gamma_0^2 - 2e^2 - \frac{3}{2}e'^2 + \frac{115}{8}\gamma_0^4 - 9e^2\gamma_0^2 - \frac{27}{4}e'^2\gamma_0^2 + \frac{23}{8}e^4 + 3e^2e'^2\\ &+ \frac{3}{8}e'^4 - \frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2} + \frac{637}{16}\gamma_0^6 - \frac{115}{4}e^2\gamma_0^4 - \frac{345}{16}e'^2\gamma_0^4 + \frac{207}{16}e^4\gamma_0^2\\ &+ \frac{27}{2}e^2e'^2\gamma_0^2 + \frac{27}{16}e'^4\gamma_0^2 - \frac{35}{8}e^6 - \frac{69}{16}e^4e'^2 - \frac{3}{4}e^2e'^4 + \frac{1}{16}e'^6\\ &+ \frac{495}{16}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2 - \frac{45}{16}\frac{a^2}{a'^2}e^2 - \frac{15}{4}\frac{a^2}{a'^2}e'^2 + (8)\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}'' = -\frac{8}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\gamma_0\Big[&9 + \frac{21}{2}\gamma_0^2 - 33e^2 - \frac{27}{2}e'^2 + \frac{115}{8}\gamma_0^4 - \frac{87}{2}e^2\gamma_0^2 - \frac{63}{4}e'^2\gamma_0^2 + \frac{627}{8}e^4\\ &+ \frac{99}{2}e^2e'^2 + \frac{27}{8}e'^4 + \frac{75}{8}\frac{a^2}{a'^2} + (6)\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}''' = \frac{8}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\gamma_0\Big[&5 + \frac{21}{2}\gamma_0^2 - 17e^2 - \frac{15}{2}e'^2 + \frac{307}{8}\gamma_0^4 - \frac{63}{2}e^2\gamma_0^2 - \frac{63}{4}e'^2\gamma_0^2 + \frac{273}{8}e^4\\ &+ \frac{51}{2}e^2e'^2 + \frac{15}{8}e'^4 + \frac{45}{8}\frac{a^2}{a'^2} + \frac{1001}{16}\gamma_0^6 - \frac{575}{8}e^2\gamma_0^4 - \frac{621}{16}e'^2\gamma_0^4\\ &+ \frac{957}{16}e^4\gamma_0^2 + \frac{189}{4}e^2e'^2\gamma_0^2 + \frac{63}{16}e'^4\gamma_0^2 - \frac{255}{4}e^6 - \frac{819}{16}e^4e'^2\\ &- \frac{51}{8}e^2e'^4 + \frac{5}{16}e'^6 - \frac{165}{16}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2 + \frac{15}{16}\frac{a^2}{a'^2}e^2 + \frac{45}{4}\frac{a^2}{a'^2}e'^2 + (8)\Big];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= \frac{1}{4}\frac{1}{\gamma_0}[1 - 3\gamma_0^2 + (8)],\\ \mathcal{N}' &= \frac{n'^2\varepsilon}{n}(6),\\ \mathcal{N}'' &= \frac{n'^2\varepsilon}{n}(6),\\ \mathcal{N}''' &= \frac{n'^2\varepsilon}{n}(8);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Q} = -\frac{32}{9}\,\frac{n^2}{n'^4\varepsilon^2}\Big[&1+\frac{7}{2}\gamma_0^2-4e^2-3e'^2+\frac{79}{8}\gamma_0^4-14e^2\gamma_0^2-\frac{21}{2}e'^2\gamma_0^2+\frac{39}{4}e^4+12e^2e'^2\\
&+3e'^4-\frac{15}{4}\frac{a^2}{a'^2}+\frac{407}{16}\gamma_0^6-\frac{79}{2}e^2\gamma_0^4-\frac{237}{8}e'^2\gamma_0^4+\frac{273}{8}e^4\gamma_0^2\\
&+42e^2e'^2\gamma_0^2+\frac{21}{2}e'^4\gamma_0^2-\frac{81}{4}e^6-\frac{117}{4}e^4e'^2-12e^2e'^4-e'^6\\
&+\frac{105}{8}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2+\frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2}e^2-\frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2}e'^2+(8)\Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Q}' = -\frac{32}{9}\,\frac{n^2}{n'^4\varepsilon^2}\,\frac{1}{\gamma_0}\Big[&1+\frac{21}{2}\gamma_0^2-4e^2-3e'^2+\frac{395}{8}\gamma_0^4-42e^2\gamma_0^2-\frac{63}{2}e'^2\gamma_0^2+\frac{39}{4}e^4\\
&+12e^2e'^2+3e'^4-\frac{15}{4}\frac{a^2}{a'^2}+\frac{2849}{16}\gamma_0^6-\frac{395}{2}e^2\gamma_0^4-\frac{1185}{8}e'^2\gamma_0^4\\
&+\frac{819}{8}e^4\gamma_0^2+126e^2e'^2\gamma_0^2+\frac{63}{2}e'^4\gamma_0^2-\frac{81}{4}e^6-\frac{117}{4}e^4e'^2-12e^2e'^4\\
&-e'^6+\frac{315}{8}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2+\frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2}e^2-\frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2}e'^2+(8)\Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Q}'' = \frac{64}{9}\,\frac{n^2}{n'^4\varepsilon^2}\,\gamma_0\Big[&17+\frac{105}{2}\gamma_0^2-98e^2-51e'^2+\frac{1027}{8}\gamma_0^4-315e^2\gamma_0^2-\frac{315}{2}e'^2\gamma_0^2+\frac{1323}{4}e^4\\
&+294e^2e'^2+51e'^4-\frac{45}{4}\frac{a^2}{a'^2}+(6)\Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Q}''' = -\frac{64}{9}\,\frac{n^2}{n'^4\varepsilon^2}\,\gamma_0\Big[&11+\frac{91}{2}\gamma_0^2-58e^2-33e'^2+\frac{1185}{8}\gamma_0^4-231e^2\gamma_0^2-\frac{273}{2}e'^2\gamma_0^2+\frac{699}{4}e^4\\
&+174e^2e'^2+33e'^4-\frac{45}{4}\frac{a^2}{a'^2}+\frac{6919}{16}\gamma_0^6-\frac{2923}{4}e^2\gamma_0^4-\frac{3555}{8}e'^2\gamma_0^4\\
&+\frac{5439}{8}e^4\gamma_0^2+693e^2e'^2\gamma_0^2+\frac{273}{2}e'^4\gamma_0^2-\frac{1703}{4}e^6-\frac{2097}{4}e^4e'^2\\
&-174e^2e'^4-11e'^6+\frac{525}{8}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2+\frac{135}{8}\frac{a^2}{a'^2}e^2-\frac{45}{8}\frac{a^2}{a'^2}e'^2+(8)\Big];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R} &= -\frac{1}{2\gamma_0}\left[1-\gamma_0^2+(8)\right],\\
\mathfrak{R}' &= \frac{1}{\gamma_0^2}\left[1-\gamma_0^2+\gamma_0^4+\gamma_0^6+45e'^4\gamma_0^2+(8)\right],\\
\mathfrak{R}'' &= 2\gamma_0^2\left[1+\gamma_0^2+(4)\right],\\
\mathfrak{R}''' &= 2\gamma_0^2\left[1+\gamma_0^2+\gamma_0^4+(6)\right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S} = -\frac{4}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\frac{1}{\gamma_0}\Big[&1+5\gamma_0^2-2e^2-\frac{3}{2}e'^2+14\gamma_0^4-10e^2\gamma_0^2-\frac{15}{2}e'^2\gamma_0^2+\frac{23}{8}e^4+3e^2e'^2\\
&+\frac{3}{8}e'^4-\frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2}+36\gamma_0^6-28e^2\gamma_0^4-21e'^2\gamma_0^4+\frac{115}{8}e^4\gamma_0^2\\
&+15e^2e'^2\gamma_0^2+\frac{15}{8}e'^4\gamma_0^2-\frac{35}{8}e^6-\frac{69}{16}e^4e'^2-\frac{3}{4}e^2e'^4+\frac{1}{16}e'^6\\
&+30\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2-\frac{45}{16}\frac{a^2}{a'^2}e^2-\frac{15}{4}\frac{a^2}{a'^2}e'^2+(8)\Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}' = -\frac{8}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\frac{1}{\gamma_0^2}\Big[&1+3\gamma_0^2-2e^2-\frac{3}{2}e'^2+7\gamma_0^4-6e^2\gamma_0^2-\frac{9}{2}e'^2\gamma_6^2+\frac{23}{8}e^4+3e^2e'^2\\
&+3e'^4-\frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2}+15\gamma_0^6-14e^2\gamma_0^4-\frac{21}{2}e'^2\gamma_0^4+\frac{69}{8}e^4\gamma_0^2+9e^2e'^2\gamma_0^2\\
&+\frac{369}{8}e'^4\gamma_0^2-\frac{35}{8}e^6-\frac{69}{16}e^4e'^2-\frac{33}{16}e^2e'^4+\frac{1}{16}e'^6+\frac{165}{8}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2\\
&-\frac{45}{16}\frac{a^2}{a'^2}e^2-\frac{15}{4}\frac{a^2}{a'^2}e'^2+(8)\Big],
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{S}'' = \frac{16}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\gamma_0^2\Big[1+5\gamma_0^2-2e^2-\frac{3}{2}e'^2+(4)\Big],$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}''' = \frac{16}{3}\frac{n}{n'^2\varepsilon}\gamma_0^2\Big[&1+5\gamma_0^2-2e^2-\frac{3}{2}e'^2+17\gamma_0^4-10e^2\gamma_0^2-\frac{15}{2}e'^2\gamma_0^2+\frac{23}{8}e^4+3e^2e'^2\\
&+\frac{3}{8}e'^4+\frac{45}{4}\frac{a^2}{a'^2}+(6)\Big];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T} = \frac{8}{9}\frac{n^2}{n'^4\varepsilon^2}\frac{1}{\gamma_0}\Big[&1+7\gamma_0^2-4e^2-3e'^2+28\gamma_0^4-28e^2\gamma_0^2-21e'^2\gamma_0^2+\frac{39}{4}e^4+12e^2e'^2\\
&+3e'^4-\frac{15}{4}\frac{a^2}{a'^2}+92\gamma_0^6-112e^2\gamma_0^4-84e'^2\gamma_0^4+\frac{273}{4}e^4\gamma_0^2\\
&+84e^2e'^2\gamma_0^2+21e'^4\gamma_0^2-\frac{81}{4}e^6-\frac{117}{4}e^4e'^2-12e^2e'^4-e'^6\\
&+\frac{105}{4}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2+\frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2}e^2-\frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2}e'^2+(8)\Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T}' = -\frac{16}{9}\frac{n^2}{n'^4\varepsilon^2}\frac{1}{\gamma_0^2}\Big[&1+5\gamma_0^2-4e^2-3e'^2+21\gamma_0^4-20e^2\gamma_0^2-15e'^2\gamma_0^2+\frac{39}{4}e^4+12e^2e'^2\\
&+\frac{45}{8}e'^4-\frac{15}{4}\frac{a^2}{a'^2}+77\gamma_0^6-84e^2\gamma_0^4-63e'^2\gamma_0^4+\frac{195}{4}e^4\gamma_0^2\\
&+60e^2e'^2\gamma_0^2+\frac{261}{4}e'^4\gamma_0^2-\frac{81}{4}e^6-\frac{117}{4}e^4e'^2-\frac{297}{16}e^2e'^4-\frac{79}{16}e'^6\\
&+\frac{165}{8}\frac{a^2}{a'^2}\gamma_0^2+\frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2}e^2-\frac{15}{8}\frac{a^2}{a'^2}e'^2+(8)\Big],
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{T}'' = \frac{32}{9}\frac{n^2}{n'^2\varepsilon^2}\gamma_0^2\left[19 + 93\gamma_0^2 - 106e^2 - 57e'^2 + (4)\right],$$

$$\mathfrak{T}''' = -\frac{16}{9}\frac{n^2}{n'^2\varepsilon^2}\gamma_0^2\Big[18 + 94\gamma_0^2 - 100e^2 - 54e'^2 + 354\gamma_0^4 - 516e^2\gamma_0^2 - 282e'^2\gamma_0^2 + \frac{621}{2}e^4$$
$$+ 300e^2e'^2 + 54e'^4 + \frac{405}{2}\frac{a^2}{a'^2} + (6)\Big].$$

Voyons ce que nous apprennent ces formules relativement à la question qui nous occupe. La quantité $n$ étant constante, l'équation $l = \int n\,dt + \lambda$ se réduit ici à

$$l = nt + \lambda;$$

en mettant pour $\lambda$ la valeur qu'on vient de trouver, on voit que le seul terme non périodique de la longitude moyenne qui ne se confonde pas avec le moyen mouvement est le terme $\mathfrak{M}'''(A^2 + B^2)t^3$ ou

$$\frac{n'^2\varepsilon}{n}(8)(A^2 + B^2)t^3.$$

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Lorsqu'on fait abstraction de la diminution de l'excentricité de l'orbite terrestre et qu'on réduit la fonction R à sa partie non périodique et aux termes d'arguments $\theta - \theta'$ et $2\theta - 2\theta'$, le terme proportionnel au cube du temps, qu'on pourrait s'attendre à trouver dans la longitude moyenne de la Lune par suite du déplacement du plan de l'écliptique, est le produit de $\frac{n'^2\varepsilon}{n}(A^2 + B^2)t^3$ par un coefficient qui, s'il n'est pas nul, est au moins du huitième degré en $\gamma_0$, $e$, $e'$, $\sqrt{\frac{a}{a'}}$; par conséquent, ce terme est ou nul, ou insensible dans les limites des temps historiques [*].

La partie $R_1$ de la fonction perturbatrice était celle qui semblait devoir introduire dans l'accélération du mouvement de la Lune les

---

[*] Le facteur $\frac{n'^2\varepsilon}{n}(A^2 + B^2)$ est égal à $0'',000\,000\,63$ environ, quand on prend le siècle pour unité de temps.

termes les plus considérables parmi ceux qui dépendent du déplacement de l'écliptique, et on vient de voir au contraire qu'elle ne fournit que des termes nuls ou négligeables. Il nous reste à calculer les termes du même genre qu'amènera le rétablissement dans la fonction perturbatrice de la partie $R - R_1$ laissée d'abord de côté. Mais avant d'entreprendre cette recherche qui sera l'objet de la troisième Section, nous signalerons encore quelques conséquences des formules qui précèdent.

Dans les expressions de $\theta$ et de $\varpi$, les termes en $t^3$ sont les produits de $\frac{n'^2\varepsilon}{n}(A^2 + B^2)t^3$ par des facteurs qui, s'ils ne sont pas nuls, sont au moins du sixième degré. Ainsi, quand on réduit R à sa partie $R_1$, le déplacement de l'écliptique n'amène, ni dans la longitude du nœud de la Lune, ni dans celle de son périgée, aucun terme sensible qui croisse comme le cube du temps.

Quant à l'élément $\gamma$ qui est le sinus de la demi-inclinaison de l'orbite lunaire sur le plan fixe, nous voyons qu'il renferme un terme séculaire dépendant du déplacement de l'écliptique, savoir :

$$\frac{1}{4\gamma_0}\left[1 - 3\gamma_0^2 + (8)\right](A^2 + B^2)t^2.$$

Il en résulte dans l'inclinaison $\varphi$ elle-même un terme en $t^2$ qui est à peu près $+ 0'',031\, t^2$.

Examinons enfin si dans les mêmes hypothèses l'inclinaison de l'orbite lunaire sur le plan de l'écliptique mobile est affectée de quelque inégalité non périodique. Cette inclinaison étant désignée par $i$, faisons

$$\sin\frac{i}{2} = \eta.$$

Le triangle sphérique déterminé par le plan fixe, le plan de l'écliptique mobile et le plan de l'orbite lunaire, nous donnera l'équation

$$\cos i = \cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\cos(\theta - \theta'),$$

ou bien

$$1 - 2\eta^2 = (1 - 2\gamma^2)(1 - 2\gamma'^2) + 4\gamma\gamma'\sqrt{1-\gamma^2}\sqrt{1-\gamma'^2}\cos(\theta - \theta'),$$

ou encore

$$\eta^2 = \gamma^2 + \gamma'^2 - 2\gamma^2\gamma'^2 - 2\gamma\gamma'\sqrt{1-\gamma^2}\sqrt{1-\gamma'^2}\cos(\theta - \theta').$$

Remplaçons $\gamma'\sin\theta'$ et $\gamma'\cos\theta'$ par $At + A_1 t^2$ et $Bt + B_1 t^2$; il nous viendra, en négligeant des quantités du troisième ordre,

$$\eta^2 = \gamma^2 - 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2}(A\sin\theta + B\cos\theta)t$$
$$- 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2}(A_1\sin\theta + B_1\cos\theta)t^2 + (1-2\gamma^2)(A^2+B^2)t^2.$$

Représentons par $\gamma_0 + \Delta\gamma$ et $\theta^0 + \Delta\theta$ les valeurs de $\gamma$ et de $\theta$ que donnent les formules de la page 35; observons d'ailleurs que la différence $h^0 - h_0$ étant du second ordre, $\theta^0$ et $\theta_0$ ne diffèrent non plus que d'une quantité du second ordre, et nous aurons, en négligeant toujours des quantités du troisième ordre,

$$A\sin\theta + B\cos\theta = A\sin\theta^0 + B\cos\theta^0 + (A\cos\theta^0 - B\sin\theta^0)\Delta\theta$$
$$= A\sin\theta_0 + B\cos\theta_0 + (A\cos\theta_0 - B\sin\theta_0)\Delta\theta = q + p\Delta\theta,$$
$$A_1\sin\theta + B_1\cos\theta = A_1\sin\theta^0 + B_1\cos\theta^0 = A_1\sin\theta_0 + B_1\cos\theta_0 = q_1.$$

La valeur de $\eta^2$ deviendra par suite

$$\eta^2 = \gamma_0^2 + 2\gamma_0\Delta\gamma + \Delta\gamma^2 - 2\gamma_0\sqrt{1-\gamma_0^2}\,qt - 2\gamma_0\sqrt{1-\gamma_0^2}\,pt\Delta\theta$$
$$- 2\frac{1-2\gamma_0^2}{\sqrt{1-\gamma_0^2}}qt\Delta\gamma - 2\gamma_0\sqrt{1-\gamma_0^2}\,q_1t^2 + (1-2\gamma_0^2)(A^2+B^2)t^2.$$

Mais les valeurs de $\Delta\gamma$ et de $\Delta\theta$ peuvent s'écrire, d'après les formules qu'on vient de citer,

$\Delta\gamma = \mathcal{L}qt + \mathfrak{M}p + \mathfrak{N}(A^2+B^2)t^2 +$ des termes périodiques du second ordre,

$\Delta\theta = \mathcal{L}'pt + \mathfrak{M}'q +$ des termes du second ordre.

Il en résulte, aux quantités près du troisième ordre,

$$\begin{aligned}\eta^2 = \gamma_0^2 &+ 2\gamma_0\mathcal{L}qt + 2\gamma_0\mathcal{M}p + 2\gamma_0\mathcal{N}(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)t^2 + \mathcal{L}^2q^2t^2 + 2\mathcal{L}\mathcal{M}pqt \\ &+ \mathcal{M}^2p^2 - 2\gamma_0\sqrt{1-\gamma_0^2}\,qt - 2\gamma_0\sqrt{1-\gamma_0^2}\,\mathcal{L}'p^2t^2 - 2\gamma_0\sqrt{1-\gamma_0^2}\,\mathcal{M}'pqt \\ &- 2\frac{1-2\gamma_0^2}{\sqrt{1-\gamma_0^2}}\mathcal{L}q^2t^2 - 2\frac{1-2\gamma_0^2}{\sqrt{1-\gamma_0^2}}\mathcal{M}pqt - 2\gamma_0\sqrt{1-\gamma_0^2}\,q_1t^2 \\ &+ (1-2\gamma_0^2)(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)t^2 + \text{des termes périodiques du second ordre},\end{aligned}$$

ce qui, en ayant égard aux relations

$$p^2 = \frac{1}{2}(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2) - \mathrm{P},\quad q^2 = \frac{1}{2}(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2) + \mathrm{P},\quad pq = -\mathrm{Q},$$

peut s'écrire encore

$$\begin{aligned}\eta^2 = \gamma_0^2 &+ 2\gamma_0\left(\mathcal{L} - \sqrt{1-\gamma_0^2}\right)qt + 2\gamma_0\mathcal{M}p \\ &+ \left(2\gamma_0\mathcal{N} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^2 - \gamma_0\sqrt{1-\gamma_0^2}\,\mathcal{L}' - \frac{1-2\gamma_0^2}{\sqrt{1-\gamma_0^2}}\mathcal{L} + 1 - 2\gamma_0^2\right)(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)t^2 \\ &+ \text{des termes du second ordre constants ou périodiques.}\end{aligned}$$

Or on a

$$\mathcal{L} = 1 - \frac{1}{2}\gamma_0^2 - \frac{1}{8}\gamma_0^4 - \frac{1}{16}\gamma_0^6 + (8) = \sqrt{1-\gamma_0^2} + (8),$$

$$\mathcal{N} = \frac{1}{4\gamma_0}[1 - 3\gamma_0^2 + (8)],$$

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{\gamma_0}\left[1 - \frac{3}{2}\gamma_0^2 - \frac{5}{8}\gamma_0^4 - \frac{7}{16}\gamma_0^6 + (8)\right],$$

d'où il suit

$$\mathcal{L} - \sqrt{1-\gamma_0^2} = (8),$$

$$2\gamma_0\mathcal{N} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^2 - \gamma_0\sqrt{1-\gamma_0^2}\,\mathcal{L}' - \frac{1-2\gamma_0^2}{\sqrt{1-\gamma_0^2}}\mathcal{L} + 1 - 2\gamma_0^2 = (8):$$

donc

$$\begin{aligned}\eta^2 = \gamma_0^2 &+ (8)\gamma_0 qt + 2\gamma_0\mathcal{M}p + (8)(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)t^2 \\ &+ \text{des termes du second ordre constants ou périodiques,}\end{aligned}$$

ou, en extrayant la racine carrée,

$$\eta = \gamma_0 + (8)\,qt + \mathfrak{M}\,p + \frac{(8)}{\gamma_0}(A^2 + B^2)\,t^2$$
$$+ \text{ des termes du second ordre constants ou périodiques.}$$

On voit que si $\eta$ renferme un terme proportionnel au carré du temps, ce terme est le produit de $(A^2 + B^2)\,t^2$, c'est-à-dire de $0{,}0000000135\,t^2$, par un facteur qui est au moins du septième degré. Un pareil terme, s'il existe, doit être regardé comme insensible.

La même conclusion s'étend sans peine au terme en $t^2$, qui pourrait exister dans la valeur de l'angle $i$ lié à $\eta$ par la formule $\sin\frac{i}{2} = \eta$.

Ainsi, et en supposant toujours la fonction perturbatrice réduite à sa partie $R_1$, la proposition énoncée par Laplace, que le plan de l'orbite lunaire conserve une inclinaison moyenne constante sur le plan de l'écliptique mobile, subsiste même lorsqu'on pousse l'approximation relative aux petites quantités $\gamma_0$, $e$, $e'$, $\frac{a}{a'}$, beaucoup plus loin que ne le fait l'auteur de la *Mécanique céleste*.

## TROISIÈME SECTION.

Dans la Section précédente, on a intégré les équations différentielles du mouvement de la Lune en réduisant la fonction pertubatrice R à la partie $R_1$; il faut à présent tenir compte des autres termes de la fonction R, termes dont nous désignerons la somme par $R_2$, en sorte qu'on ait

$$R = R_1 + R_2.$$

Observons que les dérivées partielles $\frac{dR_1}{d\varpi}$, $\frac{dR_1}{d\lambda}$ sont nulles, et représentons par

$$\mathcal{E},\quad \mathcal{F},\quad \mathcal{G},\quad \mathfrak{z}$$

les dérivées partielles

$$\frac{dR_1}{d\gamma},\quad \frac{dR_1}{d\theta},\quad \frac{dR_1}{de},\quad \frac{dR_1}{da};$$

représentons d'ailleurs par

$$\mathrm{E},\quad \mathrm{F}\quad \mathrm{G},\quad \mathrm{H},\quad \mathrm{I},\quad \mathrm{J}$$

les dérivées partielles

$$\frac{d\mathrm{R}_2}{d\gamma},\quad \frac{d\mathrm{R}_2}{d\theta},\quad \frac{d\mathrm{R}_2}{de},\quad \frac{d\mathrm{R}_2}{d\varpi},\quad \frac{d\mathrm{R}_2}{da},\quad \frac{d\mathrm{R}_2}{d\lambda}.$$

Alors les expressions complètes des dérivées des éléments seront données par les équations

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\mathcal{F} + \frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\mathrm{F} + \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}(\mathrm{H}+\mathrm{J}),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\mathcal{E} - \frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\mathrm{E},$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\mathrm{H} + \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\mathrm{J},$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\mathcal{E} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\mathcal{G} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\mathrm{E} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\mathrm{G},$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2}{na}\mathrm{J},$$

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda}{dt} &= \frac{2}{na}\mathcal{J} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\mathcal{G} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\mathcal{E}\\ &\quad + \frac{2}{na}\mathrm{I} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\mathrm{G} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\mathrm{E}.\end{aligned}$$

Convenons maintenant d'employer les lettres $\gamma$, $\theta$, $\varpi$, $\lambda$ pour représenter les valeurs de ces quatre éléments qu'on obtient en supprimant la partie $\mathrm{R}_2$ de $\mathrm{R}_1$, valeurs qui sont données par les formules de la page 35; désignons d'ailleurs par $a$ et $e$ les constantes auxquelles se réduisent dans ce cas le demi-grand axe et l'excentricité. Enfin, représentons par $\gamma+\delta\gamma$, $\theta+\delta\theta$, $e+\delta e$, $\varpi+\delta\varpi$, $a+\delta a$, $\lambda+\delta\lambda$ les valeurs complètes des éléments, c'est-à-dire celles qu'ils acquièrent lorsqu'on rétablit dans la fonction perturbatrice la partie $\mathrm{R}_2$.

En indiquant par la caractéristique $\delta$ l'accroissement qu'éprouve une fonction quelconque de $\gamma$, $\theta$, $e$, $\varpi$, $a$, $\lambda$, lorsqu'on y remplace ces éléments par $\gamma + \delta\gamma$, $\theta + \delta\theta$, $e + \delta e$, $\varpi + \delta\varpi$, $a + \delta a$, $\lambda + \delta\lambda$, nous aurons

$$
(\mathrm{A}) \left\{
\begin{aligned}
\frac{d\delta\gamma}{dt} &= \frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\,\mathrm{F} + \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}(\mathrm{H}+\mathrm{J}) \\
&\quad + \delta\left[\frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\,\mathcal{F} + \frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\,\mathrm{F} + \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}(\mathrm{H}+\mathrm{J})\right], \\
\frac{d\delta\theta}{dt} &= -\frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\,\mathrm{E} + \delta\left(-\frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\,\mathcal{E} - \frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\,\mathrm{E}\right), \\
\frac{d\delta e}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\,\mathrm{H} + \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\,\mathrm{J} \\
&\quad + \delta\left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\,\mathrm{H} + \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\,\mathrm{J}\right), \\
\frac{d\delta\varpi}{dt} &= -\frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\,\mathrm{E} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\,\mathrm{G} \\
&\quad + \delta\left(-\frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\,\mathcal{E} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\,\mathcal{G}\right. \\
&\qquad \left. - \frac{\gamma}{2na^2e\sqrt{1-e^2}}\,\mathrm{E} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\,\mathrm{G}\right), \\
\frac{d\delta a}{dt} &= -\frac{2}{na}\,\mathrm{J} + \delta\left(-\frac{2}{na}\,\mathrm{J}\right), \\
\frac{d\delta\lambda}{dt} &= \frac{2}{na}\,\mathrm{I} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\,\mathrm{G} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\,\mathrm{E} \\
&\quad + \delta\left(\frac{2}{na}\,\mathcal{I} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\,\mathcal{G} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\,\mathcal{E}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{2}{na}\,\mathrm{I} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\,\mathrm{G} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\,\mathrm{E}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Il faut, de ces équations, conclure $\delta\gamma, \ldots, \delta\lambda$ par approximations successives. La première approximation consiste à négliger dans les seconds membres les parties affectées de la caractéristique $\delta$. Les équations exactes (A) se réduisent alors aux équations approchées qui suivent :

$$
(\mathrm{B})\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d\delta\gamma}{dt} &= \frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\mathrm{F} + \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}(\mathrm{H}+\mathrm{J}),\\
\frac{d\delta\theta}{dt} &= -\frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\mathrm{E},\\
\frac{d\delta e}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\mathrm{H} + \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\mathrm{J},\\
\frac{d\delta\varpi}{dt} &= -\frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\mathrm{E} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\mathrm{G},\\
\frac{d\delta a}{dt} &= -\frac{2}{na}\mathrm{J},\\
\frac{d\delta\lambda}{dt} &= \frac{2}{na}\mathrm{I} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\mathrm{G} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\mathrm{E},
\end{aligned}
\right.
$$

où les seconds membres deviennent des fonctions explicites du temps, lorsqu'on y remplace $\gamma$, $\theta$, $\varpi$, $\lambda$ par les valeurs de la page 35 et $\gamma'\sin\theta'$, $\gamma'\cos\theta'$ par $\mathrm{A}t + \mathrm{A}_1 t^2$, $\mathrm{B}t + \mathrm{B}_1 t^2$. Pour faciliter les calculs, nous poserons

$$
\begin{aligned}
\Delta_1\gamma &= \mathcal{L}\,qt + \mathcal{M}\,p,\\
\Delta_1\theta &= \mathcal{L}'\,pt + \mathcal{M}'\,q,\\
\Delta_1\varpi &= \mathcal{L}''\,pt + \mathcal{M}''\,q,\\
\Delta_1\lambda &= \mathcal{L}'''\,pt + \mathcal{M}'''\,q,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_2\gamma &= \mathcal{N}\,(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)t^2 + \mathcal{L}\,q_1t^2 + 2\mathcal{M}\,p_1t + \mathcal{Q}\,q_1 + \mathcal{R}\,\mathrm{P}t^2 + \mathcal{S}\,\mathrm{Q}t + \mathcal{T}\,\mathrm{P},\\
\Delta_2\theta &= \mathcal{N}'(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)t^3 + \mathcal{L}'p_1t^2 + 2\mathcal{M}'q_1t + \mathcal{Q}'p_1 + \mathcal{R}'\mathrm{Q}t^2 + \mathcal{S}'\mathrm{P}t + \mathcal{T}'\mathrm{Q},\\
\Delta_2\varpi &= \mathcal{N}''(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)t^3 + \mathcal{L}''p_1t^2 + 2\mathcal{M}''q_1t + \mathcal{Q}''p_1 + \mathcal{R}''\mathrm{Q}t^2 + \mathcal{S}''\mathrm{P}t + \mathcal{T}''\mathrm{Q},\\
\Delta_2\lambda &= \mathcal{N}'''(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)t^3 + \mathcal{L}'''p_1t^2 + 2\mathcal{M}'''q_1t + \mathcal{Q}'''p_1 + \mathcal{R}'''\mathrm{Q}t^2 + \mathcal{S}'''\mathrm{P}t + \mathcal{T}'''\mathrm{Q},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\gamma &= \Delta_1\gamma + \Delta_2\gamma,\\
\Delta\theta &= \Delta_1\theta + \Delta_2\theta,\\
\Delta\varpi &= \Delta_1\varpi + \Delta_2\varpi,\\
\Delta\lambda &= \Delta_1\lambda + \Delta_2\lambda,
\end{aligned}
$$

en sorte qu'on ait

$$\text{(C)} \quad \gamma = \gamma_0 + \Delta\gamma, \quad \theta = \theta^0 + \Delta\theta, \quad \varpi = \varpi^0 + \Delta\varpi, \quad \lambda = \lambda^0 + \Delta\lambda.$$

Observons que $\Delta_1 \gamma$, $\Delta_1 \theta$, $\Delta_1 \varpi$, $\Delta_1 \lambda$ sont des quantités du premier ordre, tandis que $\Delta_2 \gamma$, $\Delta_2 \theta$, $\Delta_2 \varpi$, $\Delta_2 \lambda$ sont du second.

Cela posé, revenons aux équations (B); lorsqu'on y aura remplacé les dérivées partielles de $R_2$ par leurs valeurs, le second membre de chacune d'elles deviendra une série de termes de la forme $M \frac{\sin}{\cos} \mathcal{A}$, M étant une fonction de $\gamma$ et de $\gamma'$ et $\mathcal{A}$ désignant un argument de la forme

$$\mathcal{A} = ml + m_1 \varpi + m_2 \theta + m'l' + m'_1 \varpi' + m'_2 \theta';$$

dans cette formule, on a

$$l = nt + \lambda,$$

et $m$, $m_1$, $m_2$, $m'$, $m'_1$, $m'_2$ désignant des nombres entiers positifs ou négatifs. Concevons maintenant que dans chaque terme $M \frac{\sin}{\cos} \mathcal{A}$, on remplace les variables $\gamma$, $\theta$, $\varpi$, $\lambda$ par leurs valeurs (C), en développant le résultat suivant les puissances de $\Delta\gamma$, $\Delta\theta$, $\Delta\varpi$, $\Delta\lambda$ jusqu'aux quantités du second ordre inclusivement. Après la substitution des valeurs de $\Delta\gamma$, $\Delta\theta$, $\Delta\varpi$, $\Delta\lambda$, on voit, en ayant égard à la signification des lettres $p$, $q$, $p_1$, $q_1$, P, Q, qu'on obtiendra des termes ayant pour arguments, soit l'angle

$$\mathcal{A} = ml^0 + m_1 \varpi^0 + m_2 \theta^0 + m'l' + m'_1 \varpi' + m'_2 \theta'$$

(on a $l^0 = nt + \lambda^0$), soit l'un des angles

$$\mathcal{A}^0 + \theta^0, \quad \mathcal{A}^0 - \theta_0, \quad \mathcal{A}^0 + 2\theta_0, \quad \mathcal{A}^0 - 2\theta_0.$$

Les coefficients de ces termes pourront d'ailleurs contenir en facteur $t$, ou $t^2$, ou $t^3$.

Les seconds membres des équations (B) étant maintenant composés de termes de ce genre, il suffira d'avoir égard aux relations

$$\gamma' \sin \theta' = At + A_1 t^2, \quad \gamma' \cos \theta' = Bt + B_1 t_2,$$

pour en faire des fonctions explicites du temps. On pourra alors les intégrer, et on obtiendra ainsi les portions de $\delta\gamma$, $\delta\theta$, $\delta e$, $\delta\varpi$, $\delta a$, $\delta\lambda$, qui répondent à la première approximation, portions que nous appellerons $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$, $\delta_1 e$, $\delta_1\varpi$, $\delta_1 a$, $\delta_1\lambda$ [*]. La valeur de $\delta_1 n$ se conclura d'ailleurs de celle de $\delta_1 a$ à l'aide de la relation

$$\delta_1 n = -\frac{3}{2}\frac{n}{a}\delta_1 a,$$

et $\delta_1 l$ sera donnée par la formule

$$\delta_1 l = \int \delta_1 n\, dt + \delta_1\lambda.$$

Examinons d'abord si cette première approximation peut introduire dans la longitude moyenne de la Lune des termes non périodiques proportionnels au carré du temps ou à une puissance plus élevée de cette variable. On voit aisément, d'après ce qui vient d'être dit, et en négligeant toujours les quantités d'ordre supérieur au second, que les seuls termes de $R_2$ qui puissent fournir des quantités de ce genre sont ceux qui ont pour arguments $2\varpi' - 2\theta'$, $2\varpi' - \theta - \theta'$, $2\varpi' - 2\theta$. Ces termes sont, en ne gardant dans leurs coefficients que les parties du degré le moins élevé,

$$-\frac{135}{64} n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 \gamma'^2 \cos(2\varpi' - 2\theta'),$$
$$+\frac{135}{32} n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 \gamma\gamma' \cos(2\varpi' - \theta - \theta'),$$
$$-\frac{135}{64} n'^2 \varepsilon a^2 \left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 \gamma^2 \cos(2\varpi' - 2\theta).$$

Substituons-les successivement à la place de $R_2$ dans l'expression de $\frac{d\delta_1\lambda}{dt}$; remplaçons, comme il a été dit, $\gamma$ et $\theta$ par $\gamma + \Delta_1\gamma + \Delta_2\gamma$, $\theta + \Delta_1\theta + \Delta_2\theta$, et ne conservons dans les résultats que les parties non périodiques, en négligeant toutefois les parties constantes qui se con-

[*] La caractéristique $\delta_1$ reçoit ici une signification différente de celle qui lui a été attribuée page 27.

fondraient avec le moyen mouvement. En posant, pour abréger,

$$\frac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos 2\varpi' + AB\sin 2\varpi' = A'_1,$$

$$\frac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin 2\varpi' - AB\cos 2\varpi' = B'_1,$$

en sorte que $A'_1$ et $B'_1$ soient des quantités du second ordre, nous trouverons, par le premier des termes ci-dessus,

$$\frac{d\delta_1\lambda}{dt} = -\frac{135}{4}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 A'_1 t^2;$$

par le second,

$$\frac{d\delta_1\lambda}{dt} = +\frac{405}{8}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 A'_1 t^2 + \frac{135}{2}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 B'_1 t;$$

par le troisième,

$$\frac{d\delta_1\lambda}{dt} = -\frac{135}{8}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 A'_1 t^2 - 45\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 B'_1 t.$$

Rassemblant ces trois résultats, on voit que les termes en $t^2$ se détruisent, et on trouve

$$\frac{d\delta_1\lambda}{dt} = +\frac{45}{2}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 B'_1 t, \quad \delta_1\lambda = +\frac{45}{4}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 B'_1 t^2.$$

D'ailleurs, les termes de $R_2$, que nous considérons, ne renfermant pas $\lambda$ dans leurs arguments, les valeurs correspondantes de $\frac{dR_2}{d\lambda}$ sont nulles, par suite aussi celles de $\delta_1 a$ et de $\delta_1 n$. Donc, relativement à ces termes, $\delta_1 l$ se réduit à $\delta_1\lambda$, et on a

$$\delta_1 l = +\frac{45}{4}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 B'_1 t^2.$$

On voit que cette inégalité a pour effet d'ajouter au coefficient de l'accélération séculaire la partie $\frac{45}{4}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 B'_1$; mais, si l'on calcule ce nombre en prenant toujours le siècle de 36525 jours pour unité de temps, on le trouve égal à $-0'',000000000017$ environ; l'inégalité qu'on vient de déterminer est donc tout à fait négligeable [*].

La première approximation nous ayant fait connaître les valeurs approchées $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$, $\delta_1 e$, $\delta_1\varpi$, $\delta_1 a$, $\delta_1\lambda$, $\delta_1 l$ des quantités $\delta\gamma$, $\delta\theta$, $\delta e$, $\delta\varpi$, $\delta a$, $\delta\lambda$, $\delta l$ (on trouvera, page 59 et suivantes, les valeurs de $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$, etc., qui répondent à chaque terme de $R_2$ considéré séparément), proposons-nous maintenant d'obtenir pour $\delta l$ la valeur plus approchée $\delta_1 l + \delta_2 l$ [**], qui doit résulter de la seconde approximation. En représentant de même par $\delta_1 n + \delta_2 n$ et $\delta_1\lambda + \delta_2\lambda$ les valeurs de $\delta n$ et de $\delta\lambda$ résultant de cette seconde approximation, on aura

$$\delta_2 l = \int \delta_2 n\, dt + \delta_2\lambda,$$

et par conséquent

$$\frac{d\delta_2 l}{dt} = \delta_2 n + \frac{d\delta_2\lambda}{dt}.$$

Mais lorsque $n$ et $a$ désignaient les valeurs complètes des éléments auxquels ces lettres se rapportent, on avait

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{n}{a}\frac{da}{dt} = \frac{3J}{a^2};$$

ces mêmes éléments étant représentés par $a + \delta a$, $n + \delta n$, on aura, en observant que $n$ désigne maintenant une constante,

$$\frac{d\delta n}{dt} = \frac{3J}{a^2} + \delta\left(\frac{3J}{a^2}\right).$$

---

[*] Les termes en $t^2$, qui se sont détruits quand on a réuni les trois parties de $\frac{d\delta_1\lambda}{dt}$, donneraient, chacun en particulier, dans $\delta_1\lambda$, et par suite dans $\delta_1 l$, un terme en $t^3$; le plus grand de ces termes serait $+\frac{135}{8}\frac{n'^2\varepsilon}{n}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2 A'_1 t^3$, ou, numériquement, $-0'',000000000017\, t^3$. Une pareille inégalité est encore négligeable, et par conséquent on n'a pas à craindre qu'en poussant plus loin l'approximation dans les coefficients des trois termes de $R^2$ qu'on vient de considérer on obtienne dans $\delta_1 l$ des termes en $t^3$ ayant une influence sensible sur l'accélération séculaire.

[**] La caractéristique $\delta_2$ n'a plus ici la même signification qu'à la page 27.

Or le $\delta_1 n$ correspondant à la première approximation est donné par l'équation

$$\frac{d\delta_1 n}{dt} = \frac{3\mathrm{J}}{a^2};$$

on a donc

$$\frac{d\delta_2 n}{dt} = \delta_1\left(\frac{3\mathrm{J}}{a^2}\right),$$

en désignant par $\delta_1\left(\frac{3\mathrm{J}}{a^2}\right)$ l'accroissement qu'éprouve la quantité $\frac{3\mathrm{J}}{a^2}$ lorsqu'on y remplace les éléments $\gamma$, $\theta$,... par $\gamma + \delta_1\gamma$, $\theta + \delta_1\theta$,... et qu'on néglige les termes de deux dimensions ou plus en $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$,....

De même, si nous posons, pour abréger,

$$\mathrm{S} = \frac{2}{na}(\mathfrak{J} + \mathrm{I}) - \frac{\sqrt{1-e^2} - 1 + e^2}{na^2 e}(\mathfrak{G} + \mathrm{G}) - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}(\mathfrak{E} + \mathrm{E}),$$

nous aurons, d'après la dernière équation (A),

$$\frac{d\delta\lambda}{dt} = \frac{2}{na}\mathrm{I} - \frac{\sqrt{1-e^2} - 1 + e^2}{na^2 e}\mathrm{G} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\mathrm{E} + \delta\mathrm{S},$$

et comme on a

$$\frac{dd_1\lambda}{dt} = \frac{2}{na}\mathrm{I} - \frac{\sqrt{1-e^2} - 1 + e^2}{na^2 e}\mathrm{G} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\mathrm{E},$$

il en résultera

$$\frac{d\delta_2\lambda}{dt} = \delta_1\mathrm{S}.$$

Ces deux formules $\frac{d\delta_2 n}{dt} = \delta_1\left(\frac{3\mathrm{J}}{a^2}\right)$, $\frac{d\delta_2\lambda}{dt} = \delta_1\mathrm{S}$ nous serviront à calculer les parties non périodiques de $\delta_2 n$ et de $\delta_2\lambda$, et, par suite, celles de $\delta_2 l = \int \delta_2 n dt + \delta_2\lambda$.

Pour effectuer commodément ces calculs, il conviendra de former d'abord les expressions générales des valeurs de $\delta_1\lambda$, $\delta_1\theta$,... correspondantes à un terme quelconque de $\mathrm{R}_2$ considéré isolément. On peut chercher, en effet, $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$,..., en réduisant la fonction $\mathrm{R}_2$ successivement à chacun de ses termes, et rassemblant les résultats ainsi obtenus.

Soit donc $C\cos\mathcal{A}$ un terme quelconque de cette fonction, où l'on a

$$\mathcal{A} = ml + m_1\varpi + m_2\theta + m'l' + m'_1\varpi' + m'_2\theta',$$

et où C est une fonction de $a$, $e$, $\gamma$, $\gamma'$ (nous ne mentionnons pas $a'$ et $e'$, qui sont traitées, ainsi que $\varpi'$, comme des constantes absolues). En réduisant $R_2$ à $C\cos\mathcal{A}$, on a

$$E = \frac{dC}{d\gamma}\cos\mathcal{A},\qquad G = \frac{dC}{de}\cos\mathcal{A},\qquad I = \frac{dC}{da}\cos\mathcal{A},$$
$$F = -m_2 C\sin\mathcal{A},\quad H = -m_1 C\sin\mathcal{A},\quad J = -mC\sin\mathcal{A}.$$

Si donc on pose [*]

$$X = \left[-\frac{m^2}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}} - \frac{(m+m_1)\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\right]C,$$
$$Y = \left[-\frac{m_1\sqrt{1-e^2}}{na^2e} - \frac{m(\sqrt{1-e^2}-1+e^2)}{na^2e}\right]C,$$
$$Z = \frac{2m}{na}C;$$
$$U = -\frac{1}{4na^2\gamma\sqrt{1-e^2}}\frac{dC}{d\gamma},$$
$$V = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{dC}{de} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{dC}{d\gamma},$$
$$W = \frac{2}{na}\frac{dC}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\frac{dC}{de} - \frac{\gamma}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{dC}{d\gamma},$$

on aura, d'après les équations (B),

$$\frac{d\delta_1\gamma}{dt} = X\sin\mathcal{A},\quad \frac{d\delta_1 e}{dt} = Y\sin\mathcal{A},\quad \frac{d\delta_1 a}{dt} = Z\sin\mathcal{A},$$
$$\frac{d\delta_1\theta}{dt} = U\cos\mathcal{A},\quad \frac{d\delta_1\varpi}{dt} = V\cos\mathcal{A},\quad \frac{d\delta_1\lambda}{dt} = W\sin\mathcal{A},$$

---

[*] Les lettres X, Y, U, V reçoivent maintenant une signification différente de celle qui leur a été attribuée page 23.

Dans les seconds membres de ces équations, $a$, $e$, $n$ sont des constantes, et $\gamma$, $\theta$, $\varpi$, $\lambda$ ont les valeurs données par les formules (C); on peut donc y remplacer $\gamma$ par $\gamma_0 + \Delta\gamma$, et $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}^0 + \Delta\mathcal{A}$, en faisant

$$\Delta\mathcal{A} = m\Delta\lambda + m_1\Delta\varpi + m_2\Delta\theta,$$

ou bien encore $\gamma$ par $\gamma_0 + \Delta_1\gamma + \Delta_2\gamma$ et $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}^0 + \Delta_1\mathcal{A} + \Delta_2\mathcal{A}$, en faisant

$$\Delta_1\mathcal{A} = m\Delta_1\lambda + m_1\Delta_1\varpi + m_2\Delta_1\theta, \quad \Delta_2\mathcal{A} = m\Delta_2\lambda + m_1\Delta_2\varpi + m_2\Delta_2\theta.$$

Si l'on fait cette substitution, qu'on développe les résultats suivant les puissances de $\Delta_1\gamma$, $\Delta_2\gamma$, $\Delta_1\mathcal{A}$, $\Delta_2\mathcal{A}$, en se bornant aux quantités du second ordre, qu'on mette pour $\Delta_1\gamma$, $\Delta_2\gamma$, $\Delta_1\mathcal{A}$, $\Delta_2\mathcal{A}$ leurs valeurs, et qu'enfin on remplace $\gamma'\sin\theta'$ par $At + A_1t^2$, $\gamma'\cos\theta'$ par $Bt + B_1t^2$, on obtiendra des sommes de termes où le temps entrera soit dans l'angle

$$\mathcal{A}^0 - m_2\theta' = [m(n + k^0) + m_1 j^0 + m_2 h^0]t + \text{const.},$$

soit dans les quantités $p$, $q$, $p_1$, $q_1$, P, Q par l'angle

$$\theta_0 = h_0 t + c_1,$$

soit enfin explicitement en facteur. Ces expressions s'intégreront aisément, et on aura ainsi les valeurs de $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$, $\delta_1 e$, $\delta_1\varpi$, $\delta_1 a$, $\delta_1\lambda$; de la valeur de $\delta_1 a$ on conclura celle $\delta_1 n$ en la multipliant par $-\frac{3n}{2a}$, et on pourra calculer par suite $\int \delta_1 n dt$. Mais, avant d'écrire les formules auxquelles on parvient ainsi, il est à propos de distinguer plusieurs cas.

Soit d'abord $m'_2 = 0$. Le coefficient C sera une fonction paire de $\gamma'$, et nous l'écrirons $C + \overline{C}\gamma'^2$, employant ici la lettre C non surmontée d'une barre pour désigner seulement la partie indépendante de $\gamma'$; nous représenterons de même par $X + \overline{X}\gamma'^2$, $Y + \overline{Y}\gamma'^2$, $Z + \overline{Z}\gamma'^2$, $U + \overline{U}\gamma'^2$, $V + \overline{V}\gamma'^2$, $W + \overline{W}\gamma'^2$ les quantités qui ont été appelées tout à l'heure X, Y, Z, U, V, W.

Soit ensuite $m'_2 = \pm 1$. Le coefficient C contiendra alors $\gamma'$ en facteur, et nous l'écrirons $C\gamma'$; les quantités appelées d'abord X, Y, Z, U, V, W seront représentées ici par $X\gamma'$, $Y\gamma'$, $Z\gamma'$, $U\gamma'$, $V\gamma'$, $W\gamma'$. Nous ferons de plus

$$\mathfrak{B} = ml + m_1\varpi + m_2\theta + m'l' + m'_1\varpi',$$

en sorte qu'on ait

$$\mathcal{A} = \mathfrak{B} \pm \theta',$$

et nous poserons

$$\mathfrak{B}^0 = ml^0 + m_1\varpi^0 + m_2\theta^0 + m'l' + m'_1\varpi'.$$

Soit enfin $m'_2 = \pm 2$. Le coefficient C contenant alors $\gamma'^2$ en facteur, nous l'écrirons $C\gamma'^2$, et au lieu de X, Y, Z, U, V, W, nous écrirons également $X\gamma'^2$, $Y\gamma'^2$, $Z\gamma'^2$, $U\gamma'^2$, $V\gamma'^2$, $W\gamma'^2$. Nous poserons de plus, pour ce cas,

$$\mathfrak{b} = ml + m_1\varpi + m_2\theta + m'l' + m'_1\varpi',$$

en sorte qu'on ait

$$\mathcal{A} = \mathfrak{b} \pm 2\theta',$$

et nous ferons

$$\mathfrak{b}^0 = ml^0 + m_1\varpi^0 + m_2\theta^0 + m'l' + m'_1\varpi'.$$

Nous poserons d'ailleurs dans ces différents cas

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{\text{IV}} &= m\mathcal{L}''' + m_1\mathcal{L}'' + m_2\mathcal{L}',\\
\mathcal{M}^{\text{IV}} &= m\mathcal{M}''' + m_1\mathcal{M}'' + m_2\mathcal{M}',\\
\mathcal{N}^{\text{IV}} &= m\mathcal{N}''' + m_1\mathcal{N}'' + m_2\mathcal{N}',\\
\mathcal{Q}^{\text{IV}} &= m\mathcal{Q}''' + m_1\mathcal{Q}'' + m_2\mathcal{Q}',\\
\mathcal{R}^{\text{IV}} &= m\mathcal{R}''' + m_1\mathcal{R}'' + m_2\mathcal{R}',\\
\mathcal{S}^{\text{IV}} &= m\mathcal{S}''' + m_1\mathcal{S}'' + m_2\mathcal{S}',\\
\mathcal{T}^{\text{IV}} &= m\mathcal{T}''' + m_1\mathcal{T}'' + m_2\mathcal{T}',\\
\mu &= m(n + k^0) + m_1 j^0 + m_2 h^0 + m'n'.
\end{aligned}$$

Enfin l'indice zéro, placé au-dessous d'une fonction de $\gamma$, indiquera, comme précédemment, qu'on y a remplacé $\gamma$ par $\gamma_0$.

Cela posé, on aura les formules suivantes :

### *Cas de* $m'_2 = 0$.

Terme considéré de $R_2$ : $(C + \overline{C}\gamma'^2)\cos\mathcal{A}$.

Déterminons les vingt quantités $K_1, K_2, \ldots K_{20}$ à l'aide des équations

$$K_4 = \frac{1}{\mu} X_0 \mathcal{N}^{IV},$$

$$K_3 = -\frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d^2X}{d\gamma^2}\right)_0 \mathcal{L}^2 + \left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{N} - \frac{1}{4} X_0 \mathcal{L}^{IV2} + \overline{X}_0\right] + \frac{3}{\mu} K_4,$$

$$K_2 = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 (\mathcal{L}\mathcal{M}^{IV} + \mathcal{M}\mathcal{L}^{IV}) - \frac{2}{\mu} K_3,$$

$$K_1 = -\frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d^2X}{d\gamma^2}\right)_0 \mathcal{M}^2 - \frac{1}{4} X_0 \mathcal{M}^{IV2}\right] + \frac{1}{\mu} K_2,$$

$$K_7 = \frac{1}{2(\mu - h_0)}\left[\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{L} + X_0 \mathcal{L}^{IV}\right],$$

$$K_8 = \frac{1}{2(\mu + h_0)}\left[-\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{L} + X_0 \mathcal{L}^{IV}\right],$$

$$K_5 = -\frac{1}{2(\mu + h_0)}\left[\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{M} + X_0 \mathcal{M}^{IV}\right] + \frac{1}{\mu + h_0} K_8,$$

$$K_6 = -\frac{1}{2(\mu - h_0)}\left[\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{M} - X_0 \mathcal{M}^{IV}\right] + \frac{1}{\mu - h_0} K_7,$$

$$K_{11} = 2K_6, \quad K_{12} = 2K_5, \quad K_{13} = K_7, \quad K_{14} = K_8,$$

$$K_9 = \frac{1}{2(\mu - h_0)}\left[\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{Q} + X_0 \mathcal{Q}^{IV}\right] - \frac{1}{\mu - h_0} K_{11},$$

$$K_{10} = \frac{1}{2(\mu + h_0)}\left[-\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{Q} + X_0 \mathcal{Q}^{IV}\right] - \frac{1}{\mu + h_0} K_{12},$$

$$K_{19} = -\frac{1}{\mu + 2h_0}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d^2X}{d\gamma^2}\right)_0 \mathcal{L}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 (\mathcal{R} - \mathcal{L}\mathcal{L}^{IV}) + \frac{1}{4} X_0 (\mathcal{L}^{IV2} + 2\mathcal{R}^{IV})\right],$$

$$K_{20} = -\frac{1}{\mu - 2h_0}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d^2X}{d\gamma^2}\right)_0 \mathcal{L}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 (\mathcal{R} + \mathcal{L}\mathcal{L}^{IV}) + \frac{1}{4} X_0 (\mathcal{L}^{IV2} - 2\mathcal{R}^{IV})\right],$$

$$K_{17} = \frac{1}{\mu+2h_0}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d^2X}{dy^2}\right)_0 \mathcal{L}\mathfrak{M} + \frac{1}{2}\left(\frac{dX}{dy}\right)_0 (\mathcal{L}\mathfrak{M}^{\text{IV}} - \mathfrak{M}\mathcal{L}^{\text{IV}} - \mathcal{S})\right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{2}X_0(\mathcal{S}^{\text{IV}} - \mathcal{L}^{\text{IV}}\mathfrak{M}^{\text{IV}})\right] - \frac{2}{\mu+2h_0}K_{19},$$

$$K_{18} = \frac{1}{\mu-2h_0}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2X}{dy^2}\right)_0 \mathcal{L}\mathfrak{M} + \frac{1}{2}\left(\frac{dX}{dy}\right)_0 (\mathcal{L}\mathfrak{M}^{\text{IV}} - \mathfrak{M}\mathcal{L}^{\text{IV}} + \mathcal{S})\right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{2}X_0(\mathcal{S}^{\text{IV}} + \mathcal{L}^{\text{IV}}\mathfrak{M}^{\text{IV}})\right] - \frac{2}{\mu-2h_0}K_{20},$$

$$K_{15} = -\frac{1}{\mu+2h_0}\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{d^2X}{dy^2}\right)_0 \mathfrak{M}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dX}{dy}\right)_0 (\mathfrak{T} - \mathfrak{M}\mathfrak{M}^{\text{IV}})\right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{4}X_0(2\mathfrak{T}^{\text{IV}} - \mathfrak{M}^{\text{IV}2})\right] - \frac{1}{\mu+2h_6}K_{17},$$

$$K_{16} = -\frac{1}{\mu-2h_0}\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{d^2X}{dy^2}\right)_0 \mathfrak{M}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dX}{dy}\right)_0 (\mathfrak{T} + \mathfrak{M}\mathfrak{M}^{\text{IV}})\right.$$
$$\left. - \tfrac{1}{4}X_0(2\mathfrak{T}^{\text{IV}} + \mathfrak{M}^{\text{IV}2})\right] + \frac{1}{\mu-2h_0}K_{18}.$$

Dans ces équations, remplaçons partout les lettres X et K par les lettres Y et M; elles détermineront vingt nouvelles quantités $M_1$, $M_2, \ldots, M_{20}$. Dans les mêmes équations, remplaçons partout les lettres X et K par les lettres Z et P; elles détermineront vingt nouvelles quantités $P_1, P_2, \ldots, P_{20}$.

Déterminons ensuite les vingt quantités $L_1, L_2, \ldots, L_{20}$ à l'aide des équations

$$L_4 = \frac{1}{\mu}U_0\mathfrak{N}^{\text{IV}},$$

$$L_3 = \frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_0 \mathcal{L}^2 + \left(\frac{dU}{dy}\right)_0 \mathfrak{N} - \tfrac{1}{4}U_0\mathcal{L}^{\text{IV}2} + \overline{U}_0\right] - \frac{3}{\mu}L_4,$$

$$L_2 = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 (\mathcal{L}\mathfrak{M}^{\text{IV}} + \mathfrak{M}\mathcal{L}^{\text{IV}}) + \frac{2}{\mu}L_3,$$

$$L_1 = \frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_0 \mathfrak{M}^2 - \tfrac{1}{4}U_0\mathfrak{M}^{\text{IV}2}\right] - \frac{1}{\mu}L_2,$$

$$L_7 = \frac{1}{2(\mu-h_0)}\left[\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 \mathcal{L} + U_0\mathcal{L}^{\text{IV}}\right],$$

$$L_8 = \frac{1}{2(\mu+h_0)}\left[-\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 \mathcal{L} + U_0\mathcal{L}^{\text{IV}}\right],$$

$$L_5 = \frac{1}{2(\mu+h_0)}\left[\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 \mathfrak{M} + U_0 \mathfrak{M}^{\text{IV}}\right] - \frac{1}{\mu+h_0} L_8,$$

$$L_6 = \frac{1}{2(\mu-h_0)}\left[\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 \mathfrak{M} - U_0 \mathfrak{M}^{\text{IV}}\right] - \frac{1}{\mu-h_0} L_7,$$

$$L_{11} = 2L_6, \quad L_{12} = 2L_5, \quad L_{13} = L_7, \quad L_{14} = L_8,$$

$$L_9 = \frac{1}{2(\mu-h_0)}\left[\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 \mathfrak{Q} + U_0 \mathfrak{Q}^{\text{IV}}\right] + \frac{1}{\mu-h_0} L_{11},$$

$$L_{10} = \frac{1}{2(\mu+h_0)}\left[-\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 \mathfrak{Q} + U_0 \mathfrak{Q}^{\text{IV}}\right] + \frac{1}{\mu+h_0} L_{12},$$

$$L_{19} = \frac{1}{\mu+2h_0}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_0 \mathfrak{L}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 (\mathfrak{R} - \mathfrak{L}\mathfrak{L}^{\text{IV}}) + \frac{1}{4} U_0 (\mathfrak{L}^{\text{IV}2} + 2\mathfrak{R}^{\text{IV}})\right],$$

$$L_{20} = \frac{1}{\mu-2h_0}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_0 \mathfrak{L}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 (\mathfrak{R} + \mathfrak{L}\mathfrak{L}^{\text{IV}}) + \frac{1}{4} U_0 (\mathfrak{L}^{\text{IV}2} - 2\mathfrak{R}^{\text{IV}})\right],$$

$$L_{17} = \frac{1}{\mu+2h_0}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_0 \mathfrak{L}\mathfrak{M} + \frac{1}{2}\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 (\mathfrak{L}\mathfrak{M}^{\text{IV}} - \mathfrak{M}\mathfrak{L}^{\text{IV}} - \mathfrak{S}) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} U_0 (\mathfrak{S}^{\text{IV}} - \mathfrak{L}^{\text{IV}}\mathfrak{M}^{\text{IV}})\right] + \frac{2}{\mu+2h_0} L_{19},$$

$$L_{18} = \frac{1}{\mu-2h_0}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_0 \mathfrak{L}\mathfrak{M} + \frac{1}{2}\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 (\mathfrak{L}\mathfrak{M}^{\text{IV}} - \mathfrak{M}\mathfrak{L}^{\text{IV}} + \mathfrak{S}) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} U_0 (\mathfrak{S}^{\text{IV}} + \mathfrak{L}^{\text{IV}}\mathfrak{M}^{\text{IV}})\right] + \frac{2}{\mu-2h_0} L_{20},$$

$$L_{15} = \frac{1}{\mu+2h_0}\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_0 \mathfrak{M}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 (\mathfrak{T} - \mathfrak{M}\mathfrak{M}^{\text{IV}}) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4} U_0 (2\mathfrak{T}^{\text{IV}} - \mathfrak{M}^{\text{IV}2})\right] - \frac{1}{\mu+2h_0} L_{17},$$

$$L_{16} = \frac{1}{\mu-2h_0}\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_0 \mathfrak{M}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 (\mathfrak{T} + \mathfrak{M}\mathfrak{M}^{\text{IV}}) \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4} U_0 (2\mathfrak{T}^{\text{IV}} + \mathfrak{M}^{\text{IV}2})\right] - \frac{1}{\mu-2h_0} L_{18}.$$

Dans ces équations, remplaçons partout les lettres U et L par les lettres V et N; elles détermineront vingt nouvelles quantités $N_1$, $N_2, \ldots, N_{20}$. Dans les mêmes équations, remplaçons partout les lettres U et L par les lettres W et Q; elles détermineront encore vingt nouvelles quantités $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{20}$.

Déterminons enfin les vingt quantités $\Pi_1$, $\Pi_2$,..., $\Pi_{20}$ à l'aide des équations

$$\Pi_1 = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu}\frac{P_1}{a} - \frac{3}{2}\frac{n}{\mu^2}\frac{P_2}{a} + 3\frac{n}{\mu^3}\frac{P_3}{a} + 9\frac{n}{\mu^4}\frac{P_4}{a},$$

$$\Pi_2 = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu}\frac{P_2}{a} - 3\frac{n}{\mu^2}\frac{P_3}{a} - 9\frac{n}{\mu^3}\frac{P_4}{a},$$

$$\Pi_3 = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu}\frac{P_3}{a} - \frac{9}{2}\frac{n}{\mu^2}\frac{P_4}{a},$$

$$\Pi_4 = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu}\frac{P_4}{a},$$

$$\Pi_7 = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu - h_0}\frac{P_7}{a},$$

$$\Pi_8 = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu + h_0}\frac{P_8}{a},$$

$$\Pi_5 = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu + h_0}\frac{P_5}{a} - \frac{3}{2}\frac{n}{(\mu + h_0)^2}\frac{P_8}{a},$$

$$\Pi_6 = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu - h_0}\frac{P_6}{a} - \frac{3}{2}\frac{n}{(\mu - h_0)^2}\frac{P_7}{a},$$

$$\Pi_{11} = 2\Pi_6, \quad \Pi_{12} = 2\Pi_5, \quad \Pi_{13} = \Pi_7, \quad \Pi_{14} = \Pi_8,$$

$$\Pi_9 = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu - h_0}\frac{P_9}{a} - \frac{3}{2}\frac{n}{(\mu - h_0)^2}\frac{P_{11}}{a} - 3\frac{n}{(\mu - h_0)^3}\frac{P_{13}}{a},$$

$$\Pi_{10} = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu + h_0}\frac{P_{10}}{a} - \frac{3}{2}\frac{n}{(\mu + h_0)^2}\frac{P_{12}}{a} - 3\frac{n}{(\mu + h_0)^3}\frac{P_{14}}{a},$$

$$\Pi_{15} = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu + 2h_0}\frac{P_{15}}{a} - \frac{3}{2}\frac{n}{(\mu + 2h_0)^2}\frac{P_{17}}{a} + 3\frac{n}{(\mu + 2h_0)^3}\frac{P_{19}}{a},$$

$$\Pi_{16} = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu - 2h_0}\frac{P_{16}}{a} - \frac{3}{2}\frac{n}{(\mu - 2h_0)^2}\frac{P_{18}}{a} + 3\frac{n}{(\mu - 2h_0)^3}\frac{P_{20}}{a},$$

$$\Pi_{17} = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu + 2h_0}\frac{P_{17}}{a} - 3\frac{n}{(\mu + 2h_0)^2}\frac{P_{19}}{a},$$

$$\Pi_{18} = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu - 2h_0}\frac{P_{18}}{a} - 3\frac{n}{(\mu - 2h_0)^2}\frac{P_{20}}{a},$$

$$\Pi_{19} = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu + 2h_0}\frac{P_{19}}{a},$$

$$\Pi_{20} = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu - 2h_0}\frac{P_{20}}{a}.$$

On aura alors

$$
\begin{aligned}
\delta_1 \gamma = \Big[-\tfrac{1}{\mu}X_0 + K_1(A^2+B^2)\Big]\cos\mathcal{A}^0 + K_2(A^2+B^2)t\sin\mathcal{A}^0 \\
+ K_3(A^2+B^2)t^2\cos\mathcal{A}^0 + K_4(A^2+B^2)t^3\sin\mathcal{A}^0 \\
+ K_5[A\cos(\mathcal{A}^0+\theta_0) - B\sin(\mathcal{A}^0+\theta_0)] \\
+ K_6[A\cos(\mathcal{A}^0-\theta_0) + B\sin(\mathcal{A}^0-\theta_0)] \\
+ K_7[A\sin(\mathcal{A}^0-\theta_0) - B\cos(\mathcal{A}^0-\theta_0)]t \\
+ K_8[A\sin(\mathcal{A}^0+\theta_0) + B\cos(\mathcal{A}^0+\theta_0)]t \\
+ K_9[A\sin(\mathcal{A}^0-\theta_0) - B_1\cos(\mathcal{A}^0-\theta_0)] \\
+ K_{10}[A_1\sin(\mathcal{A}^0+\theta_0) + B_1\cos(\mathcal{A}^0+\theta_0)] \\
+ K_{11}[A_1\cos(\mathcal{A}^0-\theta_0) + B_1\sin(\mathcal{A}^0-\theta_0)]t \\
+ K_{12}[A_1\cos(\mathcal{A}^0+\theta_0) - B_1\sin(\mathcal{A}^0+\theta_0)]t \\
+ K_{13}[A_1\sin(\mathcal{A}^0-\theta_0) - B_1\cos(\mathcal{A}^0-\theta_0)]t^2 \\
+ K_{14}[A_1\sin(\mathcal{A}^0+\theta_0) + B_1\cos(\mathcal{A}^0+\theta_0)]t^2 \\
+ K_{15}[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\cos(\mathcal{A}^0+2\theta_0) + AB\sin(\mathcal{A}^0+2\theta_0)] \\
+ K_{16}[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\cos(\mathcal{A}^0-2\theta_0) - AB\sin(\mathcal{A}^0-2\theta_0)] \\
+ K_{17}[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\sin(\mathcal{A}^0+2\theta_0) - AB\cos(\mathcal{A}^0+2\theta_0)]t \\
+ K_{18}[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\sin(\mathcal{A}^0-2\theta_0) + AB\cos(\mathcal{A}^0-2\theta_0)]t \\
+ K_{19}[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\cos(\mathcal{A}^0+2\theta_0) + AB\sin(\mathcal{A}^0+2\theta_0)]t^2 \\
+ K_{20}[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\cos(\mathcal{A}^0-2\theta_0) - AB\sin(\mathcal{A}_0-2\theta_0)]t^2;
\end{aligned}
$$

si dans le second membre de cette formule on remplace les lettres X et K par Y et M, on obtiendra la valeur de $\delta_1 e$; si l'on y remplace les lettres X et K par Z et P, on obtiendra la valeur de $\delta_1 a$. On aura ensuite

$$
\begin{aligned}
\delta_1\theta = \left[\frac{1}{\mu}\,\mathrm{U}_0 + \mathrm{L}_1(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)\right]\sin\mathcal{A}^0 &+ \mathrm{L}_2(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)\,t\cos\mathcal{A}^0\\
&+ \mathrm{L}_3(\mathcal{A}^2+\mathrm{B}^2)\,t^2\sin\mathcal{A}^0 + \mathrm{L}_4(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)\,t^2\cos\mathcal{A}^0\\
&+ \mathrm{L}_5[\mathrm{A}\sin(\mathcal{A}^0+\theta_0) + \mathrm{B}\cos(\mathcal{A}^0+\theta_0)]\\
&+ \mathrm{L}_6[\mathrm{A}\sin(\mathcal{A}^0-\theta_0) - \mathrm{B}\cos(\mathcal{A}^0-\theta_0)]\\
&+ \mathrm{L}_7[\mathrm{A}\cos(\mathcal{A}^0-\theta_0) + \mathrm{B}\sin(\mathcal{A}^0-\theta_0)]\,t\\
&+ \mathrm{L}_8[\mathrm{A}\cos(\mathcal{A}^0+\theta_0) - \mathrm{B}\sin(\mathcal{A}^0+\theta_0)]\\
&+ \mathrm{L}_9[\mathrm{A}_1\cos(\mathcal{A}^0-\theta_0) + \mathrm{B}_1\sin(\mathcal{A}^0-\theta_0)]\\
&+ \mathrm{L}_{10}[\mathrm{A}_1\cos(\mathcal{A}^0+\theta_0) - \mathrm{B}_1\sin(\mathcal{A}^0+\theta_0)]\\
&+ \mathrm{L}_{11}[\mathrm{A}_1\sin(\mathcal{A}^0-\theta_0) - \mathrm{B}_1\cos(\mathcal{A}^0-\theta_0)]\,t\\
&+ \mathrm{L}_{12}[\mathrm{A}_1\sin(\mathcal{A}^0+\theta_0) + \mathrm{B}_1\cos(\mathcal{A}^0+\theta_0)]\,t\\
&+ \mathrm{L}_{13}[\mathrm{A}_1\cos(\mathcal{A}^0-\theta_0) + \mathrm{B}_1\sin(\mathcal{A}^0-\theta_0)]\,t^2\\
&+ \mathrm{L}_{14}[\mathrm{A}_1\cos(\mathcal{A}^0+\theta_0) - \mathrm{B}_1\sin(\mathcal{A}^0+\theta_0)]\,t^2\\
&+ \mathrm{L}_{15}[\tfrac{1}{2}(\mathrm{B}^2-\mathrm{A}^2)\sin(\mathcal{A}^0+2\theta_0) - \mathrm{AB}\cos(\mathcal{A}^0+2\theta_0)]\\
&+ \mathrm{L}_{16}[\tfrac{1}{2}(\mathrm{B}^2-\mathrm{A}^2)\sin(\mathcal{A}^0-2\theta_0) + \mathrm{AB}\cos(\mathcal{A}^0-2\theta_0)]\\
&+ \mathrm{L}_{17}[\tfrac{1}{2}(\mathrm{B}^2-\mathrm{A}^2)\cos(\mathcal{A}^0+2\theta_0) + \mathrm{AB}\sin(\mathcal{A}^0+2\theta_0)]\,t\\
&+ \mathrm{L}_{18}[\tfrac{1}{2}(\mathrm{B}^2-\mathrm{A}^2)\cos(\mathcal{A}^0-2\theta_0) - \mathrm{AB}\sin(\mathcal{A}^0-2\theta_0)]\,t\\
&+ \mathrm{L}_{19}[\tfrac{1}{2}(\mathrm{B}^2-\mathrm{A}^2)\sin(\mathcal{A}^0+2\theta_0) - \mathrm{AB}\cos(\mathcal{A}^0+2\theta_0)]\,t^2\\
&+ \mathrm{L}_{20}[\tfrac{1}{2}(\mathrm{B}^2-\mathrm{A}^2)\sin(\mathcal{A}^0-2\theta_0) + \mathrm{AB}\cos(\mathcal{A}^0-2\theta_0)]\,t^2;
\end{aligned}
$$

si dans le second membre de cette formule on remplace les lettres U et L par V et N, on obtiendra la valeur de $\delta_1\varpi$; si l'on y remplace les lettres U et L par W et Q, on obtiendra la valeur de $\delta_1\lambda$. On aura enfin

$$\int \delta_1 n\,dt = \left[\frac{3}{2}\frac{n}{\mu^2}\frac{Z_0}{a} + \Pi_1(A^2+B^2)\right]\sin\mathcal{A}^0 + \Pi_2(A^2+B^2)\,t\cos\mathcal{A}^0$$
$$+ \Pi_3(A^2+B^2)\,t^2\sin\mathcal{A}^0 + \Pi_4(A^2+B^2)\,t^3\cos\mathcal{A}^0$$
$$+ \Pi_5\left[A\sin(\mathcal{A}^0+\theta_0) + B\cos(\mathcal{A}^0+\theta_0)\right]$$
$$+ \Pi_6\left[A\sin(\mathcal{A}^0-\theta_0) - B\cos(\mathcal{A}^0-\theta_0)\right]$$
$$+ \Pi_7\left[A\cos(\mathcal{A}^0-\theta_0) + B\sin(\mathcal{A}^0-\theta_0)\right]t$$
$$+ \Pi_8\left[A\cos(\mathcal{A}^0+\theta_0) - B\sin(\mathcal{A}^0+\theta_0)\right]t$$
$$+ \Pi_9\left[A_1\cos(\mathcal{A}^0-\theta_0) + B_1\sin(\mathcal{A}^0-\theta_0)\right]$$
$$+ \Pi_{10}\left[A_1\cos(\mathcal{A}^0+\theta_0) - B_1\sin(\mathcal{A}^0+\theta_0)\right]$$
$$+ \Pi_{11}\left[A_1\sin(\mathcal{A}^0-\theta_0) - B_1\cos(\mathcal{A}^0-\theta_0)\right]t$$
$$+ \Pi_{12}\left[A_1\sin(\mathcal{A}^0+\theta_0) + B_1\cos(\mathcal{A}^0+\theta_0)\right]t$$
$$+ \Pi_{13}\left[A_1\cos(\mathcal{A}^0-\theta_0) + B_1\sin(\mathcal{A}^0-\theta_0)\right]t^2$$
$$+ \Pi_{14}\left[A_1\cos(\mathcal{A}^0+\theta_0) - B_1\sin(\mathcal{A}^0+\theta_0)\right]t^2$$
$$+ \Pi_{15}\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\sin(\mathcal{A}^0+2\theta_0) - AB\cos(\mathcal{A}^0+2\theta_0)\right]$$
$$+ \Pi_{16}\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\sin(\mathcal{A}^0-2\theta_0) + AB\cos(\mathcal{A}^0-2\theta_0)\right]$$
$$+ \Pi_{17}\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\cos(\mathcal{A}^0+2\theta_0) + AB\sin(\mathcal{A}^0+2\theta_0)\right]t$$
$$+ \Pi_{18}\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\cos(\mathcal{A}^0-2\theta_0) - AB\sin(\mathcal{A}^0-2\theta_0)\right]t$$
$$+ \Pi_{19}\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\sin(\mathcal{A}^0+2\theta_0) - AB\cos(\mathcal{A}^0+2\theta_0)\right]t^2$$
$$+ \Pi_{20}\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\sin(\mathcal{A}^0-2\theta_0) + AB\cos(\mathcal{A}^0-2\theta_0)\right]t^2.$$

Observons que dans ces valeurs de $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$, $\int\delta_1 n\,dt$ et dans les valeurs de $\delta_1 e$, $\delta_1\varpi$, $\delta_1 a$, $\delta_1\lambda$ qui s'en déduisent, les termes d'arguments $\mathcal{A}^0 \pm \theta_0$ ont des coefficients du premier ordre au moins, et que les termes d'arguments $\mathcal{A}^0 \pm 2\theta_0$ ont des coefficients du second ordre.

*Cas de $m'_2 = +1$.*

Terme considéré de $R^2$ : $C\gamma' \cos \mathcal{A} = C\gamma' \cos(\mathfrak{B} + \theta')$.

Déterminons les six quantités $K_1, K_2, \ldots, K_6$ à l'aide des équations

$$K_3 = -\frac{1}{2(\mu + h_0)}\left[\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{L} - X_0 \mathcal{L}^{IV}\right],$$

$$K_2 = \frac{1}{2(\mu + h_0)}\left[\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathfrak{M} + X_0 \mathfrak{M}^{IV}\right] - \frac{2}{\mu + h_0} K_3, \qquad K_1 = \frac{1}{\mu + h_0} K_2,$$

$$K_6 = -\frac{1}{\mu - h_0}\left[\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{L} + X_0 \mathcal{L}^{IV}\right],$$

$$K_5 = \frac{1}{\mu - h_0}\left[-\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathfrak{M} + X_0 \mathfrak{M}^{IV}\right] - \frac{1}{\mu - h_0} K_6, \qquad K_4 = \frac{1}{\mu - h_0} K_5.$$

Dans ces équations, remplaçons partout les lettres X et K par les lettres Y et M; elles détermineront six nouvelles quantités $M_1, M_2, \ldots, M_6$. Dans les mêmes équations, remplaçons partout les lettres X et K par les lettres Z et P; elles détermineront encore six nouvelles quantités $P_1, P_2, \ldots, P_6$.

Déterminons ensuite les six quantités $L_1, L_2, \ldots, L_6$ à l'aide des équations

$$L_3 = \frac{1}{2(\mu + h_0)}\left[\left(\frac{dU}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{L} - U_0 \mathcal{L}^{IV}\right],$$

$$L_2 = \frac{1}{2(\mu + h_0)}\left[\left(\frac{dU}{d\gamma}\right)_0 \mathfrak{M} + U_0 \mathfrak{M}^{IV}\right] + \frac{2}{\mu + h_0} L_3, \qquad L_1 = -\frac{1}{\mu + h_0} L_2,$$

$$L_6 = \frac{1}{\mu - h_0}\left[\left(\frac{dU}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{L} + U_0 \mathcal{L}^{IV}\right],$$

$$L_5 = \frac{1}{\mu - h_0}\left[-\left(\frac{dU}{d\gamma}\right)_0 \mathfrak{M} + U_0 \mathfrak{M}^{IV}\right] + \frac{2}{\mu - h_0} L_6, \qquad L_4 = -\frac{1}{\mu - h_0} L_5.$$

Dans ces équations, remplaçons partout les lettres U et L par les lettres V et N; elles détermineront six nouvelles quantités $N_1, N_2, \ldots,$

$N_6$. Dans les mêmes équations, remplaçons partout les lettres U et L par les lettres W et Q; elles détermineront encore six nouvelles quantités $Q_1, Q_2, \ldots, Q_6$.

Déterminons enfin les six quantités $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_6$ à l'aide des équations

$$\Pi_1 = -3\frac{n}{(\mu+h_0)^2}\frac{P_2}{a} + 3\frac{n}{(\mu+h_0)^3}\frac{P_3}{a}, \quad \Pi_2 = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu+h_0}\frac{P_2}{a} - 3\frac{n}{(\mu+h_0)^2}\frac{P_3}{a},$$

$$\Pi_3 = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu+h_0}\frac{P_3}{a},$$

$$\Pi_4 = -3\frac{n}{(\mu-h_0)^2}\frac{P_5}{a} + 3\frac{n}{(\mu-h_0)^3}\frac{P_6}{a}, \quad \Pi_5 = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu-h_0}\frac{P_5}{a} - 3\frac{n}{(\mu-h_0)^2}\frac{P_6}{a},$$

$$\Pi_6 = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu-h_0}\frac{P_6}{a}.$$

On aura alors

$$\begin{aligned}
\delta_1\gamma = {} & \frac{1}{\mu^2}X_0(A\cos\varpi^0 + B\sin\varpi_0) \\
& + \frac{1}{\mu}X_0(A\sin\varpi^0 - B\cos\varpi^0)t - \frac{2}{\mu^3}X_0(A_1\sin\varpi^0 - B_1\cos\varpi^0) \\
& + \frac{2}{\mu^2}X_0(A_1\cos\varpi^0 + B_1\sin\varpi^0)t + \frac{1}{\mu}X_0(A_1\sin\varpi^0 - B_1\cos\varpi^0)t^2 \\
& + K_1(A^2+B^2)\cos(\varpi^0+\theta_0) + K_2(A^2+B^2)t\sin(\varpi^0+\theta_0) \\
& + K_3(A^2+B^2)t^2\cos(\varpi^0+\theta_0) \\
& + K_4\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\cos(\varpi^0-\theta_0) - AB\sin(\varpi^0-\theta_0)\right] \\
& + K_5\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\sin(\varpi^0-\theta_0) + AB\cos(\varpi^0-\theta_0)\right]t \\
& + K_6\left[\tfrac{1}{2}(B^2-A^2)\cos(\varpi^0-\theta_0) - AB\sin(\varpi^0-\theta_0)\right]t^2.
\end{aligned}$$

Si dans le second membre de cette formule on remplace les lettres X et K par Y et M, on obtiendra la valeur de $\delta_1 e$; si l'on y remplace les lettres X et K par Z et P, on obtiendra la valeur de $\delta_1 a$. On aura ensuite

$$
\begin{aligned}
\delta_1 \theta = &-\frac{1}{\mu^2} U_0 (A \sin \varpi^0 - B \cos \varpi^0) \\
&+ \frac{1}{\mu} U_0 (A \cos \varpi^0 - B \sin \varpi^0) t - \frac{2}{\mu^3} U_0 (A_1 \cos \varpi^0 + B_1 \sin \varpi^0) \\
&- \frac{2}{\mu^2} U_0 (A_1 \sin \varpi^0 - B_1 \cos \varpi^0) t + \frac{1}{\mu} U_0 (A_1 \cos \varpi^0 + B_1 \sin \varpi^0) t^2 \\
&+ L_1 (A^2 + B^2) \sin(\varpi^0 + \theta_0) + L_2 (A^2 + B^2) t \cos(\varpi^0 + \theta_0) \\
&+ L_3 (A^2 + B^2) t^2 \sin(\varpi^0 + \theta_0) \\
&+ L_4 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \sin(\varpi^0 - \theta_0) + AB \cos(\varpi^0 - \theta_0)] \\
&+ L_5 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \cos(\varpi^0 - \theta_0) - AB \sin(\varpi^0 - \theta_0)] t \\
&+ L_6 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \sin(\varpi^0 - \theta_0) + AB \cos(\varpi^0 - \theta_0)] t^2.
\end{aligned}
$$

Si dans le second membre de cette formule on remplace les lettres U et L par V et N, on obtiendra la valeur de $\delta_1 \varpi$; si l'on y remplace les lettres U et L par W et Q, on obtiendra la valeur de $\delta_1 \lambda$. On aura enfin

$$
\begin{aligned}
\int \delta_1 n\, dt = &- 3 \frac{n}{\mu^3} \frac{Z_0}{n} (A \sin \varpi^0 - B \cos \varpi^0) \\
&+ \frac{3}{2} \frac{n}{\mu^2} \frac{Z_0}{a} (A \cos \varpi^0 + B \sin \varpi^0) t \\
&- 9 \frac{n}{\mu^4} \frac{Z_0}{a} (A_1 \cos \varpi^0 + B_1 \sin \varpi^0) \\
&- 6 \frac{n}{\mu^3} \frac{Z_0}{a} (A_1 \sin \varpi^0 - B_1 \cos \varpi^0) t \\
&+ \frac{3}{2} \frac{n}{\mu^2} \frac{Z_0}{a} (A_1 \cos \varpi^0 + B_1 \sin \varpi^0) t^2 \\
&+ \Pi_1 (A^2 + B^2) \sin(\varpi^0 + \theta_0) + \Pi_2 (A^2 + B^2) t \cos(\varpi^0 + \theta_0) \\
&+ \Pi_3 (A^2 + B^2) t^2 \sin(\varpi^0 + \theta_0) \\
&+ \Pi_4 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \sin(\varpi^0 - \theta_0) + AB \cos(\varpi^0 - \theta_0)] \\
&+ \Pi_5 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \cos(\varpi^0 - \theta_0) - AB \sin(\varpi^0 - \theta_0)] t \\
&+ \Pi_6 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \sin(\varpi^0 - \theta_0) + AB \cos(\varpi^0 - \theta_0)] t^2.
\end{aligned}
$$

Observons que, dans ces valeurs de $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$, $\int\delta_1 n\,dt$, et dans les valeurs de $\delta_1 e$, $\delta_1\varpi$, $\delta_1 a$, $\delta_1\lambda$ qui s'en déduisent, les termes d'argument $\mathcal{B}^0$ ont des coefficients du premier ordre au moins, et les termes d'arguments $\mathcal{B}^0 \pm \theta_0$ des coefficients du second ordre.

## *Cas de* $m'_2 = -1$.

Terme considéré de $R_2$ : $C\gamma'\cos\mathcal{A} = C\gamma'\cos(\mathcal{B} - \theta')$.

Déterminons les six quantités $K_1, K_2, \ldots, K_6$ à l'aide des équations

$$K_3 = -\frac{1}{2(\mu - h_0)}\left[\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{L} + X_0\,\mathcal{L}^{IV}\right],$$

$$K_2 = \frac{1}{2(\mu - h_0)}\left[-\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{M} + X_0\,\mathcal{M}^{IV}\right] - \frac{2}{\mu - h_0}K_3, \qquad K_1 = \frac{1}{\mu - h_0}K_2,$$

$$K_6 = -\frac{1}{\mu + h_0}\left[\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{L} - X_0\,\mathcal{L}^{IV}\right],$$

$$K_5 = \frac{1}{\mu + h_0}\left[\left(\frac{dX}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{M} + X_0\,\mathcal{M}^{IV}\right] - \frac{2}{\mu + h_0}K_6, \qquad K_4 = \frac{1}{\mu + h_0}K_5.$$

Dans ces équations, remplaçons partout les lettres X et K par les lettres Y et M; elles détermineront six nouvelles quantités $M_1, M_2, \ldots, M_6$; dans les mêmes équations, remplaçons partout les lettres X et K par les lettres Z et P; elles détermineront encore six nouvelles quantités $P_1, P_2, \ldots, P_6$.

Déterminons ensuite les six quantités $L_1, L_2, \ldots, L_6$ à l'aide des équations

$$L_3 = \frac{1}{2(\mu - h_0)}\left[\left(\frac{dU}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{L} + U_0\,\mathcal{L}^{IV}\right],$$

$$L_2 = \frac{1}{2(\mu - h_0)}\left[-\left(\frac{dU}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{M} + U_0\,\mathcal{M}^{IV}\right] + \frac{2}{\mu - h_0}L_3, \qquad L_1 = -\frac{1}{\mu - h_0}L_2,$$

$$L_6 = \frac{1}{\mu + h_0}\left[\left(\frac{dU}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{L} - U_0\,\mathcal{L}^{IV}\right],$$

$$L_5 = \frac{1}{\mu + h_0}\left[\left(\frac{dU}{d\gamma}\right)_0 \mathcal{M} + U_0\,\mathcal{M}^{IV}\right] + \frac{2}{\mu + h_0}L_6, \qquad L_4 = -\frac{1}{\mu + h_0}L_5.$$

Dans ces équations, remplaçons partout les lettres U et L par les lettres V et N; elles détermineront six nouvelles quantités $N_1, N_2, \ldots, N_6$; dans les mêmes équations, remplaçons partout les lettres U et L par les lettres W et Q; elles détermineront encore six nouvelles quantités $Q_1, Q_2, \ldots, Q_6$.

Déterminons enfin les six quantités $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_6$ à l'aide des équations

$$\Pi_1 = -3\frac{n}{(\mu - h_0)^2}\frac{P_2}{a} + 3\frac{n}{(\mu - h_0)^3}\frac{P_3}{a}, \quad \Pi_2 = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu - h_0}\frac{P_2}{a} - 3\frac{n}{(\mu - h_0)^2}\frac{P_3}{a},$$

$$\Pi_3 = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu - h_0}\frac{P_3}{a},$$

$$\Pi_4 = -3\frac{n}{(\mu + h_0)^2}\frac{P_5}{a} + 3\frac{n}{(\mu + h_0)^3}\frac{P_6}{a}, \quad \Pi_5 = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu + h_0}\frac{P_5}{a} - 3\frac{n}{(\mu + h_0)^2}\frac{P_6}{a},$$

$$\Pi_6 = -\frac{3}{2}\frac{n}{\mu + h_0}\frac{P_6}{a}.$$

On aura alors

$$\begin{aligned}
\delta_1 \gamma = &-\frac{1}{\mu^2}X_0(A\cos\vartheta^0 - B\sin\vartheta^0) - \frac{1}{\mu}X_0(A\sin\vartheta^0 + B\cos\vartheta^0)t \\
&+ \frac{2}{\mu^3}X_0(A_1\sin\vartheta^0 + B_1\cos\vartheta^0) - \frac{2}{\mu^2}X_0(A_1\cos\vartheta^0 - B_1\sin\vartheta^0)t \\
&- \frac{1}{\mu}X_0(A_1\sin\vartheta^0 + B_1\cos\vartheta^0)t^2 \\
&+ K_1(A^2 + B^2)\cos(\vartheta^0 - \theta_0) + K_2(A^2 + B^2)t\sin(\vartheta^0 - \theta_0) \\
&+ K_3(A^2 + B^2)t^2\cos(\vartheta^0 - \theta_0) \\
&+ K_4[\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos(\vartheta^0 + \theta_0) + AB\sin(\vartheta^0 + \theta_0)] \\
&+ K_5[\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin(\vartheta^0 + \theta_0) - AB\cos(\vartheta^0 + \theta_0)]t \\
&+ K_6[\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos(\vartheta^0 + \theta_0) + AB\sin(\vartheta^0 + \theta_0)]t^2.
\end{aligned}$$

Si, dans le second membre de cette formule, on remplace les lettres X et K par Y et M, on obtiendra la valeur de $\delta_1 e$; si l'on y remplace les lettres X et K par Z et P, on obtiendra la valeur de $\delta_1 a$. On aura ensuite

$$\begin{aligned}
\delta_1 \theta = & \frac{1}{\mu^2} U_0 (A \sin \mathfrak{B}^0 + B \cos \mathfrak{B}^0) - \frac{1}{\mu} U_0 (A \cos \mathfrak{B}^0 - B \sin \mathfrak{B}^0) t \\
& + \frac{2}{\mu^3} U_0 (A_1 \cos \mathfrak{B}^0 - B_1 \sin \mathfrak{B}^0) + \frac{2}{\mu^2} U_0 (A_1 \sin \mathfrak{B}_0 + B_1 \cos \mathfrak{B}_0) t \\
& - \frac{1}{\mu} U_0 (A_1 \cos \mathfrak{B}^0 - B_1 \sin \mathfrak{B}^0) t^2 \\
& + L_1 (A^2 + B^2) \sin(\mathfrak{B}^0 - \theta_0) + L_2 (A^2 + B^2) t \cos(\mathfrak{B}^0 - \theta_0) \\
& + L_3 (A^2 + B^2) t^2 \sin(\mathfrak{B}^0 - \theta_0) \\
& + L_4 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \sin(\mathfrak{B}^0 + \theta_0) - AB \cos(\mathfrak{B}^0 + \theta_0)] \\
& + L_5 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \cos(\mathfrak{B}^0 + \theta_0) + AB \sin(\mathfrak{B}^0 + \theta_0)] t \\
& + L_6 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \sin(\mathfrak{B}^0 + \theta_0) - AB \cos(\mathfrak{B}^0 + \theta_0)] t^2.
\end{aligned}$$

Si, dans le second membre de cette formule, on remplace les lettres U et L par V et N, on obtiendra la valeur de $\delta_1 \varpi$; si l'on y remplace les lettres U et L par W et Q, on obtiendra la valeur de $\delta_1 \lambda$. On aura enfin

$$\begin{aligned}
\int \delta_1 n\, dt = & 3 \frac{n}{\mu^3} \frac{Z_0}{a} (A \sin \mathfrak{B}^0 + B \cos \mathfrak{B}^0) \\
& - \frac{3}{2} \frac{n}{\mu^2} \frac{Z_0}{a} (A \cos \mathfrak{B}^0 - B \sin \mathfrak{B}^0) t \\
& + 9 \frac{n}{\mu^4} \frac{Z_0}{a} (A_1 \cos \mathfrak{B}^0 - B_1 \sin \mathfrak{B}^0) \\
& + 6 \frac{n}{\mu^3} \frac{Z_0}{a} (A_1 \sin \mathfrak{B}^0 + B_1 \cos \mathfrak{B}^0) t \\
& - \frac{3}{2} \frac{n}{\mu^2} \frac{Z_0}{a} (A_1 \cos \mathfrak{B}^0 - B_1 \sin \mathfrak{B}^0) t^2 \\
& + \Pi_1 (A^2 + B^2) \sin(\mathfrak{B}^0 - \theta_0) + \Pi_2 (A^2 + B^2) t \cos(\mathfrak{B}^0 - \theta_0) \\
& + \Pi_3 (A^2 + B^2) t^2 \sin(\mathfrak{B}^0 - \theta_0) \\
& + \Pi_4 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \sin(\mathfrak{B}^0 + \theta_0) - AB \cos(\mathfrak{B}^0 + \theta_0)] \\
& + \Pi_5 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \cos(\mathfrak{B}^0 + \theta_0) + AB \sin(\mathfrak{B}^0 + \theta_0)] t \\
& + \Pi_6 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2) \sin(\mathfrak{B}^0 + \theta_0) - AB \cos(\mathfrak{B}^0 + \theta_0)] t^2.
\end{aligned}$$

Observons que, dans ces valeurs de $\delta_1 \gamma$, $\delta_1 \theta$, $\int \delta_1 n\,dt$, et dans les valeurs de $\delta_1 e$, $\delta_1 \varpi$, $\delta_1 a$, $\delta_1 \lambda$ qui s'en déduisent, les termes d'argument $\mathfrak{B}^0$ ont des coefficients du premier ordre au moins, et que les termes d'arguments $\mathfrak{B}^0 \pm \theta_0$ ont des coefficients du second ordre.

*Cas de $m'_2 = +2$.*

Terme considéré de $R_2$ : $C\gamma'^2 \cos \mathfrak{A} = C\gamma'^2 \cos(b + 2\theta')$.

On a

$$\begin{aligned}\delta_1 \gamma = {} & \frac{4}{\mu^3} X_0 \left[\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos b^0 - AB \sin b^0\right] \\ & + \frac{4}{\mu^2} X_0 \left[\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin b^0 + AB \cos b^0\right] t \\ & - \frac{2}{\mu} X_0 \left[\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos b^0 - AB \sin b^0\right] t^2.\end{aligned}$$

Si, dans le second membre de cette formule, on remplace la lettre X par la lettre Y, on obtient la valeur de $\delta_1 e$; si l'on y remplace la lettre X par la lettre Z, on obtient la valeur de $\delta_1 a$. On a ensuite

$$\begin{aligned}\delta_1 \theta = {} & -\frac{4}{\mu^3} U_0 \left[\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin b^0 + AB \cos b^0\right] \\ & + \frac{4}{\mu^2} U_0 \left[\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos b^0 - AB \sin b^0\right] t \\ & + \frac{2}{\mu} U_0 \left[\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin b^0 + AB \cos b^0\right] t^2.\end{aligned}$$

Si, dans le second membre de cette formule, on remplace la lettre U par la lettre V, on obtient la valeur de $\delta_1 \varpi$; si l'on y remplace la lettre U par la lettre W, on obtient la valeur de $\delta_1 \lambda$. On a enfin

$$\begin{aligned}\int \delta_1 n\, dt = {} & -18 \frac{n}{\mu^4} \frac{Z_0}{a} \left[\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin b^0 + AB \cos b^0\right] \\ & + 12 \frac{n}{\mu^3} \frac{Z_0}{a} \left[\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos b^0 - AB \sin b^0\right] t \\ & + 3 \frac{n}{\mu^2} \frac{Z_0}{a} \left[\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin b^0 + AB \cos b^0\right] t^2.\end{aligned}$$

Observons que, dans ces valeurs de $\delta_1 \gamma$, $\delta_1 \theta$, $\int \delta_1 n\, dt$, et dans les valeurs de $\delta_1 e$, $\delta_1 \varpi$, $\delta_1 a$, $\delta_1 \lambda$ qui s'en déduisent, tous les termes sont du second ordre.

*Cas de* $m'_2 = -2$.

Terme considéré de $R_2$ : $C\gamma'^2 \cos \mathcal{A}_0 = C\gamma'^2 \cos(b - 2\theta')$.

On a

$$\begin{aligned}\delta_1 \gamma = & \frac{4}{\mu^3} X_0 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos b^0 + AB \sin b^0] \\ & + \frac{4}{\mu^2} X_0 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin b^0 - AB \cos b^0] t \\ & - \frac{2}{\mu} X_0 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos b^0 + AB \sin b^0] t^2.\end{aligned}$$

Si, dans le second membre de cette formule, on remplace la lettre X par la lettre Y, on obtient la valeur de $\delta_1 e$; si l'on y remplace la lettre X par la lettre Z, on obtient la valeur de $\delta_1 a$. On a ensuite

$$\begin{aligned}\delta_1 \theta = & -\frac{4}{\mu^3} U_0 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin b^0 - AB \cos b^0] \\ & + \frac{4}{\mu^2} U_0 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos b^0 + AB \sin b^0] t \\ & + \frac{2}{\mu} U_0 [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin b^0 - AB \cos b^0] t^2.\end{aligned}$$

Si, dans le second membre de cette formule, on remplace la lettre U par la lettre V, on obtient la valeur de $\delta_1 \varpi$; si l'on y remplace la lettre U par la lettre W, on obtient la valeur de $\delta_1 \lambda$. On a enfin

$$\begin{aligned}\int \delta_1 n\, dt = & -18 \frac{n}{\mu^4} \frac{Z_0}{a} [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin b^0 - AB \cos b^0] \\ & + 12 \frac{n}{\mu^3} \frac{Z_0}{a} [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\cos b^0 + AB \sin b^0] t \\ & + 3 \frac{n}{\mu^2} \frac{Z_0}{a} [\tfrac{1}{2}(B^2 - A^2)\sin b^0 - AB \cos b^0] t^2.\end{aligned}$$

Observons que, dans ces valeurs de $\delta_1 \gamma$, $\delta_1 \theta$, $\int \delta_1 n\, dt$, et dans les valeurs de $\delta_1 e$, $\delta_1 \varpi$, $\delta_1 a$, $\delta_1 \lambda$ qui s'en déduisent, tous les termes sont du second ordre.

Revenons maintenant aux formules $\frac{d\delta_2 n}{dt} = \delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right)$, $\frac{d\delta_2\lambda}{dt} = \delta_1 S$, qui doivent nous servir à calculer les deux parties $\int\delta_2 n\,dt$ et $\delta_2\lambda$ de $\delta_2 l$. Chaque terme de l'une ou l'autre des quantités $\frac{3J}{a^2}$, S, provient de l'un des termes de la fonction perturbatrice totale R et a le même argument. Par conséquent, on retrouvera dans $\delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right)$ et dans $\delta_1 S$ les arguments de la fonction R combinés par addition et soustraction avec les arguments $\mathcal{A}^0$, $\mathcal{A}^0 \pm \theta_0$, $\mathcal{A}^0 \pm 2\theta_0$, $\mathcal{B}^0$, $\mathcal{B}^0 \pm \theta_0$, $b^0$ qui figurent dans les valeurs de $\delta_1\gamma$, $\delta_1\theta$, $\delta_1 e$, $\delta_1\varpi$, $\delta_1 a$, $\delta_1\lambda$, $\int\delta_1 n\,dt$. Représentons un argument quelconque de R par $\Omega$, ou par $\Psi \pm \theta'$, ou par $\psi \pm 2\theta'$ [*], suivant que le coefficient de $\theta'$ y est égal ou à zéro, ou à $\pm 1$, ou à $\pm 2$; remplaçons d'ailleurs $\gamma'\sin\theta'$, $\gamma'\cos\theta'$ par leurs valeurs $At + A_1 t^2$, $Bt + B_1 t^2$, de manière que $\theta'$ ne figure plus dans les arguments. Alors, et en négligeant toujours les quantités d'ordre supérieur au second, $\delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right)$, $\delta_1 S$ se trouveront exprimés par des sommes de termes dont les arguments seront de l'une des formes suivantes :

$$\begin{array}{llll}
\mathcal{A}^0 \pm \Omega, & \mathcal{A}^0 \pm \theta_0 \pm \Omega, & \mathcal{A}^0 \pm 2\theta_0 \pm \Omega, & \\
\mathcal{B}^0 \pm \Omega, & \mathcal{B}^0 \pm \theta_0 \pm \Omega, & b^0 \pm \Omega, & \\
\mathcal{A}^0 \pm \Psi, & \mathcal{A}^0 \pm \theta_0 \pm \Psi, & \mathcal{B}^0 \pm \Psi, & \mathcal{A}^0 \pm \psi.
\end{array}$$

Les coefficients de ces termes contiendront la variable $\gamma$ et les angles $\theta$, $\varpi$, $\lambda$ entreront dans les parties $\pm\Omega$, $\pm\Psi$, $\pm\psi$ des arguments : or ces quantités $\gamma$, $\theta$, $\varpi$, $\lambda$ doivent encore être remplacées par $\gamma_0 + \Delta\gamma$, $\theta^0 + \Delta\theta$, $\varpi^0 + \Delta\varpi$, $\lambda^0 + \Delta\lambda$. Faisons cette substitution et appelons $\Omega^0$, $\Psi^0$, $\psi^0$ les angles fonctions linéaires du temps auxquels se réduisent $\Omega$, $\Psi$, $\psi$, lorsqu'on remplace $l$, $\varpi$, $\theta$ par $l^0$, $\varpi^0$, $\theta^0$. Alors $\delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right)$ et $\delta_1 S$ se composeront de termes ayant des arguments de l'une des formes sui-

[*] Les lettres $\Omega$, $\Psi$, $\psi$ reçoivent ici et garderont désormais une signification différente de celle qui leur a été attribuée p. 30.

vantes :

$$\begin{array}{llll} \mathcal{A}^0 \pm \Omega^0, & \mathcal{A}^0 \pm \Omega^0 \pm \theta_0, & \mathcal{A}^0 \pm \Omega^0 \pm 2\theta_0, & \\ \mathcal{B}^0 \pm \Omega^0, & \mathcal{B}^0 \pm \Omega^0 \pm \theta_0, & \mathrm{b}^0 \pm \Omega^0, & \\ \mathcal{A}^0 \pm \Psi^0, & \mathcal{A}^0 \pm \Psi^0 \pm \theta_0, & \mathcal{B}^0 \pm \Psi^0, & \mathcal{A}^0 \pm \psi^0. \end{array}$$

Comme d'ailleurs les arguments qu'on vient d'énumérer appartiendront, à l'exception du premier, à des termes qui seront au moins du premier ordre, on pourra remplacer $\theta_0$ par $\theta^0$, qui n'en diffère que d'une quantité du second ordre. Nous regarderons donc définitivement $\delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right)$ et $\delta_1 S$ comme composés de termes dont les arguments sont de l'une des formes

$$\begin{array}{llll} \mathcal{A}^0 \pm \Omega^0, & \mathcal{A}^0 \pm \Omega^0 \pm \theta^0, & \mathcal{A}^0 \pm \Omega^0 \pm 2\theta^0, & \\ \mathcal{B}^0 \pm \Omega^0, & \mathcal{B}^0 \pm \Omega^0 \pm \theta^0, & \mathrm{b}^0 \pm \Omega^0, & \\ \mathcal{A}^0 \pm \Psi^0, & \mathcal{A}^0 \pm \Psi^0 \pm \theta^0, & \mathcal{B}^0 \pm \Psi^0, & \mathcal{A}^0 \pm \psi^0. \end{array}$$

Chacun des termes dont nous venons d'indiquer le calcul proviendra de la combinaison d'un certain terme de $R_2$ ayant pour argument $\mathcal{A}$, ou $\mathcal{B} \pm \theta'$, ou $\mathrm{b} \pm 2\theta'$ avec un certain terme de R ayant pour argument $\Omega$, ou $\Psi \pm \theta'$, ou $\psi \pm 2\theta'$. Nous avons à examiner maintenant quelles sont les combinaisons de ce genre qui peuvent nous donner, dans $\delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right)$ et dans $\delta_1 S$, des parties non périodiques, c'est-à-dire ne renfermant pas comme facteur le sinus ou le cosinus d'un angle qui varie avec le temps [*].

Or il est clair que la condition nécessaire et suffisante pour qu'on obtienne de telles parties est que, dans quelqu'un des angles

$$(a) \qquad \left\{\begin{array}{llll} \mathcal{A} \pm \Omega, & \mathcal{A} \pm \Omega \pm \theta, & \mathcal{A} \pm \Omega \pm 2\theta, & \\ \mathcal{B} \pm \Omega, & \mathcal{B} \pm \Omega \pm \theta, & \mathrm{b} \pm \Omega, & \\ \mathcal{A} \pm \Psi, & \mathcal{A} \pm \Psi \pm \theta, & \mathcal{B} \pm \Psi, & \mathcal{A} \pm \psi, \end{array}\right.$$

[*] On se souviendra que nous regardons l'angle $\varpi'$ comme une constante, et qu'ainsi un terme renfermant en facteur le sinus ou le cosinus d'un multiple de $\varpi'$ ne doit pas être considéré comme périodique.

les coefficients de $l$, $\varpi$, $\theta$, $l'$ se réduisent tous les quatre à zéro, ou, ce qui est la même chose, qu'un des angles de cette liste se réduise soit à zéro, soit à un multiple de $\varpi'$. Il sera donc aisé, à l'inspection du développement de la fonction perturbatrice, de reconnaître quels termes de $R_2$ on doit associer à chaque terme de R.

Lorsqu'on néglige les puissances de $\gamma'$ supérieures à la seconde, les coefficients des différents termes de R sont, comme on l'a déjà dit, de l'une des formes $C + \bar{C}\gamma'^2$, $C\gamma'$, $C\gamma'^2$; les quantités C, $\bar{C}$ peuvent elles-mêmes être développées suivant les puissances de $\gamma$, $e$, $e'$, $\frac{a}{a'}$; nous pousserons ces développements jusqu'au quatrième degré, en regardant $\gamma$, $e$, $e'$, $\sqrt{\frac{a}{a'}}$ comme du premier. Nous négligerons, par conséquent, les termes de R dans lesquels la somme des exposants de $\gamma$, $e$, $e'$, $\sqrt{\frac{a}{a'}}$ serait supérieure à 4.

Le développement de R ainsi limité se compose de quatre cent huit termes. Le défaut d'espace nous empêche de transcrire ici les valeurs des coefficients; nous nous bornerons à donner la liste des arguments, en accompagnant chacun d'eux d'un numéro d'ordre qui servira à désigner le terme correspondant. On se rappellera d'ailleurs que le coefficient est de la forme $C + \bar{C}\gamma'^2$, ou $C\gamma'$, ou $C\gamma'^2$, selon que le multiplicateur de $\theta'$ dans l'argument est zéro, ou $\pm 1$, ou $\pm 2$.

*Tableau des arguments des différents termes qui composent le développement de* R.

| Nos d'ordre. | ARGUMENTS. | Nos d'ordre. | ARGUMENTS. | Nos d'ordre. | ARGUMENTS. |
|---|---|---|---|---|---|
| 0. | $0$ | 9. | $3l - \varpi - 2l'$ | 18. | $l' + \varpi' - 2\theta'$ |
| 1. | $2l - 2l'$ | 10. | $2l - \theta - 2l' + \theta'$ | 19. | $3l' - \varpi' - 2\theta'$ |
| 2. | $2l - 2\theta'$ | 11. | $\theta - \theta'$ | 20. | $l - \varpi + 2l' - 2\theta'$ |
| 3. | $2l' - 2\theta'$ | 12. | $2l - \theta - \theta'$ | 21. | $l - \varpi - 2l' + 2\theta'$ |
| 4. | $l' - \varpi'$ | 13. | $-\theta + 2l' - \theta'$ | 22. | $2l' - 2\varpi'$ |
| 5. | $l - \varpi$ | 14. | $2l + l' - \varpi' - 2\theta'$ | 23. | $l - \varpi + l' - \varpi'$ |
| 6. | $2l - l' - \varpi'$ | 15. | $2l - l' + \varpi' - 2\theta'$ | 24. | $l - \varpi - l' + \varpi'$ |
| 7. | $2l - 3l' + \varpi'$ | 16. | $l + \varpi - 2\theta'$ | 25. | $2l - 2\varpi$ |
| 8. | $l + \varpi - 2l'$ | 17. | $3l - \varpi - 2\theta'$ | 26. | $2l - 4l' + 2\varpi'$ |

| Nos d'ordre. | ARGUMENTS. | Nos d'ordre. | ARGUMENTS. | Nos d'ordre | ARGUMENTS. |
|---|---|---|---|---|---|
| 27. | $l+\varpi-l'-\varpi'$ | 72. | $l-3l'+2\theta'$ | 117. | $l-\varpi-\theta+l'-\varpi'+\theta'$ |
| 28. | $l+\varpi-3l'+\varpi'$ | 73. | $3l-l'-2\theta'$ | 118. | $l-\varpi-\theta-l'+\varpi'+\theta'$ |
| 29. | $3l-\varpi-l'-\varpi'$ | 74. | $3l'-3\varpi'$ | 119. | $2l-2\varpi+\theta-\theta'$ |
| 30. | $3l-\varpi-3l'+\varpi'$ | 75. | $l-\varpi+2l'-2\varpi'$ | 120. | $2l-2\varpi-\theta+\theta'$ |
| 31. | $-2\varpi+2l'$ | 76. | $l-\varpi-2l'+2\varpi'$ | 121. | $2l-\theta+2l'-2\varpi'-\theta'$ |
| 32. | $4l-2\varpi-2l'$ | 77. | $2l-2\varpi+l'-\varpi'$ | 122. | $2l-\theta-2l'+2\varpi'-\theta'$ |
| 33. | $2l-2\theta$ | 78. | $2l-2\varpi-l'+\varpi'$ | 123. | $l+\varpi-\theta+l'-\varpi'-\theta'$ |
| 34. | $-2\theta+2l'$ | 79. | $3l-3\varpi$ | 124. | $l+\varpi-\theta-l'+\varpi'-\theta'$ |
| 35. | $l-l'$ | 80. | $2l+l'-3\varpi'$ | 125. | $3l-\varpi-\theta+l'-\varpi'-\theta'$ |
| 36. | $3l-3l'$ | 81. | $2l-5l'+3\varpi'$ | 126. | $3l-\varpi-\theta-l'+\varpi'-\theta'$ |
| 37. | $2l-\theta-l'-\varpi'+\theta'$ | 82. | $l+\varpi-4l'+2\varpi'$ | 127. | $2\varpi-\theta-\theta'$ |
| 38. | $2l-\theta-3l'+\varpi'+\theta'$ | 83. | $3l-\varpi-4l'+2\varpi'$ | 128. | $4l-2\varpi-\theta-\theta'$ |
| 39. | $l+\varpi-\theta-2l'+\theta'$ | 84. | $-2\varpi+l'+\varpi'$ | 129. | $-\theta+4l'-2\varpi'-\theta'$ |
| 40. | $3l-\varpi-\theta-2l'+\theta'$ | 85. | $-2\varpi+3l'-\varpi'$ | 130. | $l-\varpi-\theta+l'+\varpi'-\theta'$ |
| 41. | $\theta+l'-\varpi'-\theta'$ | 86. | $4l-2\varpi-l'-\varpi'$ | 131. | $l-\varpi-\theta+3l'-\varpi'-\theta'$ |
| 42. | $-\theta+l'-\varpi'+\theta'$ | 87. | $4l-2\varpi-3l'+\varpi'$ | 132. | $l-\varpi+\theta-l'-\varpi'+\theta'$ |
| 43. | $l-\varpi+\theta-\theta'$ | 88. | $l-3\varpi+2l'$ | 133. | $l-\varpi+\theta-3l'+\varpi'+\theta'$ |
| 44. | $l-\varpi-\theta+\theta'$ | 89. | $5l-3\varpi-2l'$ | 134. | $2l-2\varpi-\theta+2l'-\theta'$ |
| 45. | $2l-\theta+l'-\varpi'-\theta'$ | 90. | $2l-2\theta+l'-\varpi'$ | 135. | $2l-2\varpi+\theta-2l'+\theta'$ |
| 46. | $2l-\theta-l'+\varpi'-\theta'$ | 91. | $2l-2\theta-l'+\varpi'$ | 136. | $2l-3\theta+\theta'$ |
| 47. | $l+\varpi-\theta-\theta'$ | 92. | $l+\varpi-2\theta$ | 137. | $2l-3\theta+2l'-\theta'$ |
| 48. | $3l-\varpi-\theta-\theta'$ | 93. | $3l-\varpi-2\theta$ | 138. | $l-\theta-l'+\theta'$ |
| 49. | $-\theta+l'+\varpi'-\theta'$ | 94. | $-2\theta+l'+\varpi'$ | 139. | $l+\theta-l'-\theta'$ |
| 50. | $-\theta+3l'-\varpi'-\theta'$ | 95. | $-2\theta+3l'-\varpi'$ | 140. | $3l-\theta-3l'+\theta'$ |
| 51. | $l-\varpi-\theta+2l'-\theta'$ | 96. | $l-\varpi-2\theta+2l'$ | 141. | $l-\theta+l'-\theta'$ |
| 52. | $l-\varpi+\theta-2l'+\theta'$ | 97. | $l-\varpi+2\theta-2l'$ | 142. | $l+\theta-3l'+\theta'$ |
| 53. | $2l-2\theta-2l'+2\theta'$ | 98. | $l-\varpi'$ | 143. | $3l-\theta-l'-\theta'$ |
| 54. | $2l-2\theta+2l'-2\theta'$ | 99. | $l-2l'+\varpi'$ | 144. | $2l-2\theta-l'-\varpi'+2\theta'$ |
| 55. | $2\theta-2\theta'$ | 100. | $-\varpi+l'$ | 145. | $2l-2\theta-3l'+\varpi'+2\theta'$ |
| 56. | $2l+2l'-2\varpi'-2\theta'$ | 101. | $2l-\varpi-l'$ | 146. | $l+\varpi-2\theta-2l'+2\theta'$ |
| 57. | $2l-2l'+2\varpi'-2\theta'$ | 102. | $3l-2l'-\varpi'$ | 147. | $3l-\varpi-2\theta-2l'+2\theta'$ |
| 58. | $l+\varpi+l'-\varpi'-2\theta'$ | 103. | $3l-4l'+\varpi'$ | 148. | $2l-2\theta+l'+\varpi'-2\theta'$ |
| 59. | $l+\varpi-l'+\varpi'-2\theta'$ | 104. | $2l+\varpi-3l'$ | 149. | $2l-2\theta+3l'-\varpi'-2\theta'$ |
| 60. | $3l-\varpi+l'-\varpi'-2\theta'$ | 105. | $4l-\varpi-3l'$ | 150. | $l+\varpi-2\theta+2l'-2\theta'$ |
| 61. | $3l-\varpi-l'+\varpi'-2\theta'$ | 106. | $2l-\theta-4l'+2\varpi'+\theta'$ | 151. | $3l-\varpi-2\theta+2l'-2\theta'$ |
| 62. | $2\varpi-2\theta'$ | 107. | $l+\varpi-\theta-l'-\varpi'+\theta'$ | 152. | $2\theta+l'-\varpi'-2\theta'$ |
| 63. | $4l-2\varpi-2\theta'$ | 108. | $l+\varpi-\theta-3l'+\varpi'+\theta'$ | 153. | $-2\theta+l'-\varpi'+2\theta'$ |
| 64. | $4l'-2\varpi'-2\theta'$ | 109. | $3l-\varpi-\theta-l'-\varpi'+\theta'$ | 154. | $l-\varpi+2\theta-2\theta'$ |
| 65. | $l-\varpi+l'+\varpi'-2\theta'$ | 110. | $3l-\varpi-\theta-3l'+\varpi'+\theta'$ | 155. | $l-\varpi-2\theta+2\theta'$ |
| 66. | $l-\varpi+3l'-\varpi'-2\theta'$ | 111. | $-2\varpi+\theta+2l'-\theta'$ | 156. | $2l+3l'-3\varpi'-2\theta'$ |
| 67. | $l-\varpi-l'-\varpi'+2\theta'$ | 112. | $4l-2\varpi-\theta-2l'+\theta'$ | 157. | $2l-3l'+3\varpi'-2\theta'$ |
| 68. | $l-\varpi-3l'+\varpi'+2\theta'$ | 113. | $\theta+2l'-2\varpi'-\theta'$ | 158. | $l+\varpi+2l'-2\varpi'-2\theta'$ |
| 69. | $2l-2\varpi+2l'-2\theta'$ | 114. | $-\theta+2l'-2\varpi'+\theta'$ | 159. | $l+\varpi-2l'+2\varpi'-2\theta'$ |
| 70. | $2l-2\varpi-2l'+2\theta'$ | 115. | $l-\varpi+\theta+l'-\varpi'-\theta'$ | 160. | $3l-\varpi+2l'-2\varpi'-2\theta'$ |
| 71. | $l+l'-2\theta'$ | 116. | $l-\varpi+\theta-l'+\varpi'-\theta'$ | 161. | $3l-\varpi-2l'+2\varpi'-2\theta'$ |

| Nos d'ordre. | ARGUMENTS. |
|---|---|
| 162. | $2\varpi + l' - \varpi' - 2\theta'$ |
| 163. | $-2\varpi + l' - \varpi' + 2\theta'$ |
| 164. | $4l - 2\varpi + l' - \varpi' - 2\theta'$ |
| 165. | $4l - 2\varpi - l' + \varpi' - 2\theta'$ |
| 166. | $l - 3\varpi + 2\theta'$ |
| 167. | $5l - 3\varpi - 2\theta'$ |
| 168. | $l' - 3\varpi' + 2\theta'$ |
| 169. | $5l' - 3\varpi' - 2\theta'$ |
| 170. | $l - \varpi + 4l' - 2\varpi' - 2\theta'$ |
| 171. | $l - \varpi - 4l' + 2\varpi' + 2\theta'$ |
| 172. | $2l - 2\varpi + l' + \varpi' - 2\theta'$ |
| 173. | $2l - 2\varpi + 3l' - \varpi' - 2\theta'$ |
| 174. | $2l - 2\varpi - l' - \varpi' + 2\theta'$ |
| 175. | $2l - 2\varpi - 3l' + \varpi' + 2\theta'$ |
| 176. | $3l - 3\varpi + 2l' - 2\theta'$ |
| 177. | $3l - 3\varpi - 2l' + 2\theta'$ |
| 178. | $l + \varpi' - 2\theta'$ |
| 179. | $l + 2l' - \varpi' - 2\theta'$ |
| 180. | $\varpi + l' - 2\theta'$ |
| 181. | $2l - \varpi + l' - 2\theta'$ |
| 182. | $l - 2l' - \varpi' + 2\theta'$ |
| 183. | $l - 4l' + \varpi' + 2\theta'$ |
| 184. | $-\varpi + 3l' - 2\theta'$ |
| 185. | $2l - \varpi - 3l' + 2\theta'$ |
| 186. | $3l - \varpi' - 2\theta'$ |
| 187. | $3l - 2l' + \varpi' - 2\theta'$ |
| 188. | $2l + \varpi - l' - 2\theta'$ |
| 189. | $4l - \varpi - l' - 2\theta'$ |
| 190. | $4l' - 4\varpi'$ |
| 191. | $l - \varpi + 3l' - 3\varpi'$ |
| 192. | $l - \varpi - 3l' + 3\varpi'$ |
| 193. | $2l - 2\varpi + 2l' - 2\varpi'$ |
| 194. | $2l - 2\varpi - 2l' + 2\varpi'$ |
| 195. | $3l - 3\varpi + l' - \varpi'$ |
| 196. | $3l - 3\varpi - l' + \varpi'$ |
| 197. | $4l - 4\varpi$ |
| 198. | $2l + 2l' - 4\varpi'$ |
| 199. | $2l - 6l' + 4\varpi'$ |
| 200. | $l + \varpi + l' - 3\varpi'$ |
| 201. | $l + \varpi - 5l' + 3\varpi'$ |
| 202. | $3l - \varpi + l' - 3\varpi'$ |
| 203. | $3l - \varpi - 5l' + 3\varpi'$ |
| 204. | $-2\varpi + 4l' - 2\varpi'$ |
| 205. | $4l - 2\varpi - 4l' + 2\varpi'$ |
| 206. | $l - 3\varpi + l' + \varpi'$ |
| 207. | $l - 3\varpi + 3l' - \varpi'$ |
| 208. | $5l - 3\varpi - l' - \varpi'$ |
| 209. | $5l - 3\varpi - 3l' + \varpi'$ |
| 210. | $2l - 4\varpi + 2l'$ |
| 211. | $6l - 4\varpi - 2l'$ |
| 212. | $2l - 2\theta + 2l' - 2\varpi'$ |
| 213. | $2l - 2\theta - 2l' + 2\varpi'$ |
| 214. | $l + \varpi - 2\theta + l' - \varpi'$ |
| 215. | $l + \varpi - 2\theta - l' + \varpi'$ |
| 216. | $3l - \varpi - 2\theta + l' - \varpi'$ |
| 217. | $3l - \varpi - 2\theta - l' + \varpi'$ |
| 218. | $2\varpi - 2\theta$ |
| 219. | $4l - 2\varpi - 2\theta$ |
| 220. | $-2\theta + 4l' - 2\varpi'$ |
| 221. | $l - \varpi - 2\theta + l' + \varpi'$ |
| 222. | $l - \varpi - 2\theta + 3l' - \varpi'$ |
| 223. | $l - \varpi + 2\theta - l' - \varpi'$ |
| 224. | $l - \varpi + 2\theta - 3l' + \varpi'$ |
| 225. | $2l - 2\varpi - 2\theta + 2l'$ |
| 226. | $2l - 2\varpi + 2\theta - 2l'$ |
| 227. | $2l - 4\theta + 2l'$ |
| 228. | $l + l' - 2\varpi'$ |
| 229. | $l - 3l' + 2\varpi'$ |
| 230. | $\varpi - \varpi'$ |
| 231. | $-\varpi + 2l' - \varpi'$ |
| 232. | $2l - \varpi - \varpi'$ |
| 233. | $2l - \varpi - 2l' + \varpi'$ |
| 234. | $l - 2\varpi + l'$ |
| 235. | $3l - 2\varpi - l'$ |
| 236. | $3l - l' - 2\varpi'$ |
| 237. | $3l - 5l' + 2\varpi'$ |
| 238. | $2l + \varpi - 2l' - \varpi'$ |
| 239. | $2l + \varpi - 4l' + \varpi'$ |
| 240. | $4l - \varpi - 2l' - \varpi'$ |
| 241. | $4l - \varpi - 4l' + \varpi'$ |
| 242. | $l + 2\varpi - 3l'$ |
| 243. | $5l - 2\varpi - 3l'$ |
| 244. | $l - 2\theta + l'$ |
| 245. | $3l - 2\theta - l'$ |
| 246. | $l + 2\theta - 3l'$ |
| 247. | $4l - 4l'$ |
| 248. | $2l - \theta + l' - 3\varpi' + \theta'$ |
| 249. | $2l - \theta - 5l' + 3\varpi' + \theta'$ |
| 250. | $l + \varpi - \theta - 4l' + 2\varpi' + \theta'$ |
| 251. | $3l - \varpi - \theta - 4l' + 2\varpi' + \theta'$ |
| 252. | $-2\varpi + \theta + l' + \varpi' - \theta'$ |
| 253. | $-2\varpi + \theta + 3l' - \varpi' - \theta'$ |
| 254. | $4l - 2\varpi - \theta - l' - \varpi' + \theta'$ |
| 255. | $4l - 2\varpi - \theta - 3l' + \varpi' + \theta'$ |
| 256. | $l - 3\varpi + \theta + 2l' - \theta'$ |
| 257. | $5l - 3\varpi - \theta - 2l' + \theta'$ |
| 258. | $\theta + 3l' - 3\varpi' - \theta'$ |
| 259. | $-\theta + 3l' - 3\varpi' + \theta'$ |
| 260. | $l - \varpi + \theta + 2l' - 2\varpi' - \theta'$ |
| 261. | $l - \varpi + \theta - 2l' + 2\varpi' - \theta'$ |
| 262. | $l - \varpi - \theta + 2l' - 2\varpi' + \theta'$ |
| 263. | $l - \varpi - \theta - 2l' + 2\varpi' + \theta'$ |
| 264. | $2l - 2\varpi + \theta + l' - \varpi' - \theta'$ |
| 265. | $2l - 2\varpi + \theta - l' + \varpi' - \theta'$ |
| 266. | $2l - 2\varpi - \theta + l' - \varpi' + \theta'$ |
| 267. | $2l - 2\varpi - \theta - l' + \varpi' + \theta'$ |
| 268. | $3l - 3\varpi + \theta - \theta'$ |
| 269. | $3l - 3\varpi - \theta + \theta'$ |
| 270. | $2l - \theta + 3l' - 3\varpi' - \theta'$ |
| 271. | $2l - \theta - 3l' + 3\varpi' - \theta'$ |
| 272. | $l + \varpi - \theta + 2l' - 2\varpi' - \theta'$ |
| 273. | $l + \varpi - \theta - 2l' + 2\varpi' - \theta'$ |
| 274. | $3l - \varpi - \theta + 2l' - 2\varpi' - \theta'$ |
| 275. | $3l - \varpi - \theta - 2l' + 2\varpi' - \theta'$ |
| 276. | $2\varpi - \theta + l' - \varpi' - \theta'$ |
| 277. | $-2\varpi + \theta + l' - \varpi' + \theta'$ |
| 278. | $4l - 2\varpi - \theta + l' - \varpi' - \theta'$ |
| 279. | $4l - 2\varpi - \theta - l' + \varpi' - \theta'$ |
| 280. | $l - 3\varpi + \theta + \theta'$ |
| 281. | $5l - 3\varpi - \theta - \theta'$ |
| 282. | $\theta + l' - 3\varpi' + \theta'$ |
| 283. | $-\theta + 5l' - 3\varpi' - \theta'$ |
| 284. | $l - \varpi - \theta + 4l' - 2\varpi' - \theta'$ |
| 285. | $l - \varpi + \theta - 4l' + 2\varpi' + \theta'$ |
| 286. | $2l - 2\varpi - \theta + l' + \varpi' - \theta'$ |
| 287. | $2l - 2\varpi - \theta + 3l' - \varpi' - \theta'$ |
| 288. | $2l - 2\varpi + \theta - l' - \varpi' + \theta'$ |
| 289. | $2l - 2\varpi + \theta - 3l' + \varpi' + \theta'$ |
| 290. | $3l - 3\varpi - \theta + 2l' - \theta'$ |
| 291. | $3l - 3\varpi + \theta - 2l' + \theta'$ |
| 292. | $2l - 3\theta + l' - \varpi' + \theta'$ |
| 293. | $2l - 3\theta - l' + \varpi' + \theta'$ |
| 294. | $l + \varpi - 3\theta + \theta'$ |
| 295. | $3l - \varpi - 3\theta + \theta'$ |
| 296. | $2l - 3\theta + l' + \varpi' - \theta'$ |

| Nos d'ordre. | ARGUMENTS. | Nos d'ordre. | ARGUMENTS. | Nos d'ordre | ARGUMENTS. |
|---|---|---|---|---|---|
| 297. | $2l-3\theta+3l'-\varpi'-\theta'$ | 334. | $3l-\varpi-2\theta+l'+\varpi'-2\theta'$ | 371. | $3l-3\varpi+3l'-\varpi'-2\theta'$ |
| 298. | $l+\varpi-3\theta+2l'-\theta'$ | 335. | $3l-\varpi-2\theta+3l'-\varpi'-2\theta'$ | 372. | $3l-3\varpi-l'-\varpi'+2\theta'$ |
| 299. | $3l-\varpi-3\theta+2l'-\theta'$ | 336. | $2\varpi-2\theta+2l'-2\theta'$ | 373. | $3l-3\varpi-3l'+\varpi'+2\theta'$ |
| 300. | $l-\theta-\varpi'+\theta'$ | 337. | $4l-2\varpi-2\theta+2l'-2\theta'$ | 374. | $4l-4\varpi+2l'-2\theta'$ |
| 301. | $l-\theta-2l'+\varpi'+\theta'$ | 338. | $2\theta+2l'-2\varpi'-2\theta'$ | 375. | $4l-4\varpi-2l'+2\theta'$ |
| 302. | $-\varpi+\theta+l'-\theta'$ | 339. | $-2\theta+2l'-2\varpi'+2\theta'$ | 376. | $2l-4\theta+2\theta'$ |
| 303. | $2l-\varpi-\theta-l'+\theta'$ | 340. | $l-\varpi+2\theta+l'-\varpi'-2\theta'$ | 377. | $l-l'+2\varpi'-2\theta'$ |
| 304. | $l+\theta-\varpi'-\theta'$ | 341. | $l-\varpi+2\theta-l'+\varpi'-2\theta'$ | 378. | $l+3l'-2\varpi'-2\theta'$ |
| 305. | $l+\theta-2l'+\varpi'-\theta'$ | 342. | $l-\varpi-2\theta+l'-\varpi'+2\theta'$ | 379. | $\varpi+\varpi'-2\theta'$ |
| 306. | $-\varpi-\theta+l'+\theta'$ | 343. | $l-\varpi-2\theta-l'+\varpi'+2\theta'$ | 380. | $\varpi+2l'-\varpi'-2\theta'$ |
| 307. | $2l-\varpi+\theta-l'-\theta'$ | 344. | $2l-2\varpi+2\theta-2\theta'$ | 381. | $2l-\varpi+\varpi'-2\theta'$ |
| 308. | $3l-\theta-2l'-\varpi'+\theta'$ | 345. | $2l-2\varpi-2\theta+2\theta'$ | 382. | $2l-\varpi+2l'-\varpi'-2\theta'$ |
| 309. | $3l-\theta-4l'+\varpi'+\theta'$ | 346. | $2l+4l'-4\varpi'-2\theta'$ | 383. | $l-2\varpi-l'+2\theta'$ |
| 310. | $2l+\varpi-\theta-3l'+\theta'$ | 347. | $2l-4l'+4\varpi'-2\theta'$ | 384. | $3l-2\varpi+l'-2\theta'$ |
| 311. | $4l-\varpi-\theta-3l'+\theta'$ | 348. | $l+\varpi+3l'-3\varpi'-2\theta'$ | 385. | $l-l'-2\varpi'+2\theta'$ |
| 312. | $l-\theta+\varpi'-\theta'$ | 349. | $l+\varpi-3l'+3\varpi'-2\theta'$ | 386. | $l-5l'+2\varpi'+2\theta'$ |
| 313. | $l-\theta+2l'-\varpi'-\theta'$ | 350. | $3l-\varpi+3l'-3\varpi'-2\theta'$ | 387. | $-\varpi+2l'+\varpi'-2\theta'$ |
| 314. | $\varpi-\theta+l'-\theta'$ | 351. | $3l-\varpi-3l'+3\varpi'-2\theta'$ | 388. | $-\varpi+4l'-\varpi'-2\theta'$ |
| 315. | $2l-\varpi-\theta+l'-\theta'$ | 352. | $2\varpi+2l'-2\varpi'-2\theta'$ | 389. | $2l-\varpi-2l'-\varpi'+2\theta'$ |
| 316. | $l+\theta-2l'-\varpi'+\theta'$ | 353. | $-2\varpi+2l'-2\varpi'+2\theta'$ | 390. | $2l-\varpi-4l'+\varpi'+2\theta'$ |
| 317. | $l+\theta-4l'+\varpi'+\theta'$ | 354. | $4l-2\varpi+2l'-2\varpi'-2\theta'$ | 391. | $l-2\varpi+3l'-2\theta'$ |
| 318. | $-\varpi-\theta+3l'-\theta'$ | 355. | $4l-2\varpi-2l'+2\varpi'-2\theta'$ | 392. | $3l-2\varpi-3l'+2\theta'$ |
| 319. | $2l-\varpi+\theta-3l'+\theta'$ | 356. | $l-3\varpi+l'-\varpi'+2\theta'$ | 393. | $3l+l'-2\varpi'-2\theta'$ |
| 320. | $3l-\theta-\varpi'-\theta'$ | 357. | $l-3\varpi-l'+\varpi'+2\theta'$ | 394. | $3l-3l'+2\varpi'-2\theta'$ |
| 321. | $3l-\theta-2l'+\varpi'-\theta'$ | 358. | $5l-3\varpi+l'-\varpi'-2\theta'$ | 395. | $2l+\varpi-\varpi'-2\theta'$ |
| 322. | $2l+\varpi-\theta-l'-\theta'$ | 359. | $5l-3\varpi-l'+\varpi'-2\theta'$ | 396. | $2l+\varpi-2l'+\varpi'-2\theta'$ |
| 323. | $4l-\varpi-\theta-l'-\theta'$ | 360. | $2l-4\varpi+2\theta'$ | 397. | $4l-\varpi-\varpi'-2\theta'$ |
| 324. | $2l-2\theta-4l'+2\varpi'+2\theta'$ | 361. | $6l-4\varpi-2\theta'$ | 398. | $4l-\varpi-2l'+\varpi'-2\theta'$ |
| 325. | $l+\varpi-2\theta-l'-\varpi'+2\theta'$ | 362. | $2l'-4\varpi'+2\theta'$ | 399. | $l+2\varpi-l'-2\theta'$ |
| 326. | $l+\varpi-2\theta-3l'+\varpi'+2\theta'$ | 363. | $6l'-4\varpi'-2\theta'$ | 400. | $5l-2\varpi-l'-2\theta'$ |
| 327. | $3l-\varpi-2\theta-l'-\varpi'+2\theta'$ | 364. | $l-\varpi-l'+3\varpi'-2\theta'$ | 401. | $l-2\theta-l'+2\theta'$ |
| 328. | $3l-\varpi-2\theta-3l'+\varpi'+2\theta'$ | 365. | $l-\varpi+5l'-3\varpi'-2\theta'$ | 402. | $l+2\theta-l'-2\theta'$ |
| 329. | $-2\varpi+2\theta+2l'-2\theta'$ | 366. | $l-\varpi+l'-3\varpi'+2\theta'$ | 403. | $3l-2\theta-3l'+2\theta'$ |
| 330. | $4l-2\varpi-2\theta-2l'+2\theta'$ | 367. | $l-\varpi-5l'+3\varpi'+2\theta'$ | 404. | $3l-2\theta+l'-2\theta'$ |
| 331. | $2l-2\theta+4l'-2\varpi'-2\theta'$ | 368. | $2l-2\varpi+4l'-2\varpi'-2\theta'$ | 405. | $l-2\theta+3l'-2\theta'$ |
| 332. | $l+\varpi-2\theta+l'+\varpi'-2\theta'$ | 369. | $2l-2\varpi-4l'+2\varpi'+2\theta'$ | 406. | $2l-4l'+2\theta'$ |
| 333. | $l+\varpi-2\theta+3l'-\varpi'-2\theta'$ | 370. | $3l-3\varpi+l'+\varpi'-2\theta'$ | 407. | $4l-2l'-2\theta'$ |

Le développement de $R_2$ s'obtient en supprimant dans le développement de R les trois termes qui portent, dans le tableau précédent, les nos 0, 11 et 55.

Cherchons maintenant quels termes de $R_2$ il faut associer à chaque terme de R. Les termes étant désignés par leurs numéros d'ordre, conformément au tableau ci-dessus, prenons d'abord dans R le terme o. Il est de la forme $(C + \overline{C}\gamma'^2)\cos\Omega$, l'argument $\Omega$ se réduisant ici à zéro; les angles à considérer dans la liste $(a)$, page 71, sont donc $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \pm \theta$, $\mathfrak{A} \pm 2\theta$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \pm \theta$, $\mathrm{b}$. Comme d'ailleurs la somme des multiplicateurs de $l$, $\varpi$, $\theta$, $l'$, $\varpi'$ est toujours zéro dans $\mathfrak{A}$, $\pm 1$ dans $\mathfrak{B}$, $\pm 2$ dans $\mathrm{b}$, pour qu'un des angles $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \pm \theta$, $\mathfrak{A} \pm 2\theta$ se réduise soit à zéro, soit à un multiple de $\varpi'$, il faut qu'on ait $\mathfrak{A} = 0$, ou $\mathfrak{A} = \pm(2\theta - 2\varpi')$; pour qu'un des angles $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \pm \theta$ se réduise à zéro ou à un multiple de $\varpi'$, il faut qu'on ait $\mathfrak{B} = \pm\theta$, ou $\mathfrak{B} = \pm(\theta - 2\varpi')$; enfin, pour que $\mathrm{b}$ se réduise à un multiple de $\varpi'$, il faut qu'on ait $\mathrm{b} = 2\varpi'$. Aucun des termes de $R_2$ compris dans le développement précédent ne satisfait à l'une ou à l'autre de ces conditions : ainsi aucun terme de $R_2$, associé au terme o de R, ne donne de partie non périodique dans $\delta_2 l$.

Prenons ensuite dans R le terme 1. Il est encore de la forme $(C + \overline{C}\gamma'^2)\cos\Omega$, $\Omega$ étant égal à $2l - 2l'$ : il faut donc ici que l'un des angles $\mathfrak{A} \pm (2l - 2l')$, $\mathfrak{A} \pm (2l - 2l') \pm \theta$, $\mathfrak{A} \pm (2l - 2l') \pm 2\theta$, $\mathfrak{B} \pm (2l - 2l')$, $\mathfrak{B} \pm (2l - 2l') \pm \theta$, $\mathrm{b} \pm (2l - 2l')$ se réduise à zéro ou à un multiple de $\varpi'$. Comme, dans notre développement de R, les arguments sont toujours écrits de façon que le multiplicateur de $l$ y ait le signe $+$, on ne pourra satisfaire à la condition énoncée qu'en faisant l'une des hypothèses suivantes :

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{A} = 2l - 2l', & \mathfrak{A} = 2l + 2\theta - 2l' - 2\varpi', & \mathfrak{A} = 2l - 2\theta - 2l' + 2\varpi', \\
\mathfrak{B} = 2l + \theta - 2l' & \mathfrak{B} = 2l - \theta - 2l' & \mathfrak{B} = 2l + \theta - 2l' - 2\varpi', \\
\mathfrak{B} = 2l - \theta - 2l' + 2\varpi', & \mathrm{b} = 2l - 2l' + 2\varpi', & \mathrm{b} = 2l - 2l' - 2\varpi'.
\end{array}$$

De ces neuf hypothèses, la première est vérifiée par le terme 1 de $R_2$, la troisième par le terme 213, la cinquième par le terme 10, la septième par le terme 122 et la huitième par le terme 57; les autres ne sont vérifiées par aucun des termes de $R_2$ compris dans notre développement. Ainsi on obtiendra des parties non périodiques de $\delta_2 l$ en associant au terme 1 de R les termes 1, 10, 57, 122, 213 de $R_2$.

En continuant ainsi, on verra quels termes de $R_2$ doivent être associés avec chaque terme de R, et on trouvera que le nombre des combinaisons satisfaisant aux conditions énoncées ci-dessus est de 763. Mais, avant d'en écrire le tableau, il convient d'expliquer le partage de ces combinaisons en un certain nombre de groupes pour chacun desquels on peut construire des formules générales donnant les parties non périodiques correspondantes de $\delta_2 l$.

Si l'argument du terme pris dans R, ou, pour parler plus brièvement, si l'argument de R est de la forme $\Omega$, c'est-à-dire ne contient pas $\theta'$, l'argument de $R_2$ devra être de l'une des formes

$$\mathcal{A},\quad \mathcal{B}+\theta',\quad \mathcal{B}-\theta',\quad \mathrm{b}+2\theta',\quad \mathrm{b}-2\theta'.$$

Si l'argument de $R_2$ est de la forme $\mathcal{A}$, on devra avoir $\mathcal{A}=\Omega$, ou $\mathcal{A}=\Omega-2\theta+2\varpi'$, ou $\mathcal{A}=\Omega+2\theta-2\varpi'$; s'il est de la forme $\mathcal{B}+\theta'$, on devra avoir $\mathcal{B}=\Omega-\theta$, ou $\mathcal{B}=\Omega+\theta-2\varpi'$; s'il est de la forme $\mathcal{B}-\theta'$, on devra avoir $\mathcal{B}=\Omega+\theta$, ou $\mathcal{B}=\Omega-\theta+2\varpi'$; s'il est de la forme $\mathrm{b}+2\theta'$, on devra avoir $\mathrm{b}=\Omega-2\varpi'$; s'il est de la forme $\mathrm{b}-2\theta'$, on devra avoir $\mathrm{b}=\Omega+2\varpi'$.

Si l'argument de R est de la forme $\Psi+\theta'$, celui de $R_2$ devra être de l'une des formes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}+\theta'$, $\mathcal{B}-\theta'$. S'il est de la forme $\mathcal{A}$, on devra avoir $\mathcal{A}=\Psi+\theta$, ou $\mathcal{A}=\Psi-\theta+2\varpi'$; s'il est de la forme $\mathcal{B}+\theta'$, on devra avoir $\mathcal{B}=\Psi$; s'il est de la forme $\mathcal{B}-\theta'$, on devra avoir $\mathcal{B}=\Psi+2\varpi'$.

Si l'argument de R est de la forme $\Psi-\theta'$, celui de $R_2$ devra être de l'une des formes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}+\theta'$, $\mathcal{B}-\theta'$. S'il est de la forme $\mathcal{A}$, on devra avoir $\mathcal{A}=\Psi-\theta$, ou $\mathcal{A}=\Psi+\theta-2\varpi'$; s'il est de la forme $\mathcal{B}+\theta'$, on devra avoir $\mathcal{B}=\Psi-2\varpi'$; s'il est de la forme $\mathcal{B}-\theta'$, on devra avoir $\mathcal{B}=\Psi$.

Si l'argument de R est de la forme $\psi+2\theta'$, celui de $R_2$ devra être de la forme $\mathcal{A}$, et on devra avoir $\mathcal{A}=\psi+2\varpi'$.

Enfin, si l'argument de R est de la forme $\psi-2\theta'$, celui de $R_2$ devra encore être de la forme $\mathcal{A}$; mais on devra avoir $\mathcal{A}=\psi-2\varpi'$.

On est conduit par là à distinguer dix-neuf cas, que nous rangerons dans l'ordre indiqué par le tableau suivant :

| | ARGUMENT de R. | ARGUMENT de $R_2$. | RELATION ENTRE LES DEUX ARGUMENTS. |
|---|---|---|---|
| 1er cas | $\Omega$ | $\mathcal{A}$ | $\mathcal{A} = \Omega$ |
| 2e cas | $\Omega$ | $\mathcal{A}$ | $\mathcal{A} = \Omega - 2\theta + 2\varpi'$ |
| 3e cas | $\Omega$ | $\mathcal{A}$ | $\mathcal{A} = \Omega + 2\theta - 2\varpi'$ |
| 4e cas | $\Omega$ | $\mathcal{B} - \theta'$ | $\mathcal{B} = \Omega + \theta$ |
| 5e cas | $\Omega$ | $\mathcal{B} - \theta'$ | $\mathcal{B} = \Omega - \theta + 2\varpi'$ |
| 6e cas | $\Omega$ | $\mathcal{B} + \theta'$ | $\mathcal{B} = \Omega - \theta$ |
| 7e cas | $\Omega$ | $\mathcal{B} + \theta'$ | $\mathcal{B} = \Omega + \theta - 2\varpi'$ |
| 8e cas | $\Psi + \theta'$ | $\mathcal{A}$ | $\mathcal{A} = \Psi + \theta$ |
| 9e cas | $\Psi + \theta'$ | $\mathcal{A}$ | $\mathcal{A} = \Psi - \theta + 2\varpi'$ |
| 10e cas | $\Psi - \theta'$ | $\mathcal{A}$ | $\mathcal{A} = \Psi - \theta$ |
| 11e cas | $\Psi - \theta'$ | $\mathcal{A}$ | $\mathcal{A} = \Psi + \theta - 2\varpi'$ |
| 12e cas | $\Omega$ | $b - 2\theta'$ | $b = \Omega + 2\varpi'$ |
| 13e cas | $\Omega$ | $b + 2\theta'$ | $b = \Omega - 2\varpi'$ |
| 14e cas | $\psi + 2\theta'$ | $\mathcal{A}$ | $\mathcal{A} = \psi + 2\varpi'$ |
| 15e cas | $\psi - 2\theta'$ | $\mathcal{A}$ | $\mathcal{A} = \psi - 2\varpi''$ |
| 16e cas | $\Psi + \theta'$ | $\mathcal{B} + \theta'$ | $\mathcal{B} = \Psi$ |
| 17e cas | $\Psi - \theta'$ | $\mathcal{B} - \theta'$ | $\mathcal{B} = \Psi$ |
| 18e cas | $\Psi + \theta'$ | $\mathcal{B} - \theta'$ | $\mathcal{B} = \Psi + 2\varpi'$ |
| 19e cas | $\Psi - \theta'$ | $\mathcal{B} + \theta'$ | $\mathcal{B} = \Psi - 2\varpi'$ |

Voici maintenant la répartition entre ces dix-neuf cas des sept cent soixante-trois combinaisons propres à fournir des parties non périodiques dans la longitude moyenne de la Lune. Dans chaque colonne de ce tableau, les nombres de gauche sont les numéros des termes de R, et les nombres de droite sont les numéros des termes de $R_2$, qu'on doit leur associer.

*Tableau des 763 combinaisons réparties entre les 19 cas.*

| 1er *cas*. | 1er *cas* (suite). | 1er *cas* (suite). | 1er *cas* (suite). | 1er *cas* (suite). | 1er *cas* (suite). |
|---|---|---|---|---|---|
| 1, 1 | 23, 23 | 31, 31 | 76, 76 | 84, 84 | 92, 92 |
| 4, 4 | 24, 24 | 32, 32 | 77, 77 | 85, 85 | 93, 93 |
| 5, 5 | 25, 25 | 33, 33 | 78, 78 | 86, 86 | 94, 94 |
| 6, 6 | 26, 26 | 34, 34 | 79, 79 | 87, 87 | 95, 95 |
| 7, 7 | 27, 27 | 35, 35 | 80, 80 | 88, 88 | 96, 96 |
| 8, 8 | 28, 28 | 36, 36 | 81, 81 | 89, 89 | 97, 97 |
| 9, 9 | 29, 29 | 74, 74 | 82, 82 | 90, 90 | 98, 98 |
| 22, 22 | 30, 30 | 75, 75 | 83, 83 | 91, 91 | 99, 99 |

1$^{er}$ *cas* (suite).

| | |
|---|---|
| 100, | 100 |
| 101, | 101 |
| 102, | 102 |
| 103, | 103 |
| 104, | 104 |
| 105, | 105 |
| 190, | 190 |
| 191, | 191 |
| 192, | 192 |
| 193, | 193 |
| 194, | 194 |
| 195, | 195 |
| 196, | 196 |
| 197, | 197 |
| 198, | 198 |
| 199, | 199 |
| 200, | 200 |
| 201, | 201 |
| 202, | 202 |
| 203, | 203 |
| 204, | 204 |
| 205, | 205 |
| 206, | 206 |
| 207, | 207 |
| 208, | 208 |
| 209, | 209 |
| 210, | 210 |
| 211, | 211 |
| 212, | 212 |
| 213, | 213 |
| 214, | 214 |
| 215, | 215 |
| 216, | 216 |
| 217, | 217 |
| 218, | 218 |
| 219, | 219 |
| 220, | 220 |
| 221, | 221 |
| 222, | 222 |
| 223, | 223 |
| 224, | 224 |
| 225, | 225 |
| 226, | 226 |
| 227, | 227 |
| 228, | 228 |
| 229, | 229 |

1$^{er}$ *cas* (suite).

| | |
|---|---|
| 230, | 230 |
| 231, | 231 |
| 232, | 232 |
| 233, | 233 |
| 234, | 234 |
| 235, | 235 |
| 236, | 236 |
| 237, | 237 |
| 238, | 238 |
| 239, | 239 |
| 240, | 240 |
| 241, | 241 |
| 242, | 242 |
| 243, | 243 |
| 244, | 244 |
| 245, | 245 |
| 246, | 246 |
| 247, | 247 |

2$^e$ *cas*.

| | |
|---|---|
| 1, | 213 |
| 4, | 94 |
| 6, | 91 |
| 22, | 34 |
| 23, | 221 |
| 27, | 215 |
| 29, | 217 |
| 74, | 95 |
| 75, | 96 |
| 80, | 90 |
| 97, | 76 |
| 190, | 220 |
| 191, | 222 |
| 193, | 225 |
| 198, | 212 |
| 200, | 214 |
| 202, | 216 |
| 212, | 227 |
| 223, | 24 |
| 224, | 192 |
| 226, | 194 |
| 228, | 244 |
| 236, | 245 |
| 246, | 229 |

3$^e$ *cas*.

| | |
|---|---|
| 24, | 223 |
| 34, | 22 |
| 76, | 97 |
| 90, | 80 |
| 91, | 6 |
| 94, | 4 |
| 95, | 74 |
| 96, | 75 |
| 192, | 224 |
| 194, | 226 |
| 212, | 198 |
| 213, | 1 |
| 214, | 200 |
| 215, | 27 |
| 216, | 202 |
| 217, | 29 |
| 220, | 190 |
| 221, | 23 |
| 222, | 191 |
| 225, | 193 |
| 227, | 212 |
| 229, | 246 |
| 244, | 228 |
| 245, | 236 |

4$^e$ *cas*.

| | |
|---|---|
| 4, | 41 |
| 5, | 43 |
| 22, | 113 |
| 23, | 115 |
| 24, | 116 |
| 25, | 119 |
| 31, | 111 |
| 33, | 12 |
| 34, | 13 |
| 35, | 139 |
| 74, | 258 |
| 75, | 260 |
| 76, | 261 |
| 77, | 264 |
| 78, | 265 |
| 79, | 268 |
| 84, | 252 |
| 85, | 253 |
| 88, | 256 |

4$^e$ *cas* (suite).

| | |
|---|---|
| 90, | 45 |
| 91, | 46 |
| 92, | 47 |
| 93, | 48 |
| 94, | 49 |
| 95, | 50 |
| 96, | 51 |
| 98, | 304 |
| 99, | 305 |
| 100, | 302 |
| 101, | 307 |
| 212, | 121 |
| 213, | 122 |
| 214, | 123 |
| 215, | 124 |
| 216, | 125 |
| 217, | 126 |
| 218, | 127 |
| 219, | 128 |
| 220, | 129 |
| 221, | 130 |
| 222, | 131 |
| 225, | 134 |
| 227, | 137 |
| 244, | 141 |
| 245, | 143 |

5$^e$ *cas*.

| | |
|---|---|
| 1, | 122 |
| 4, | 49 |
| 6, | 46 |
| 7, | 271 |
| 8, | 273 |
| 9, | 275 |
| 22, | 13 |
| 23, | 130 |
| 27, | 124 |
| 29, | 126 |
| 74, | 50 |
| 75, | 51 |
| 77, | 286 |
| 80, | 45 |
| 86, | 279 |
| 90, | 296 |
| 97, | 261 |

5$^e$ *cas* (suite).

| | |
|---|---|
| 98, | 312 |
| 102, | 321 |
| 190, | 129 |
| 191, | 131 |
| 193, | 134 |
| 198, | 121 |
| 200, | 123 |
| 202, | 125 |
| 212, | 137 |
| 223, | 116 |
| 228, | 141 |
| 236, | 143 |

6$^e$ *cas*.

| | |
|---|---|
| 1, | 10 |
| 4, | 42 |
| 5, | 44 |
| 6, | 37 |
| 7, | 38 |
| 8, | 39 |
| 9, | 40 |
| 22, | 114 |
| 23, | 117 |
| 24, | 118 |
| 25, | 120 |
| 26, | 106 |
| 27, | 107 |
| 28, | 108 |
| 29, | 109 |
| 30, | 110 |
| 32, | 112 |
| 33, | 136 |
| 35, | 138 |
| 36, | 140 |
| 74, | 259 |
| 75, | 262 |
| 76, | 263 |
| 77, | 266 |
| 78, | 267 |
| 79, | 269 |
| 80, | 248 |
| 81, | 249 |
| 82, | 250 |
| 83, | 251 |
| 86, | 254 |

6$^e$ *cas* (suite).

| | |
|---|---|
| 87, | 255 |
| 89, | 257 |
| 90, | 292 |
| 91, | 293 |
| 92, | 294 |
| 93, | 295 |
| 97, | 52 |
| 98, | 300 |
| 99, | 301 |
| 100, | 306 |
| 101, | 303 |
| 102, | 308 |
| 103, | 309 |
| 104, | 310 |
| 105, | 311 |
| 223, | 132 |
| 224, | 133 |
| 226, | 135 |
| 246, | 142 |

7$^e$ *cas*.

| | |
|---|---|
| 4, | 282 |
| 24, | 132 |
| 34, | 114 |
| 76, | 52 |
| 78, | 288 |
| 84, | 277 |
| 90, | 248 |
| 91, | 37 |
| 94, | 42 |
| 95, | 259 |
| 96, | 262 |
| 99, | 316 |
| 192, | 133 |
| 194, | 135 |
| 213, | 10 |
| 215, | 107 |
| 217, | 109 |
| 221, | 117 |
| 229, | 142 |

8$^e$ *cas*.

| | |
|---|---|
| 10, | 1 |
| 37, | 6 |

8ᵉ *cas* (suite).

| | |
|---|---|
| 38, | 7 |
| 39, | 8 |
| 40, | 9 |
| 42, | 4 |
| 44, | 5 |
| 52, | 97 |
| 106, | 26 |
| 107, | 27 |
| 108, | 28 |
| 109, | 29 |
| 110, | 30 |
| 112, | 32 |
| 114, | 22 |
| 117, | 23 |
| 118, | 24 |
| 120, | 25 |
| 132, | 223 |
| 133, | 224 |
| 135, | 226 |
| 136, | 33 |
| 138, | 35 |
| 140, | 36 |
| 142, | 246 |
| 248, | 80 |
| 249, | 81 |
| 250, | 82 |
| 251, | 83 |
| 254, | 86 |
| 255, | 87 |
| 257, | 89 |
| 259, | 74 |
| 262, | 75 |
| 263, | 76 |
| 266, | 77 |
| 267, | 78 |
| 269, | 79 |
| 292, | 90 |
| 293, | 91 |
| 294, | 92 |
| 295, | 93 |
| 300, | 98 |
| 301, | 99 |
| 303, | 101 |
| 306, | 100 |
| 308, | 102 |
| 309, | 103 |
| 310, | 104 |
| 311, | 105 |

9ᵉ *cas*.

| | |
|---|---|
| 10, | 213 |
| 37, | 91 |
| 42, | 94 |
| 52, | 76 |
| 107, | 215 |
| 109, | 217 |
| 114, | 34 |
| 117, | 221 |
| 132, | 24 |
| 133, | 192 |
| 135, | 194 |
| 142, | 229 |
| 248, | 90 |
| 259, | 95 |
| 262, | 96 |
| 277, | 84 |
| 282, | 4 |
| 288, | 78 |
| 316, | 99 |

10ᵉ *cas*.

| | |
|---|---|
| 12, | 33 |
| 13, | 34 |
| 41, | 4 |
| 43, | 5 |
| 45, | 90 |
| 46, | 91 |
| 47, | 92 |
| 48, | 93 |
| 49, | 94 |
| 50, | 95 |
| 51, | 96 |
| 111, | 31 |
| 113, | 22 |
| 115, | 23 |
| 116, | 24 |
| 119, | 25 |
| 121, | 212 |
| 122, | 213 |
| 123, | 214 |
| 124, | 215 |
| 125, | 216 |
| 126, | 217 |
| 127, | 218 |
| 128, | 219 |
| 129, | 220 |
| 130, | 221 |
| 131, | 222 |
| 134, | 225 |
| 137, | 227 |
| 139, | 35 |
| 141, | 244 |
| 143, | 245 |
| 252, | 84 |
| 253, | 85 |
| 256, | 88 |
| 358, | 74 |
| 260, | 75 |
| 261, | 76 |
| 264, | 77 |
| 265, | 78 |
| 268, | 79 |
| 302, | 100 |
| 304, | 98 |
| 305, | 99 |
| 307, | 101 |

11ᵉ *cas*.

| | |
|---|---|
| 13, | 22 |
| 45, | 80 |
| 46, | 6 |
| 49, | 4 |
| 50, | 74 |
| 51, | 75 |
| 116, | 223 |
| 121, | 198 |
| 122, | 1 |
| 123, | 200 |
| 124, | 27 |
| 125, | 202 |
| 126, | 29 |
| 129, | 190 |
| 130, | 23 |
| 131, | 191 |
| 134, | 193 |
| 137, | 212 |
| 141, | 228 |
| 143, | 236 |
| 261, | 97 |
| 271, | 7 |
| 273, | 8 |
| 275, | 9 |
| 279, | 86 |
| 286, | 77 |
| 296, | 90 |
| 312, | 98 |
| 321, | 102 |

12ᵉ *cas*.

| | |
|---|---|
| 1, | 57 |
| 4, | 18 |
| 6, | 15 |
| 7, | 157 |
| 8, | 159 |
| 9, | 161 |
| 22, | 3 |
| 23, | 65 |
| 24, | 364 |
| 26, | 347 |
| 27, | 59 |
| 28, | 349 |
| 29, | 61 |
| 30, | 351 |
| 32, | 355 |
| 35, | 377 |
| 36, | 394 |
| 74, | 19 |
| 75, | 20 |
| 77, | 172 |
| 80, | 14 |
| 86, | 165 |
| 90, | 148 |
| 98, | 178 |
| 102, | 187 |
| 190, | 64 |
| 191, | 66 |
| 193, | 69 |
| 195, | 370 |
| 198, | 56 |
| 200, | 58 |
| 202, | 60 |
| 208, | 359 |
| 212, | 54 |
| 214, | 332 |
| 216, | 334 |
| 223, | 341 |
| 228, | 71 |
| 230, | 379 |
| 231, | 387 |
| 232, | 381 |
| 236, | 73 |
| 238, | 396 |
| 240, | 398 |

13ᵉ *cas*.

| | |
|---|---|
| 4, | 168 |
| 22, | 362 |
| 23, | 366 |
| 24, | 67 |
| 26, | 406 |
| 31, | 353 |
| 34, | 339 |
| 35, | 385 |
| 76, | 21 |
| 78, | 174 |
| 84, | 163 |
| 91, | 144 |
| 94, | 153 |
| 99, | 182 |
| 192, | 68 |
| 194, | 70 |
| 196, | 372 |
| 206, | 356 |
| 213, | 53 |
| 215, | 325 |
| 217, | 327 |
| 221, | 342 |
| 229, | 72 |
| 233, | 389 |

14ᵉ *cas*.

| | |
|---|---|
| 21, | 76 |
| 53, | 213 |
| 67, | 24 |
| 68, | 192 |
| 70, | 194 |
| 72, | 229 |
| 144, | 91 |
| 153, | 94 |
| 163, | 84 |
| 168, | 4 |
| 174, | 78 |
| 182, | 99 |
| 325, | 215 |
| 327, | 217 |
| 339, | 34 |
| 342, | 221 |
| 353, | 31 |
| 356, | 206 |
| 362, | 22 |
| 366, | 23 |
| 372, | 196 |
| 385, | 35 |
| 389, | 233 |
| 406, | 26 |

15ᵉ *cas*.

| | |
|---|---|
| 3, | 22 |
| 14, | 80 |
| 15, | 6 |
| 18, | 4 |
| 19, | 74 |
| 20, | 75 |
| 54, | 212 |
| 56, | 198 |
| 57, | 1 |
| 58, | 200 |
| 59, | 27 |
| 60, | 202 |
| 61, | 29 |
| 64, | 190 |
| 65, | 23 |
| 66, | 191 |
| 69, | 193 |
| 71, | 228 |
| 73, | 236 |
| 148, | 90 |
| 157, | 7 |
| 159, | 8 |

| 15e *cas* (suite). | 16e *cas* (suite). | 16e *cas* (suite). | 17e *cas* (suite). | 17e *cas* (suite). | 18e *cas* (suite). |
|---|---|---|---|---|---|
| 161, 9 | 109, 109 | 294, 294 | 125, 125 | 296, 296 | 266, 286 |
| 165, 86 | 110, 110 | 295, 295 | 126, 126 | 297, 297 | 277, 252 |
| 172, 77 | 112, 112 | 300, 300 | 127, 127 | 298, 298 | 282, 41 |
| 178, 98 | 114, 114 | 301, 301 | 128, 128 | 299, 299 | 288, 265 |
| 187, 102 | 117, 117 | 303, 303 | 129, 129 | 302, 302 | 292, 296 |
| 332, 214 | 118, 118 | 306, 306 | 130, 130 | 304, 304 | 300, 312 |
| 334, 216 | 120, 120 | 308, 308 | 131, 131 | 305, 305 | 308, 321 |
| 341, 223 | 132, 132 | 309, 309 | 134, 134 | 307, 307 | 316, 305 |
| 347, 26 | 133, 133 | 310, 310 | 137, 137 | 312, 312 | |
| 349, 28 | 135, 135 | 311, 311 | 139, 139 | 313, 313 | |
| 351, 30 | 136, 136 | 316, 316 | 141, 141 | 314, 314 | 19e *cas*. |
| 355, 32 | 138, 138 | 317, 317 | 143, 143 | 315, 315 | 13, 114 |
| 359, 208 | 140, 140 | 319, 319 | 252, 252 | 318, 318 | 41, 282 |
| 364, 24 | 142, 142 | | 253, 253 | 320, 320 | 45, 248 |
| 370, 195 | 248, 248 | | 256, 256 | 321, 321 | 46, 37 |
| 377, 35 | 249, 249 | 17e *cas*. | 258, 258 | 322, 322 | 49, 42 |
| 379, 230 | 250, 250 | 12, 12 | 260, 260 | 323, 323 | 50, 259 |
| 381, 232 | 251, 251 | 13, 13 | 261, 261 | | 51, 262 |
| 387, 231 | 254, 254 | 41, 41 | 264, 264 | | 116, 132 |
| 394, 36 | 255, 255 | 43, 43 | 265, 265 | 18e *cas*. | 122, 10 |
| 396, 238 | 257, 257 | 45, 45 | 268, 268 | 10, 122 | 124, 107 |
| 398, 240 | 259, 259 | 46, 46 | 270, 270 | 37, 46 | 126, 109 |
| | 262, 262 | 47, 47 | 271, 271 | 38, 271 | 130, 117 |
| | 263, 263 | 48, 48 | 272, 272 | 39, 273 | 252, 277 |
| 16e *cas*. | 266, 266 | 49, 49 | 273, 273 | 40, 275 | 261, 52 |
| 10, 10 | 267, 267 | 50, 50 | 274, 274 | 42, 49 | 265, 288 |
| 37, 37 | 269, 269 | 51, 51 | 275, 275 | 52, 261 | 271, 38 |
| 38, 38 | 277, 277 | 111, 111 | 276, 276 | 107, 124 | 273, 39 |
| 39, 39 | 280, 280 | 113, 113 | 278, 278 | 109, 126 | 275, 40 |
| 40, 40 | 282, 282 | 115, 115 | 279, 279 | 114, 13 | 279, 254 |
| 42, 42 | 285, 285 | 116, 116 | 281, 281 | 117, 130 | 286, 266 |
| 44, 44 | 288, 288 | 119, 119 | 283, 283 | 132, 116 | 296, 292 |
| 52, 52 | 289, 289 | 121, 121 | 284, 284 | 248, 45 | 305, 316 |
| 106, 106 | 291, 291 | 122, 122 | 286, 286 | 254, 279 | 312, 300 |
| 107, 107 | 292, 292 | 123, 123 | 287, 287 | 259, 50 | 321, 308 |
| 108, 108 | 293, 293 | 124, 124 | 290, 290 | 262, 51 | |

Nous allons donner maintenant, pour chacun des dix-neuf cas, les formules servant à calculer les parties non périodiques de $\delta_2 l$ correspondantes aux diverses combinaisons que ce cas comprend; mais il convient auparavant de définir quelques notations dont la signification sera la même dans toutes ces formules.

Lorsqu'un terme de la fonction perturbatrice sera considéré comme appartenant à $R_2$, nous représenterons son coefficient par $C + \overline{C}\gamma'^2$, ou par $C\gamma'$, ou par $C\gamma'^2$, suivant que l'argument aura l'une des trois formes $\mathcal{A}$, ou $\mathcal{B} \pm \theta'$, ou $\mathrm{b} \pm 2\theta'$. Pareillement, lorsqu'un terme de la fonction perturbatrice sera considéré comme appartenant à R, son coefficient sera représenté par $T + \overline{T}\gamma'^2$, ou par $T\gamma'$, ou par $T\gamma'^2$, selon que l'argument sera de l'une des trois formes $\Omega$, ou $\Psi \pm \theta'$, ou $\mathrm{b} \pm 2\theta'$.

Les lettres $m$, $m_1$, $m_2$, $m'$ continueront à désigner les multiplicateurs de $l$, $\varpi$, $\theta$, $l'$ dans l'argument $\mathcal{A}$, ou $\mathcal{B} \pm \theta'$, ou $\mathrm{b} \pm 2\theta'$ d'un terme de $R_2$ : on aura toujours

$$\mu = m(n + k^0) + m_1 j^0 + m_2 h^0 + m'n'.$$

Nous poserons [*]

$$\Upsilon = \frac{2}{a}\frac{dT}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2} - 1 + e^2}{a^2 e}\frac{dT}{de} - \frac{\gamma}{2a^2\sqrt{1-e^2}}\frac{dT}{d\gamma},$$

$$b = \frac{1}{n}\left(\frac{3}{2a}\Upsilon + \frac{d\Upsilon}{da}\right), \quad c = \frac{1}{n}\frac{d\Upsilon}{d\gamma}, \quad d = \frac{1}{n}\frac{d\Upsilon}{de}, \quad f = -\frac{1}{n}\Upsilon,$$

et pareillement

$$\overline{\Upsilon} = \frac{2}{a}\frac{d\overline{T}}{da} - \frac{\sqrt{1-e^2} - 1 + e^2}{a^2 e}\frac{d\overline{T}}{de} - \frac{\gamma}{2a^2\sqrt{1-e^2}}\frac{d\overline{T}}{d\gamma},$$

$$\overline{b} = \frac{1}{n}\left(\frac{3}{2a}\overline{\Upsilon} + \frac{d\overline{\Upsilon}}{da}\right), \quad \overline{c} = \frac{1}{n}\frac{d\overline{\Upsilon}}{d\gamma}, \quad \overline{d} = \frac{1}{n}\frac{d\overline{\Upsilon}}{de}, \quad \overline{f} = -\frac{1}{n}\overline{\Upsilon}.$$

Enfin nous ferons encore

$$g = -\frac{3m}{a^2}\frac{dT}{d\gamma}, \quad i = -\frac{3m}{a^2}\frac{dT}{de}, \quad r = -\frac{3m}{a^2}\frac{dT}{da} + \frac{6m}{a^3}T, \quad s = -\frac{3m}{a^2}T.$$

Cela posé, reprenons chacun des dix-neuf cas énumérés ci-dessus : calculons pour une combinaison quelconque de chacun d'eux, et con-

---

[*] La lettre $\Upsilon$ reçoit ici, et gardera dans la suite du Mémoire, une signification différente de celle qui lui a été attribuée p. 30.

formément aux indications déjà données, la partie non périodique de $\delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right)$ et celle de $\delta_1 S$; intégrons la première deux fois et la seconde une fois, puis ajoutons les résultats de ces intégrations. Nous obtiendrons ainsi la partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée. On laissera d'ailleurs de côté les termes constants ou proportionnels au temps, car ils peuvent être supposés compris dans la portion $l^0 = nt + \lambda^0$ de la longitude moyenne.

Nous allons écrire explicitement, pour chaque cas, les formules auxquelles on parvient en suivant cette marche; puis nous en ferons l'application aux diverses combinaisons que ce cas comprend.

*Premier cas.*

On prend dans R le terme $(T + \overline{T}\gamma'^2)\cos\Omega$, dans $R_2$ le terme $(C + \overline{C}\gamma'^2)\cos\mathcal{A}$, et on a $\mathcal{A} = \Omega$.

Soit

$$H = -\frac{1}{2\mu}[gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s(m_2U_0 + m_1V_0 + mW_0)] - \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{Z_0}{a},$$

$$H' = \tfrac{1}{2}[gK_2 + iM_2 + rP_2 + s(m_2L_2 + m_1N_2 + mQ_2)] + \frac{m}{2}s\Pi_2,$$

$$H''' = \tfrac{1}{2}[-gK_5 - iM_5 - rP_5 + s(m_2L_5 + m_1N_5 + mQ_5)] + \frac{m}{2}s\Pi_5,$$

$$H^{\text{IV}} = \tfrac{1}{2}[gK_6 + iM_6 + rP_6 - s(m_2L_6 + m_1N_6 + mQ_6)] - \frac{m}{2}s\Pi_6,$$

$$H^{\text{V}} = \tfrac{1}{2}[gK_7 + iM_7 + rP_7 + s(m_2L_7 + m_1N_7 + mQ_7)] + \frac{m}{2}s\Pi_7,$$

$$H^{\text{VI}} = \tfrac{1}{2}[gK_8 + iM_8 + rP_8 + s(m_2L_8 + m_1N_8 + mQ_8)] + \frac{m}{2}s\Pi_8,$$

$$\begin{aligned}\Phi' = {} & \tfrac{1}{2}(\mathcal{L}\mathcal{M}^{\text{IV}} + \mathcal{M}\mathcal{L}^{\text{IV}})\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 + H'_0 + \tfrac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{dH'''}{d\gamma}\right)_0 - \tfrac{1}{2}\mathcal{L}^{\text{IV}}H'''_0 \\ & + \tfrac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{dH^{\text{IV}}}{d\gamma}\right)_0 + \tfrac{1}{2}\mathcal{L}^{\text{IV}}H^{\text{IV}}_0 \\ & + \tfrac{1}{2}\mathcal{M}\left(\frac{dH^{\text{V}}}{d\gamma}\right)_0 - \tfrac{1}{2}\mathcal{M}^{\text{IV}}H^{\text{V}}_0 + \tfrac{1}{2}\mathcal{M}\left(\frac{dH^{\text{VI}}}{d\gamma}\right)_0 + \tfrac{1}{2}\mathcal{M}^{\text{IV}}H^{\text{VI}}_0,\end{aligned}$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\mu}[-cX_0 - dY_0 - bZ_0 + f(m_2U_0 + m_1V_0 + mW_0)] + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}f\frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma' = \frac{1}{2\mu}[-\bar{c}X_0 - \bar{d}Y_0 - \bar{b}Z_0 + \bar{f}(m_2U_0 + m_1V_0 + mW_0)] + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}\bar{f}\frac{Z_0}{a},$$
$$+ \tfrac{1}{2}[cK_3 + dM_3 + bP_3 + f(m_2L_3 + m_1N_3 + mQ_3)] + \frac{m}{2}f\Pi_3,$$

$$\Sigma'' = \tfrac{1}{2}[-cK_7 - dM_7 - bP_7 + f(m_2L_7 + m_1N_7 + mQ_7)] + \frac{m}{2}f\Pi_7,$$

$$\Sigma''' = \tfrac{1}{2}[-cK_8 - dM_8 - bP_8 + f(m_2L_8 + m_1N_8 + mQ_8)] + \frac{m}{2}f\Pi_8,$$

$$\Gamma = \tfrac{1}{4}\mathfrak{L}^2\left(\frac{d^2\Sigma}{d\gamma^2}\right)_0 + \mathfrak{N}\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0 - \tfrac{1}{4}\mathfrak{L}^{\text{IV}2}\Sigma_0 + \Sigma'_0 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\Sigma''}{d\gamma}\right)_0$$
$$- \tfrac{1}{2}\mathfrak{L}\left(\frac{d\Sigma'''}{d\gamma}\right)_0 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{L}^{\text{IV}}\Sigma''_0 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{L}^{\text{IV}}\Sigma'''_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée est

$$\delta_2 l = (\tfrac{1}{6}\Phi' + \tfrac{1}{3}\Gamma)(A^2 + B^2)t^3 \text{ [*]}.$$

---

[*] Le calcul semble d'abord donner, dans le $\delta_2 l$ correspondant au premier cas, un terme en $t^5$ : on trouve en effet dans $\delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right)$ un terme en $t^3$ qui peut s'écrire $(\mathfrak{N}^{\text{IV}}H_0 + H''_0)t^3$, en désignant par $H''$ l'expression

$$\tfrac{1}{2}[gK_4 + iM_4 + rP_4 + s(m_2L_4 + m_1N_4 + mQ_4)] + \frac{m}{2}s\Pi_4.$$

Mais on a (p. 55 et suiv.)

$$K_4 = \frac{1}{\mu}X_0\mathfrak{N}^{\text{IV}},\quad M_4 = \frac{1}{\mu}Y_0\mathfrak{N}^{\text{IV}},\quad P_4 = \frac{1}{\mu}Z_0\mathfrak{N}^{\text{IV}},\quad L_4 = \frac{1}{\mu}U_0\mathfrak{N}^{\text{IV}},$$
$$N_4 = \frac{1}{\mu}V_0\mathfrak{N}^{\text{IV}},\quad Q_4 = \frac{1}{\mu}W_0\mathfrak{N}^{\text{IV}},\quad \Pi_4 = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu}\frac{P_4}{a} = \frac{3}{2}\frac{n}{\mu^2}\frac{Z_0}{a}\mathfrak{N}^{\text{IV}};$$

il suit de là

$$H'' = \frac{1}{2\mu}[gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s(m_2U_0 + m_1V_0 + mW_0)]\mathfrak{N}^{\text{IV}} + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{Z_0}{a}\mathfrak{N}^{\text{IV}} = -\mathfrak{N}^{\text{IV}}H,$$

ou bien

$$\mathfrak{N}^{\text{IV}}H + H'' = 0,$$

et par conséquent, en faisant $\gamma = \gamma_0$,

$$\mathfrak{N}^{\text{IV}}H_0 + H''_0 = 0.$$

Ainsi ce terme en $t^3$ de $\delta_1\left(\frac{3J}{a^2}\right)$, qui aurait produit un terme en $t^5$ dans $\int \delta_2 n\, dt$, se réduit à zéro.

*Deuxième cas.*

On prend dans R le terme $(T + \overline{T}\gamma'^2)\cos\Omega$, dans $R_2$ le terme $(C + \overline{C}\gamma'^2)\cos\mathcal{A}$, et on a $\mathcal{A} = \Omega - 2\theta + 2\varpi'$.

Soit

$$H = -\frac{1}{2\mu}\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s[(m_2 + 2)U_0 + m_1 V_0 + mW_0]\} - \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{Z_0}{a},$$

$$H' = \tfrac{1}{2}\{gK_5 + iM_5 + rP_5 - s[(m_2 + 2)L_5 + m_1 N_5 + mQ_5]\} - \frac{m}{2}s\Pi_5,$$

$$H'' = \tfrac{1}{2}\{gK_8 + iM_8 + rP_8 + s[(m_2 + 2)L_8 + m_1 N_8 + mQ_8]\} + \frac{m}{2}s\Pi_8,$$

$$H''' = \tfrac{1}{2}\{-gK_{15} - iM_{15} - rP_{15} + s[(m_2 + 2)L_{15} + m_1 N_{15} + mQ_{15}]\} + \frac{m}{2}s\Pi_{15},$$

$$H^{\text{IV}} = \tfrac{1}{2}\{gK_{17} + iM_{17} + rP_{17} + s[(m_2 + 2)L_{17} + m_1 N_{17} + mQ_{17}]\} + \frac{m}{2}s\Pi_{17},$$

$$H^{\text{V}} = \tfrac{1}{2}\{-gK_{19} - iM_{19} - rP_{19} + s[(m_2 + 2)L_{19} + m_1 N_{19} + mQ_{19}]\} + \frac{m}{2}s\Pi_{19},$$

$$\Phi = -\tfrac{1}{4}\mathcal{L}^2\left(\frac{d^2H}{d\gamma^2}\right)_0 - \tfrac{1}{2}[\mathcal{R} + \mathcal{L}(2\mathcal{L}' + \mathcal{L}^{\text{IV}})]\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 + \tfrac{1}{2}[2\mathcal{R}' + \mathcal{R}^{\text{IV}} - \tfrac{1}{2}(2\mathcal{L}' + \mathcal{L}^{\text{IV}})^2]H_0 - \mathcal{L}\left(\frac{dH''}{d\gamma}\right)_0 - (2\mathcal{L}' + \mathcal{L}^{\text{IV}})H''_0 + H^{\text{V}}_0,$$

$$\Phi' = -\tfrac{1}{2}\mathcal{L}\mathfrak{M}\left(\frac{d^2H}{d\gamma^2}\right)_0 + \tfrac{1}{2}[\mathcal{S} + \mathcal{L}(2\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}^{\text{IV}}) - \mathfrak{M}(2\mathcal{L}' + \mathcal{L}^{\text{IV}})]\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 + \tfrac{1}{2}[2\mathcal{S}' + \mathcal{S}^{\text{IV}} + (2\mathcal{L}' + \mathcal{L}^{\text{IV}})(2\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}^{\text{IV}})]H_0 - \mathcal{L}\left(\frac{dH'}{d\gamma}\right)_0 - (2\mathcal{L}' + \mathcal{L}^{\text{IV}})H'_0 - \mathfrak{M}\left(\frac{dH''}{d\gamma}\right)_0 + (2\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}^{\text{IV}})H''_0 + H^{\text{IV}}_0,$$

$$\Phi'' = \tfrac{1}{4}\mathfrak{M}^2\left(\frac{d^2\mathrm{H}}{d\gamma^2}\right)_0 - \tfrac{1}{2}[\mathfrak{E} + \mathfrak{M}(2\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}^{\text{IV}})]\left(\frac{d\mathrm{H}}{d\gamma}\right)_0$$
$$+ \tfrac{1}{2}[2\mathfrak{E}' + \mathfrak{E}^{\text{IV}} + \tfrac{1}{2}(2\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}^{\text{IV}})^2]\mathrm{H}_0$$
$$+ \mathfrak{M}\left(\frac{d\mathrm{H}'}{d\gamma}\right)_0 - (2\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}^{\text{IV}})\mathrm{H}'_0 + \mathrm{H}'''_0,$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\mu}\{-c\mathrm{X}_0 - d\mathrm{Y}_0 - b\mathrm{Z}_0 + f[(m_2+2)\mathrm{U}_0 + m_1\mathrm{V}_0 + m\mathrm{W}_0]\}$$
$$+ \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}f\frac{\mathrm{Z}_0}{a},$$

$$\Sigma' = \tfrac{1}{2}\{\ c\mathrm{K}_5 + d\mathrm{M}_5 + b\mathrm{P}_5 + f[(m_2+2)\mathrm{L}_5 + m_1\mathrm{N}_5 + m\mathrm{Q}_5]\} + \frac{m}{2}f\Pi_5,$$

$$\Sigma'' = \tfrac{1}{2}\{-c\mathrm{K}_8 - d\mathrm{M}_8 - b\mathrm{P}_8 + f[(m_2+2)\mathrm{L}_8 + m_1\mathrm{N}_8 + m\mathrm{Q}_8]\} + \frac{m}{2}f\Pi_8,$$

$$\Sigma''' = \tfrac{1}{2}\{c\mathrm{K}_{17} + d\mathrm{M}_{17} + b\mathrm{P}_{17} - f[(m_2+2)\mathrm{L}_{17} + m_1\mathrm{N}_{17} + m\mathrm{Q}_{17}]\}$$
$$- \frac{m}{2}f\Pi_{17},$$

$$\Sigma^{\text{IV}} = \tfrac{1}{2}\{c\mathrm{K}_{19} + d\mathrm{M}_{19} + b\mathrm{P}_{19} + f[(m_2+2)\mathrm{L}_{19} + m_1\mathrm{N}_{19} + m\mathrm{Q}_{19}]\}$$
$$+ \frac{m}{2}f\Pi_{19},$$

$$\Gamma = \tfrac{1}{4}\mathfrak{L}^2\left(\frac{d^2\Sigma}{d\gamma^2}\right)_0 + \tfrac{1}{2}[\mathfrak{L}(\mathfrak{L}^{\text{IV}} + 2\mathfrak{L}') + \mathfrak{R}]\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0$$
$$+ [\tfrac{1}{4}(\mathfrak{L}^{\text{IV}} + 2\mathfrak{L}')^2 - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{R}^{\text{IV}} + 2\mathfrak{R}')]\Sigma_0 - \mathfrak{L}\left(\frac{d\Sigma''}{d\gamma}\right)_0 - (\mathfrak{L}^{\text{IV}} + 2\mathfrak{L}')\Sigma''_0 + \Sigma^{\text{IV}}_0,$$

$$\Gamma' = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{L}\mathfrak{M}\left(\frac{d^2\Sigma}{d\gamma^2}\right)_0 + \tfrac{1}{2}[\mathfrak{L}(\mathfrak{M}^{\text{IV}} + 2\mathfrak{M}') - \mathfrak{M}(\mathfrak{L}^{\text{IV}} + 2\mathfrak{L}') + \mathfrak{S}]\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0$$
$$+ [\tfrac{1}{2}(\mathfrak{L}^{\text{IV}} + 2\mathfrak{L}')(\mathfrak{M}^{\text{IV}} + 2\mathfrak{M}') + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{S}^{\text{IV}} + 2\mathfrak{S}')]\Sigma_0 - \mathfrak{L}\left(\frac{d\Sigma'}{d\gamma}\right)_0$$
$$- (\mathfrak{L}^{\text{IV}} + 2\mathfrak{L}')\Sigma'_0 + \mathfrak{M}\left(\frac{d\Sigma''}{d\gamma}\right)_0 - (\mathfrak{M}^{\text{IV}} + 2\mathfrak{M}')\Sigma''_0 + \Sigma'''_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera (*voir* p. 49 la signification de $\mathrm{A}'_1$ et de $\mathrm{B}'_1$)

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi\mathrm{B}'_1 t^4 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right)\mathrm{A}'_1 t^3 + \left(\frac{1}{2}\Phi'' + \frac{1}{2}\Gamma'\right)\mathrm{B}'_1 t^2.$$

*Troisième cas.*

On prend dans R le terme $(T + \overline{T}\gamma'^2)\cos\Omega$, dans $R_2$ le terme $(C + \overline{C}\gamma'^2)\cos\mathcal{A}$, et l'on a $\mathcal{A} = \Omega + 2\theta - 2\varpi'$.

Soit

$$H = \frac{1}{2\mu}\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s[m_2 - 2)U_0 + m_1V_0 + mW_0]\}$$
$$+ \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{Z_0}{a},$$

$$H' = \tfrac{1}{2}\{-gK_6 - iM_6 - rP_6 + s[(m_2 - 2)L_6 + m_1N_6 + mQ_6]\} + \frac{m}{2}s\Pi_6,$$

$$H'' = \tfrac{1}{2}\{gK_7 + iM_7 + rP_7 + s[(m_2 - 2)L_7 + m_1N_7 + mQ_7]\} + \frac{m}{2}s\Pi_7,$$

$$H''' = \tfrac{1}{2}\{gK_{16} + iM_{16} + rP_{16} - s[(m_2 - 2)L_{16} + m_1N_{16} + mQ_{16}]\}$$
$$- \frac{m}{2}s\Pi_{16},$$

$$H^{\text{IV}} = \tfrac{1}{2}\{gK_{18} + iM_{18} + rP_{18} + s[(m_2 - 2)L_{18} + m_1N_{18} + mQ_{18}]\}$$
$$+ \frac{m}{2}s\Pi_{18},$$

$$H^{\text{V}} = \tfrac{1}{2}\{gK_{20} + iM_{20} + rP_{20} - s[(m_2 - 2)L_{20} + m_1N_{20} + mQ_{20}]\}$$
$$- \frac{m}{2}s\Pi_{20},$$

$$\Phi = -\frac{1}{4}\mathcal{L}^2\left(\frac{d^2H}{d\gamma^2}\right)_0 - \frac{1}{2}[\mathcal{R} + \mathcal{L}(2\mathcal{L}' - \mathcal{L}^{\text{IV}})]\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0$$
$$+ \tfrac{1}{2}[2\mathcal{R}' - \mathcal{R}^{\text{IV}} - \tfrac{1}{2}(2\mathcal{L}' - \mathcal{L}^{\text{IV}})^2]H_0$$
$$- \mathcal{L}\left(\frac{dH''}{d\gamma}\right)_0 - (2\mathcal{L}' - \mathcal{L}^{\text{IV}})H''_0 + H^{\text{V}}_0,$$

$$\Phi' = -\frac{1}{2}\mathcal{L}\mathcal{M}\left(\frac{d^2H}{d\gamma^2}\right)_0 + \frac{1}{2}[\mathcal{S} + \mathcal{L}(2\mathcal{M}' - \mathcal{M}^{\text{IV}}) - \mathcal{M}(2\mathcal{L}' - \mathcal{L}^{\text{IV}})]\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0$$
$$+ \tfrac{1}{2}[2\mathcal{S}' - \mathcal{S}^{\text{IV}} + (2\mathcal{L}' - \mathcal{L}^{\text{IV}})(2\mathcal{M}' - \mathcal{M}^{\text{IV}})]H_0 - \mathcal{L}\left(\frac{dH'}{d\gamma}\right)_0$$
$$- (2\mathcal{L}' - \mathcal{L}^{\text{IV}})H'_0 - \mathcal{M}\left(\frac{dH''}{d\gamma}\right)_0 + (2\mathcal{M}' - \mathcal{M}^{\text{IV}})H''_0 + H^{\text{IV}}_0,$$

$$\Phi'' = \frac{1}{4}\mathfrak{M}^2\left(\frac{d^2 H}{d\gamma^2}\right)_0 - \frac{1}{2}[\mathfrak{C} + \mathfrak{M}(2\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}^{IV})]\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0$$
$$+ \tfrac{1}{2}[2\mathfrak{C}' - \mathfrak{C}^{IV} + \tfrac{1}{2}(2\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}^{IV})^2]H_0$$
$$+ \mathfrak{M}\left(\frac{dH'}{d\gamma}\right)_0 - (2\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}^{IV})H'_0 + H'''_0,$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\mu}\{-cX_0 - dY_0 - bZ_0 + f[(m_2 - 2)U_0 + m_1 V_0 + mW_0]\}$$
$$+ \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}f\frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma' = \tfrac{1}{2}\{cK_6 + dM_6 + bP_6 + f[(m_2 - 2)L_6 + m_1 N_6 + mQ_6]\} + \frac{m}{2}f\Pi_6,$$

$$\Sigma'' = \tfrac{1}{2}\{-cK_7 - dM_7 - bP_7 + f[(m_2 - 2)L_7 + m_1 N_7 + mQ_7]\}$$
$$+ \frac{m}{2}f\Pi_7,$$

$$\Sigma''' = \tfrac{1}{2}\{-cK_{18} - dM_{18} - bP_{18} + f[(m_2 - 2)L_{18} + m_1 N_{18} + mQ_{18}]\}$$
$$+ \frac{m}{2}f\Pi_{18},$$

$$\Sigma^{IV} = \tfrac{1}{2}\{cK_{20} + dM_{20} + bP_{20} + f[(m_2 - 2)L_{20} + m_1 N_{20} + mQ_{20}]\}$$
$$+ \frac{m}{2}f\Pi_{20},$$

$$\Gamma = \frac{1}{4}\mathfrak{L}^2\left(\frac{d^2\Sigma}{d\gamma^2}\right)_0 + \frac{1}{2}[-\mathfrak{L}(\mathfrak{L}^{IV} - 2\mathfrak{L}') + \mathfrak{R}]\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0$$
$$+ [\tfrac{1}{4}(\mathfrak{L}^{IV} - 2\mathfrak{L}')^2 + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{R}^{IV} - 2\mathfrak{R}')]\Sigma_0$$
$$+ \mathfrak{L}\left(\frac{d\Sigma''}{d\gamma}\right)_0 - (\mathfrak{L}^{IV} - 2\mathfrak{L}')\Sigma''_0 + \Sigma^{IV}_0,$$

$$\Gamma' = -\frac{1}{2}\mathfrak{L}\mathfrak{M}\left(\frac{d^2\Sigma}{d\gamma}\right)_0 + \frac{1}{2}[-\mathfrak{L}(\mathfrak{M}^{IV} - 2\mathfrak{M}') + \mathfrak{M}(\mathfrak{L}^{IV} - 2\mathfrak{L}') + \mathfrak{S}]\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0$$
$$+ [\tfrac{1}{2}(\mathfrak{L}^{IV} - 2\mathfrak{L}')(\mathfrak{M}^{IV} - 2\mathfrak{M}') - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{S}^{IV} - 2\mathfrak{S}')]\Sigma_0$$
$$- \mathfrak{L}\left(\frac{d\Sigma'}{d\gamma}\right)_0 + (\mathfrak{L}^{IV} - 2\mathfrak{L}')\Sigma'_0$$
$$- \mathfrak{M}\left(\frac{d\Sigma''}{d\gamma}\right)_0 - (\mathfrak{M}^{IV} - 2\mathfrak{M}')\Sigma''_0 + \Sigma'''_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi B'_1 t^4 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right)A'_1 t^3 + \left(\frac{1}{2}\Phi'' + \frac{1}{2}\Gamma'\right)B'_1 t^2.$$

*Quatrième cas.*

On prend dans R le terme $(T + \overline{T}\gamma'^2)\cos\Omega$, dans $R_2$ le terme $C\gamma'\cos(\vartheta - \theta')$, et l'on a $\vartheta = \Omega + \theta$.

Soient

$$H = \frac{1}{2\mu^2}\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s[(m_2 - 1)U_0 + m_1V_0 + mW_0]\} + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^3}s\frac{Z_0}{a},$$

$$H' = -\frac{1}{2\mu}\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s[(m_2 - 1)U_0 + m_1V_0 + mW_0]\} - \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{Z_0}{a},$$

$$H'' = \frac{1}{2}\{gK_2 + iM_2 + rP_2 + s[(m_2 - 1)L_2 + m_1N_2 + mQ_2]\} + \frac{m}{2}s\Pi_2,$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 + \frac{1}{2}(\mathcal{L}' - \mathcal{L}^{\text{IV}})H_0 + \frac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\frac{dH'}{d\gamma}\right)_0 - \frac{1}{2}(\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}^{\text{IV}})H'_0 + H''_0,$$

$$\Sigma' = \frac{1}{2\mu}\{cX_0 + dY_0 + bZ_0 - f[(m_2 - 1)U_0 + m_1V_0 + mW_0]\} - \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}f\frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma'' = \frac{1}{2}\{cK_3 + dM_3 + bP_3 + f[(m_2 - 1)L_3 + m_1N_3 + mQ_3]\} + \frac{m}{2}f\Pi_3,$$

$$\Gamma = -\frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{d\Sigma'}{d\gamma}\right)_0 - \frac{1}{2}(\mathcal{L}' - \mathcal{L}^{\text{IV}})\Sigma'_0 + \Sigma''_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \left(\frac{1}{6}\Phi + \frac{1}{3}\Gamma\right)(A^2 + B^2)t^3.$$

*Cinquième cas.*

On prend dans R le terme $(T + \overline{T}\gamma'^2)\cos\Omega$, dans $R_2$ le terme $C\gamma'\cos(\vartheta - \theta')$, et l'on a $\vartheta = \Omega - \theta + 2\varpi'$.

Soient

$$H = -\frac{1}{2\mu^2}\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s[(m+1)U_0 + m_1 V_0 + mW_0]\} - \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^3}s\frac{Z_0}{a},$$

$$H' = -\frac{1}{2\mu}\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s[(m+1)U_0 + m_1 V_0 + mW_0]\} - \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{Z_0}{a},$$

$$H'' = \tfrac{1}{2}\{-gK_4 - iM_4 - rP_4 + s[(m_2+1)L_4 + m_1 N_4 + mQ_4]\} + \frac{m}{2}s\Pi_4,$$

$$H''' = \tfrac{1}{2}\{gK_5 + iM_5 + rP_5 + s[(m_2+1)L_5 + m_1 N_5 + mQ_5]\} + \frac{m}{2}s\Pi_5,$$

$$H^{\text{IV}} = \tfrac{1}{2}\{-gK_6 - iM_6 - rP_6 + s[(m_2+1)L_6 + m_1 N_6 + mQ_6]\} + \frac{m}{2}s\Pi_6,$$

$$\Phi = -\mathfrak{L}\left(\frac{dH'}{d\gamma}\right)_0 - (\mathfrak{L}' + \mathfrak{L}^{\text{IV}})H'_0 + H^{\text{IV}}_0,$$

$$\Phi' = -\mathfrak{L}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 - (\mathfrak{L}' + \mathfrak{L}^{\text{IV}})H_0 - \mathfrak{M}\left(\frac{dH'}{d\gamma}\right)_0 + (\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}^{\text{IV}})H'_0 + H'''_0,$$

$$\Phi'' = \mathfrak{M}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 - (\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}^{\text{IV}})H_0 + H''_0,$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\mu^2}\{-Xc_0 - dY_0 - bZ_0 + f[(m_2+1)U_0 + m_1 V_0 + mW_0]\} + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^3}f\frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma' = \frac{1}{2\mu}\{cX_0 + dY_0 + bZ_0 + f[(m_2+1)U_0 + m_1 V_0 + mW_0]\} - \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}f\frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma'' = \tfrac{1}{2}\{cK_5 + dM_5 + bP_5 - f[(m_2+1)L_5 + m_1N_5 + mQ_5]\} - \frac{m}{2} f\Pi_5,$$

$$\Sigma''' = \tfrac{1}{2}\{cK_6 + dM_6 + bP_6 + f[(m_2+1)L_6 + m_1N_6 + mQ_6]\} + \frac{m}{2} f\Pi_6,$$

$$\Gamma = -\mathcal{L}\left(\frac{d\Sigma'}{d\gamma}\right)_0 - (\mathcal{L}' + \mathcal{L}^{\text{IV}})\Sigma'_0 + \Sigma'''_0,$$

$$\Gamma' = -\mathcal{L}\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0 - (\mathcal{L}' + \mathcal{L}^{\text{IV}})\Sigma_0 + \mathfrak{M}\left(\frac{d\Sigma'}{d\gamma}\right)_0 - (\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}^{\text{IV}})\Sigma'_0 + \Sigma''_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi B'_1 t^4 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right) A'_1 t^2 + \left(\frac{1}{2}\Phi'' + \frac{1}{2}\Gamma'\right) B'_1 t^2.$$

## *Sixième cas.*

On prend dans R le terme $(T + \overline{T}\gamma'^2)\cos\Omega$, dans $R_2$ le terme $C\gamma'\cos(\vartheta + \theta')$, et l'on a $\vartheta = \Omega - \theta$.

Soient

$$H = \frac{1}{2\mu^2}\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s[(m_2+1)U_0 + m_1V_0 + mW_0]\} + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^3} s\frac{Z_0}{a},$$

$$H' = \frac{1}{2\mu}\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s[(m_2+1)U_0 + m_1V_0 + mW_0]\} + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2} s\frac{Z_0}{a},$$

$$H'' = \tfrac{1}{2}\{gK_2 + iM_2 + rP_2 + s[(m_2+1)L_2 + m_1N_2 + mQ_2]\} + \frac{m}{2} s\Pi_2,$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 + \frac{1}{2}(\mathcal{L}' + \mathcal{L}^{\text{IV}})H_0 + \frac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\frac{dH'}{d\gamma}\right)_0 - \frac{1}{2}(\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}^{\text{IV}})H'_0 + H''_0,$$

$$\Sigma' = -\frac{1}{2\mu}\{cX_0 + dY_0 + bZ_0 - f[(m_2+1)U_0 + m_1V_0 + mW_0]\}$$
$$+ \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2} f\frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma'' = \tfrac{1}{2}\{cK_3 + dM_3 + bP_3 + f[(m_2+1)L_3 + m_1N_3 + mQ_3]\} + \frac{m}{2} f\Pi_3,$$

$$\Gamma = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{d\Sigma'}{d\gamma}\right)_0 + \frac{1}{2}(\mathcal{L}' + \mathcal{L}^{\text{IV}})\Sigma'_0 + \Sigma''_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \left(\frac{1}{6}\Phi + \frac{1}{3}\Gamma\right)(A^2 + B^2)t^3.$$

*Septième cas.*

On prend dans R le terme $(T + \overline{T}\gamma'^2)\cos\Omega$, dans $R_2$ le terme $C\gamma'\cos(\vartheta + \theta')$, et l'on a $\vartheta = \Omega + \theta - 2\varpi'$.

Soient

$$\begin{aligned}
H &= -\frac{1}{2\mu^2}\left\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s[(m_2 - 1)U_0 + m_1 V_0 + mW_0]\right\} \\
&\quad - \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^3} s\frac{Z_0}{a}, \\
H' &= \frac{1}{2\mu}\left\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s[(m_2 - 1)U_0 + m_1 V_0 + mW_0]\right\} + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2} s\frac{Z_0}{a}, \\
H'' &= \frac{1}{2}\left\{gK_4 + iM_4 + rP_4 - s[(m_2 - 1)L_4 + m_1 N_4 + mQ_4]\right\} - \frac{m}{2} s\Pi_4, \\
H''' &= \frac{1}{2}\left\{gK_5 + iM_5 + rP_5 + s[(m_2 - 1)L_5 + m_1 N_5 + mQ_5]\right\} + \frac{m}{2} s\Pi_5, \\
H^{\text{IV}} &= \frac{1}{2}\left\{gK_6 + iM_3 + rP_6 - s[(m_2 - 1)L_6 + m_1 N_6 + mQ_6]\right\} - \frac{m}{2} s\Pi_6, \\
\Phi &= -\mathfrak{L}\left(\frac{dH'}{d\gamma}\right)_0 - (\mathfrak{L}' - \mathfrak{L}^{\text{IV}})H'_0 + H^{\text{IV}}_0, \\
\Phi' &= -\mathfrak{L}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 - (\mathfrak{L}' - \mathfrak{L}^{\text{IV}})H_0 - \mathfrak{M}\left(\frac{dH'}{d\gamma}\right)_0 + (\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}^{\text{IV}})H'_0 + H'''_0, \\
\Phi'' &= \mathfrak{M}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 - (\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}^{\text{IV}})H_0 + H''_0, \\
\Sigma &= \frac{1}{2\mu^2}\left\{cX_0 + dY_0 + bZ_0 - f[(m_2 - 1)U_0 + m_1 V_0 + mW_0]\right\} \\
&\quad - \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^3} f\frac{Z_0}{a}, \\
\Sigma' &= \frac{1}{2\mu}\left\{cX_0 + dY_0 + bZ_0 - f[(m_2 - 1)U_0 + m_1 V_0 + mW_0]\right\} \\
&\quad - \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2} f\frac{Z_0}{a},
\end{aligned}$$

$$\Sigma'' = -\tfrac{1}{2}\{cK_5 + dM_5 + bP_5 - f[(m_2-1)L_5 + m_1N_5 + mQ_5]\} + \frac{m}{2}f\Pi_5,$$

$$\Sigma''' = \tfrac{1}{2}\{cK_6 + dM_6 + bP_6 + f[(m_2-1)L_6 + m_1N_6 + mQ_6]\} + \frac{m}{2}f\Pi_6,$$

$$\Gamma = -\mathfrak{L}\left(\frac{d\Sigma'}{d\gamma}\right)_0 - (\mathfrak{L}' - \mathfrak{L}^{\text{IV}})\Sigma'_0 + \Sigma'''_0,$$

$$\Gamma' = -\mathfrak{L}\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0 - (\mathfrak{L}' - \mathfrak{L}^{\text{IV}})\Sigma_0 + \mathfrak{M}\left(\frac{d\Sigma'}{d\gamma}\right)_0 - (\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}^{\text{IV}})\Sigma'_0 + \Sigma''_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi B'_1 t^4 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right)A'_1 t^3 + \left(\frac{1}{2}\Phi'' + \frac{1}{2}\Gamma'\right)B'_1 t^2.$$

*Huitième cas.*

On prend dans R le terme $T\gamma'\cos(\Psi + \theta')$, dans $R_2$ le terme $(C + \overline{C}\gamma'^2)\cos\mathcal{A}$, et l'on a $\mathcal{A} = \Psi + \theta$.

Soient

$$H = -\frac{1}{2\mu}\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s[(m_2-1)U_0 + m_1V_0 + mW_0]\} - \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{Z_0}{a},$$

$$H' = \tfrac{1}{2}\{gK_6 + iM_6 + rP_6 - s[(m_2-1)L_6 + m_1N_6 + mQ_6]\} - \frac{m}{2}s\Pi_6,$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 - \frac{1}{2}(\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}^{\text{IV}})H_0 + H'_0,$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\mu}\{-cX_0 - dY_0 - bZ_0 + f[(m_2-1)U_0 + m_1V_0 + mW_0]\} + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}f\frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma' = \tfrac{1}{2}\{-cK_7 - dM_7 - bP_7 + f[(m_2-1)L_7 + m_1N_7 + mQ_7]\} + \frac{m}{2}f\Pi_7,$$

$$\Gamma = \frac{1}{2}\mathfrak{L}\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0 + \frac{1}{2}(\mathfrak{L}' - \mathfrak{L}^{\text{IV}})\Sigma_0 + \Sigma'_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \left(\frac{1}{6}\Phi + \frac{1}{3}\Gamma\right)(A^2 + B^2)t^3.$$

*Neuvième cas.*

On prend dans R le terme $T\gamma' \cos(\Psi + \theta')$, dans $R_2$ le terme $(C + \overline{C}\gamma'^2)\cos \mathcal{A}$, et l'on a $\mathcal{A} = \Psi - \theta + 2\varpi'$.

Soient

$$H = -\frac{1}{2\mu}\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s[(m_2 + 1)U_0 + m_1 V_0 + mW_0]\}$$
$$-\frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{Z_0}{a},$$

$$H' = -gK_5 - iM_5 - rP_5 + s[(m_2 + 1)L_5 + m_1 N_5 + mQ_5] + ms\Pi_5,$$

$$H'' = -gK_8 - iM_8 - rP_8 - s[(m_2 + 1)L_8 + m_1 N_8 + mQ_8] - ms\Pi_8,$$

$$\Phi = -\mathcal{L}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 - (\mathcal{L}' + \mathcal{L}^{\text{IV}})H_0 + H''_0,$$

$$\Phi' = -\mathfrak{M}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 + (\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}^{\text{IV}})H_0 + H'_0,$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\mu}\{-cX_0 - dY_0 - bZ_0 + f[(m_2 + 1)U_0 + m_1 V_0 + mW_0]\}$$
$$+\frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}f\frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma' = -cK_5 - dM_5 - bP_5 - f[(m_2 + 1)L_5 + m_1 N_5 + mQ_5] - mf\Pi_5,$$

$$\Sigma'' = cK_8 + dM_8 + bP_8 - f[(m_2 + 1)L_8 + m_1 N_8 + mQ_8] - mf\Pi_8,$$

$$\Gamma = \mathcal{L}\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0 + (\mathcal{L}' + \mathcal{L}^{\text{IV}})\Sigma_0 + \Sigma''_0,$$

$$\Gamma' = -\mathfrak{M}\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0 + (\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}^{\text{IV}})\Sigma_0 + \Sigma'_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi B'_1 t^4 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right) A'_1 t^3 + \frac{1}{2}\Gamma' B'_1 t^2.$$

*Dixième cas.*

On prend dans R le terme $T\gamma' \cos(\Psi - \theta')$, dans $R_2$ le terme $(C + \overline{C}\gamma'^2)\cos \mathcal{A}$, et l'on a $\mathcal{A} = \Psi - \theta$.

Soient

$$H = \frac{1}{2\mu}\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s[(m_2+1)U_0 + m_1 V_0 + mW_0)\} + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{Z_0}{a},$$

$$H' = \frac{1}{2}\{-gK_5 - iM_5 - rP_5 + s[(m_2+1)L_5 + m_1 N_5 + mQ_5]\} + \frac{m}{2}s\Pi_5,$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 - \frac{1}{2}(\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}^{\text{IV}})H_0 + H'_0,$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\mu}\{-cX_0 - dY_0 - bZ_0 + f[(m_2+1)U_0 + m_1 V_0 + mW_0]\}$$
$$+ \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}f\frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma' = \frac{1}{2}\{cK_8 + dM_8 + bP_8 - f[(m_2+1)L_8 + m_1 N_8 + mQ_8]\} - \frac{m}{2}f\Pi_8,$$

$$\Gamma = \frac{1}{2}\mathfrak{L}\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0 + \frac{1}{2}(\mathfrak{L}' + \mathfrak{L}^{\text{IV}})\Sigma_0 + \Sigma'_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \left(\frac{1}{6}\Phi + \frac{1}{3}\Gamma\right)(A^2 + B^2)t^3.$$

*Onzième cas.*

On prend dans R le terme $T\gamma'\cos(\Psi - \theta')$, dans $R_2$ le terme $(C + \overline{C}\gamma'^2)\cos\mathcal{A}$, et l'on a $\mathcal{A} = \Psi + \theta - 2\varpi'$.

Soient

$$H = \frac{1}{2\mu}\{gX_0 + iY_0 + rZ_0 + s[(m_2-1)U_0 + m_1V_0 + mW_0]\} + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}s\frac{Z_0}{a},$$

$$H' = gK_6 + iM_6 + rP_6 - s[(m_2-1)L_6 + m_1N_6 + mQ_6] - ms\Pi_6,$$

$$H'' = -gK_7 - iM_7 - rP_7 - s[(m_2-1)L_7 + m_1N_7 + mQ_7] - ms\Pi_7,$$

$$\Phi = -\mathcal{L}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 - (\mathcal{L}' - \mathcal{L}^{\text{IV}})H_0 + H''_0,$$

$$\Phi' = -\mathfrak{M}\left(\frac{dH}{d\gamma}\right)_0 + (\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}^{\text{IV}})H_0 + H'_0,$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\mu}\{-cX_0 - dY_0 - bZ_0 + f[(m_2-1)U_0 + m_1V_0 + mW_0]\}$$
$$+ \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}f\frac{Z_0}{a},$$

$$\Sigma' = -cK_6 - dM_6 - bP_6 - f[(m_2-1)L_6 + m_1N_6 + mQ_6] - mf\Pi_6,$$

$$\Sigma'' = -cK_7 - dM_7 - bP_7 + f[(m_2-1)L_7 + m_1N_7 + mQ_7] + mf\Pi_7,$$

$$\Gamma = \mathcal{L}\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0 + (\mathcal{L}' - \mathcal{L}^{\text{IV}})\Sigma_0 + \Sigma''_0,$$

$$\Gamma' = -\mathfrak{M}\left(\frac{d\Sigma}{d\gamma}\right)_0 + (\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}^{\text{IV}})\Sigma_0 + \Sigma'_0.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi B'_1 t^4 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right)A'_1 t^3 + \frac{1}{2}\Gamma' B'_1 t^2.$$

*Douzième cas.*

On prend dans R le terme $(T + \overline{T}\gamma'^2)\cos\Omega$, dans $R_2$ le terme $C\gamma'^2\cos(b - 2\theta')$, et l'on a $b = \Omega + 2\varpi'$.

Soient

$$\Phi = \frac{1}{\mu}[g_0X_0 + i_0Y_0 + r_0Z_0 + s_0(m_2U_0 + m_1V_0 + mW_0)] + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2}s_0\frac{Z_0}{a},$$

$$\Phi' = \frac{2}{\mu^2}[g_0X_0 + i_0Y_0 + r_0Z_0 + s_0(m_2U_0 + m_1V_0 + mW_0)] + 6m\frac{n}{\mu^3}s_0\frac{Z_0}{a},$$

$$\Phi'' = -\frac{2}{\mu^3}[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)]$$
$$- 9m\frac{n}{\mu^4} s_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma = \frac{1}{\mu}[-c_0 X_0 - d_0 Y_0 - b_0 Z_0 + f_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)]$$
$$+ \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2} f_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma' = \frac{2}{\mu^2}[c_0 X_0 + d_0 Y_0 + b_0 Z_0 - f_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)]$$
$$- 6m\frac{n}{\mu^3} f_0 \frac{Z_0}{a}.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi B'_1 t^4 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right) A'_1 t^3 + \left(\frac{1}{2}\Phi'' + \frac{1}{2}\Gamma'\right) B'_1 t^2.$$

*Treizième cas.*

On prend dans R le terme $(T + \overline{T}\gamma'^2)\cos\Omega$, dans $R_2$ le terme $C\gamma'^2\cos(b + 2\theta')$, et l'on a $b = \Omega - 2\varpi'$.

Soient

$$\Phi = -\frac{1}{\mu}[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)]$$
$$- \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2} s_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Phi' = \frac{2}{\mu^2}[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] + 6m\frac{n}{\mu^3} s_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Phi'' = \frac{2}{\mu^3}[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] + 9m\frac{n}{\mu^4} s_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma = \frac{1}{\mu}[-c_0 X_0 - d_0 Y_0 - b_0 Z_0 + f_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)]$$
$$+ \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2} f_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma' = \frac{2}{\mu^2}[-c_0 X_0 - d_0 Y_0 - b_0 Z_0 + f_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)]$$
$$+ 6m\frac{n}{\mu^3} f_0 \frac{Z_0}{a}.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi B'_1 t^4 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right) A'_1 t^3 + \left(\frac{1}{2}\Phi'' + \frac{1}{2}\Gamma'\right) B'_1 t^2.$$

*Quatorzième cas.*

On prend dans R le terme $T\gamma'^2\cos(\psi + 2\theta')$, dans $R_2$ le terme $(C + \bar{C}\gamma'^2)\cos\mathcal{A}$, et on a $\mathcal{A} = \psi + 2\varpi'$.

Soient

$$\Phi = \frac{1}{\mu}[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2} s_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma = \frac{1}{\mu}[-c_0 X_0 - d_0 Y_0 - b_0 Z_0 + f_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2} f_0 \frac{Z_0}{a}.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi B'_1 t^4 + \frac{1}{3}\Gamma A'_1 t^3.$$

*Quinzième cas.*

On prend dans R le terme $T\gamma'^2\cos(\psi - 2\theta')$, dans $R_2$ le terme $(C + \bar{C}\gamma'^2)\cos\mathcal{A}$, et on a $\mathcal{A} = \psi - 2\varpi'$.

Soient

$$\Phi = -\frac{1}{\mu}[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] - \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2} s_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma = \frac{1}{\mu}[-c_0 X_0 - d_0 Y_0 - b_0 Z_0 + f_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2} f_0 \frac{Z_0}{a}.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi B'_1 t^4 + \frac{1}{3}\Gamma A'_1 t^3.$$

*Seizième cas.*

On prend dans R le terme $T\gamma'\cos(\Psi + \theta')$, dans $R_2$ le terme $C\gamma'\cos(\vartheta + \theta')$, et on a $\vartheta = \Psi$.

Soient

$$\Phi = \frac{1}{2\mu^2}[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^3}s_0\frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma = \frac{1}{2\mu}[-c_0 X_0 - d_0 Y_0 - b_0 Z_0 + f_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}f_0\frac{Z_0}{a}.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \left(\frac{1}{6}\Phi + \frac{1}{3}\Gamma\right)(A^2 + B^2)t^3.$$

*Dix-septième cas.*

On prend dans R le terme $T\gamma'\cos(\Psi - \theta')$, dans $R_2$ le terme $C\gamma'\cos(\vartheta - \theta')$, et on a $\vartheta = \Psi$.

Soient

$$\Phi = \frac{1}{2\mu^2}[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^3}s_0\frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma = \frac{1}{2\mu}[-c_0 X_0 - d_0 Y_0 - b_0 Z_0 + f_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] + \frac{3m}{4}\frac{n}{\mu^2}f_0\frac{Z_0}{a}.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \left(\frac{1}{6}\Phi + \frac{1}{3}\Gamma\right)(A^2 + B^2)t^3.$$

*Dix-huitième cas.*

On prend dans R le terme $T\gamma'\cos(\Psi + \theta')$, dans $R_2$ le terme $C\gamma'\cos(\vartheta - \theta')$, et on a $\vartheta = \Psi + 2\varpi'$.

Soient

$$\Phi = \frac{1}{\mu}[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2} s_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Phi' = \frac{1}{\mu^2}[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] + 3m\frac{n}{\mu^3} s_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma = \frac{1}{\mu}[-c_0 X_0 - d_0 Y_0 - b_0 Z_0 + f_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2} f_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma' = \frac{1}{\mu^2}[c_0 X_0 + d_0 Y_0 + b_0 Z_0 - f_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] - 3m\frac{n}{\mu^3} f_0 \frac{Z_0}{a}.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi B'_1 t^4 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right) A'_1 t^3 + \frac{1}{2}\Gamma' B'_1 t^2.$$

*Dix-neuvième cas.*

On prend dans R le terme $T\gamma' \cos(\Psi - \theta')$, dans $R_2$ le terme $C\gamma' \cos(\vartheta + \theta')$, et on a $\vartheta = \Psi - 2\varpi'$.

Soient

$$\Phi = -\frac{1}{\mu}[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] - \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2} s_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Phi' = \frac{1}{\mu^2}[g_0 X_0 + i_0 Y_0 + r_0 Z_0 + s_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] + 3m\frac{n}{\mu^3} s_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma = \frac{1}{\mu}[-c_0 X_0 - d_0 Y_0 - b_0 Z_0 + f_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] + \frac{3m}{2}\frac{n}{\mu^2} f_0 \frac{Z_0}{a},$$

$$\Gamma' = \frac{1}{\mu^2}[-c_0 X_0 - d_0 Y_0 - b_0 Z_0 + f_0(m_2 U_0 + m_1 V_0 + m W_0)] + 3m\frac{n}{\mu^3} f_0 \frac{Z_0}{a}.$$

La partie non périodique de $\delta_2 l$ correspondante à la combinaison considérée sera

$$\delta_2 l = \frac{1}{12}\Phi B'_1 t^4 + \left(\frac{1}{6}\Phi' + \frac{1}{3}\Gamma\right) A'_1 t^3 + \frac{1}{2}\Gamma' B'_1 t^2.$$

Avant d'appliquer ces formules aux diverses combinaisons que comprennent les dix-neuf cas, faisons encore quelques remarques propres à simplifier l'écriture des résultats. Posons $\frac{n'}{n} = \alpha$; $\alpha$ sera une grandeur comparable aux quantités $e, e', \gamma, \sqrt{\frac{a}{a'}}$, et nous la regarderons comme étant aussi du premier degré. Ajoutons que le rapport $\frac{M}{m'}$ de la masse de la Terre à la masse du Soleil doit être considéré comme une quantité du quatrième degré; c'est ce qu'on peut exprimer en posant $\varepsilon = 1 - \omega^4$, $\omega$ étant du premier degré. Observons enfin que les parties cherchées de $\delta_2 l$, renfermant en facteur l'une des trois quantités $A^2 + B^2$, $A'_1$, $B'_1$, sont du second ordre, et qu'ainsi dans les valeurs de $h_0$, $h^0$, $j^0$, $k^0$ qui doivent y être substituées, on peut négliger les quantités du second ordre; nous pouvons donc écrire (*voir* pages 33, 34 et 35)

$$h_0 = h^0 = -\tfrac{3}{4} n\alpha^2[1 + (2)], \quad j^0 = \tfrac{3}{4} n\alpha^2[1 + (2)], \quad k^0 = -n\alpha^2[1 + (2)].$$

On voit aisément d'après cela que les diverses parties non périodiques de $\delta_2 l$ se présenteront sous l'une des quatre formes

$$n'^2 G B'_1 t^4, \quad n' G'(A^2 + B^2) t^3, \quad n' G'' A'_1 t^3, \quad G''' B'_1 t^4,$$

$G, G', G'', G'''$ désignant des polynômes à coefficients numériques ordonnés suivant les puissances de $\gamma_0, e, e', \sqrt{\frac{a}{a'}}, \omega$ : on reconnaît de plus que le degré d'approximation avec lequel nous avons calculé chaque terme du développement de R permet d'obtenir dans G les termes du cinquième degré, dans G' et dans G'' ceux du quatrième, dans G''' ceux du troisième.

Il sera donc inutile d'avoir égard aux combinaisons qui fourniraient dans $\delta_2 l$ des parties non périodiques où les polynômes $G, G', G'', G'''$ auraient tous leurs termes de degrés supérieurs respectivement aux nombres 5, 4, 4, 3. Ces combinaisons, qui ne donneraient que des termes négligeables, étant mises de côté, il nous en restera 160, et nous allons transcrire pour chacune de ces dernières la partie non périodique correspondante de $\delta_2 l$.

| DÉSIGNATION de la combinaison. | PARTIE NON PÉRIODIQUE CORRESPONDANTE DE $\delta_2 l$. |
|---|---|
| 1, 1 | $+\left(\frac{1191}{2}\alpha^2+\frac{1005}{16}\alpha^3\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 5, 5 | $+\frac{19}{2}\alpha^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 8, 8 | $+\left(-\frac{513}{8}\alpha^2-\frac{675}{4}\alpha^3\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 9, 9 | $+\left(\frac{19}{8}\alpha^2+\frac{25}{12}\alpha^3\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 31, 31 | $+\frac{825}{16}\alpha e^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 33, 33 | $-\frac{45}{32}\alpha^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 34, 34 | $+\left(-\frac{9}{8}\alpha+\frac{567}{2048}\alpha^3+18\alpha\gamma_0^2-\frac{51}{16}\alpha e^2+\frac{45}{8}\alpha e'^2\right)n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 94, 94 | $-\frac{9}{16}\alpha e'^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 95, 95 | $-\frac{147}{16}\alpha e'^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 1, 213 | $\left\{\begin{array}{l}+\left(-\frac{405}{64}-\frac{81}{8}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4\\+\left(\frac{135}{4}+54\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t^3\\+\left(\frac{135}{2}+108\alpha\right).e'^2B'_1t^2\end{array}\right.$ |
| 4, 94 | $\left\{\begin{array}{l}-\frac{27}{8}\alpha.n'\alpha e'^2A'_1t^3\\-\frac{27}{2}\alpha.e'^2B'_1t^2\end{array}\right.$ |
| 6, 91 | $\left\{\begin{array}{l}+\left(\frac{135}{64}+\frac{27}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4\\+\left(-\frac{45}{4}-9\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t^3\\+\left(-\frac{45}{2}-18\alpha\right).e'^2B'_1t^2\end{array}\right.$ |
| 22, 34 | $\left\{\begin{array}{l}+\frac{81}{16}\alpha.n'\alpha e'^2A'_1t^3\\+\frac{81}{4}\alpha.e'^2B'_1t^2\end{array}\right.$ |

| DÉSIGNATION de la combinaison. | PARTIE NON PÉRIODIQUE CORRESPONDANTE DE $\delta_2 l$. |
|---|---|
| 23, 221 | $\left\{\begin{aligned} &+\left(\frac{9}{32}-\frac{9}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4\\ &+\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t^3\\ &+(-3+3\alpha).e'^2B'_1t^2\end{aligned}\right.$ |
| 27, 215 | $\left\{\begin{aligned} &+\left(-\frac{243}{64}-\frac{243}{64}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4\\ &+\left(\frac{81}{4}+\frac{81}{4}\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t^3\\ &+\left(\frac{81}{2}+\frac{81}{2}\alpha\right).e'^2B'_1t^2\end{aligned}\right.$ |
| 29, 217 | $\left\{\begin{aligned} &+\left(\frac{27}{64}+\frac{9}{64}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4\\ &+\left(-\frac{9}{4}-\frac{3}{4}\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t^3\\ &+\left(-\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\alpha\right).e'^2B'_1t^2\end{aligned}\right.$ |
| 75, 96 | $\left\{\begin{aligned} &+\left(-\frac{27}{32}+\frac{27}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4\\ &+\left(\frac{9}{2}-9\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t^3\\ &+(9-18\alpha).e'^2B'_1t^2\end{aligned}\right.$ |
| 97, 76 | $\left\{\begin{aligned} &+\left(-\frac{27}{32}-\frac{27}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4\\ &+\left(\frac{9}{2}+9\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t^3\\ &+(9+18\alpha).e'^2B'_1t^2\end{aligned}\right.$ |
| 223, 24 | $\left\{\begin{aligned} &+\left(\frac{9}{32}+\frac{9}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4\\ &+\left(-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t^3\\ &+(-3-3\alpha).e'^2B'_1t^2\end{aligned}\right.$ |
| 24, 223 | $\left\{\begin{aligned} &+\left(-\frac{9}{2}-\frac{9}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4\\ &+\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t^3\\ &+(3+3\alpha).e'^2B'_1t^2\end{aligned}\right.$ |

| DÉSIGNATION de la combinaison. | PARTIE NON PÉRIODIQUE CORRESPONDANTE DE $\delta_2 l$. |
|---|---|
| 34, 22 | $\left\{\begin{array}{l} +\frac{81}{16}\alpha.n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ +\frac{81}{4}\alpha.e'^2 B'_1 t^2 \end{array}\right.$ |
| 76, 97 | $\left\{\begin{array}{l} +\left(\frac{27}{32}+\frac{27}{16}\alpha\right) n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4 \\ +\left(-\frac{9}{2}-9\alpha\right).n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ +(-9-18\alpha).e'^2 B'_1 t^2 \end{array}\right.$ |
| 91, 6 | $\left\{\begin{array}{l} +\left(-\frac{135}{64}-\frac{27}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4 \\ +\left(\frac{45}{4}+9\alpha\right).n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ +\left(\frac{45}{2}+18\alpha\right).e'^2 B'_1 t^2 \end{array}\right.$ |
| 94, 4 | $\left\{\begin{array}{l} -\frac{27}{8}\alpha.n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ -\frac{27}{2}\alpha.e'^2 B'_1 t^2 \end{array}\right.$ |
| 96, 75 | $\left\{\begin{array}{l} +\left(\frac{27}{32}-\frac{27}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4 \\ +\left(-\frac{9}{2}+9\alpha\right).n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ +(-9+18\alpha).e'^2 B'_1 t^2 \end{array}\right.$ |
| 213, 1 | $\left\{\begin{array}{l} +\left(\frac{405}{64}+\frac{81}{8}\alpha\right).n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4 \\ +\left(-\frac{135}{4}-54\alpha\right).n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ +\left(-\frac{135}{2}-108\alpha\right).e'^2 B'_1 t^2 \end{array}\right.$ |
| 215, 27 | $\left\{\begin{array}{l} +\left(\frac{243}{64}+\frac{243}{64}\alpha\right).n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4 \\ +\left(-\frac{81}{4}-\frac{81}{4}\alpha\right).n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ +\left(-\frac{81}{2}-\frac{81}{2}\alpha\right).e'^2 B'_1 t^2 \end{array}\right.$ |

| DÉSIGNATION de la combinaison. | PARTIE NON PÉRIODIQUE CORRESPONDANTE DE $\delta_2 l$. |
|---|---|
| 217, 29 | $\left\{\begin{array}{l} +\left(-\frac{27}{64}-\frac{9}{64}\alpha\right).n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4 \\ +\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\alpha\right).n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ +\left(\frac{9}{2}+\frac{3}{2}\alpha\right).e'^2 B'_1 t^2 \end{array}\right.$ |
| 221, 23 | $\left\{\begin{array}{l} +\left(-\frac{9}{32}+\frac{9}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4 \\ +\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\alpha\right).n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ +(3-3\alpha).e'^2 B'_1 t^2 \end{array}\right.$ |
| 4, 41 | $-\frac{81}{16}\alpha e'^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 5, 43 | $+\left(-1-5\alpha^2+14\gamma_0^2-\frac{3}{2}e^2-\frac{3}{2}e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 23, 115 | $+\left(-\frac{9}{4}e'^2+\frac{9}{4}\alpha e'^2\right).n\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 24, 116 | $+\left(-\frac{9}{4}e'^2-\frac{9}{4}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 25, 119 | $-\frac{1}{4}e^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 31, 111 | $-\frac{225}{8}\alpha e^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 33, 12 | $+\left(\frac{3}{2}+\frac{21}{8}\alpha^2+24\gamma_0^2-\frac{39}{4}e^2+\frac{9}{4}e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 34, 13 | $+\left(\frac{9}{8}\alpha-\frac{27}{256}\alpha^2-\frac{405}{2048}\alpha^3\right.$ $\left.-\frac{117}{8}\alpha\gamma_0^2+\frac{51}{16}\alpha e^2-\frac{45}{8}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 90, 45 | $+\left(\frac{27}{8}e'^2-\frac{27}{16}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 91, 46 | $+\left(\frac{27}{8}e'^2+\frac{27}{16}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 92, 47 | $+\left(\frac{27}{2}e^2-54\gamma_0^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 93, 48 | $+\left(\frac{3}{2}e^2+6\gamma_2^0\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |

| DÉSIGNATION de la combinaison. | PARTIE NON PÉRIODIQUE CORRESPONDANTE DE $\delta_2 l$. |
|---|---|
| 94, 49 | $+\frac{9}{16}\alpha e'^2 . n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 95, 50 | $+\frac{147}{16}\alpha e'^2 . n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 96, 51 | $+\left(\frac{3}{2}e^2+6\gamma_0^2-3\alpha e^2-12\alpha\gamma_0^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 1, 122 | $+\left(\frac{243}{16}+\frac{729}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4$ |
| | $+\left(-\frac{81}{2}-\frac{243}{4}\alpha\right).n'\alpha e'^2 A'_1 t^3$ |
| 4, 49 | $+\frac{27}{8}\alpha . n'\alpha e'^2 A'_1 t^3$ |
| | $+\frac{27}{4}\alpha . e'^2 B'_1 t^2$ |
| 6, 46 | $+\left(-\frac{81}{16}-\frac{243}{64}\alpha\right).n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4$ |
| | $+\left(\frac{27}{2}+\frac{81}{8}\alpha\right).n'\alpha e'^2 A'_1 t^3$ |
| 8, 273 | $+\left(-\frac{729}{32}-\frac{729}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4$ |
| | $+\left(\frac{243}{4}+\frac{243}{2}\alpha\right).n'\alpha e'^2 A'_1 t^3$ |
| 9, 275 | $+\left(\frac{81}{32}+\frac{27}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4$ |
| | $+\left(-\frac{27}{4}-\frac{9}{2}\alpha\right).n'\alpha e'^2 A'_1 t^3$ |
| 22, 13 | $-\frac{81}{16}\alpha . n'\alpha e'^2 A'_1 t^3$ |
| | $-\frac{81}{8}\alpha . e'^2 B'_1 t^2$ |
| 23, 130 | $+\left(-\frac{9}{16}+\frac{9}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4$ |
| | $+\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\alpha\right).n'\alpha e'^2 A'_1 t^3$ |
| 27, 124 | $+\left(\frac{243}{32}+\frac{243}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4$ |
| | $+\left(-\frac{81}{4}-\frac{81}{4}\alpha\right).n'\alpha e'^2 A'_1 t^3$ |

| DÉSIGNATION de la combinaison. | PARTIE NON PÉRIODIQUE CORRESPONDANTE DE $\delta_2 l$. |
|---|---|
| 29, 126 | $\left\{\begin{array}{l} +\left(-\frac{27}{32}-\frac{9}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4 \\ +\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t^3\end{array}\right.$ |
| 75, 51 | $\left\{\begin{array}{l} +\left(\frac{27}{16}-\frac{27}{8}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4 \\ +\left(-\frac{9}{2}+9\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t^3\end{array}\right.$ |
| 1, 10 | $+\left(9+\frac{27}{2}\alpha+\frac{123}{16}\alpha^2-27\gamma_0^2-\frac{225}{4}e^2-\frac{117}{2}e'^2 + \frac{213}{16}\alpha^3-45\alpha\gamma_0^2-\frac{351}{4}\alpha e^2-\frac{351}{4}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 4, 42 | $+\frac{81}{16}\alpha e'^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 5, 44 | $+\left(1-\frac{3}{2}\alpha^2-14\gamma_0^2-\frac{3}{2}e^2+\frac{3}{2}e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 6, 37 | $+\left(\frac{9}{4}e'^2+\frac{27}{16}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 7, 38 | $+\left(\frac{441}{4}e'^2+\frac{3969}{16}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 8, 39 | $+\left(-\frac{27}{2}-27\alpha-\frac{27}{2}\alpha^2+54\gamma_0^2+90e^2+\frac{351}{4}e'^2 + \frac{27}{4}\alpha^3+108\alpha\gamma_0^2+\frac{441}{2}\alpha e^2+\frac{351}{2}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 9, 40 | $+\left(\frac{3}{2}+\alpha+\frac{11}{12}\alpha^2-6\gamma_0^2-6e^2-\frac{39}{4}e'^2+\frac{49}{36}\alpha^3 -4\alpha\gamma_0^2+\frac{1}{2}\alpha e^2-\frac{13}{2}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 23, 117 | $+\left(\frac{9}{4}e'^2-\frac{9}{4}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 24, 118 | $+\left(\frac{9}{4}e'^2+\frac{9}{4}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 25, 120 | $+\frac{1}{4}e^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 27, 107 | $+\left(-\frac{27}{8}e'^2-\frac{27}{8}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 28, 108 | $+\left(-\frac{1323}{8}e'^2-\frac{3969}{8}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |

| DÉSIGNATION de la combinaison. | PARTIE NON PÉRIODIQUE CORRESPONDANTE DE $\delta_2 l$. |
|---|---|
| 29, 109 | $+\left(\frac{3}{8}e'^2+\frac{1}{8}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 30, 110 | $+\left(\frac{147}{8}e'^2+\frac{147}{8}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 32, 112 | $+(6e^2+3\alpha e^2).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 33, 136 | $+9\gamma_0^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 97, 52 | $+\left(\frac{3}{2}e^2-6\gamma_0^2+3\alpha e^2-12\alpha\gamma_0^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 24, 132 | $\left\{\begin{array}{l}+\left(\frac{9}{16}+\frac{9}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4\\+\left(-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\alpha\right).n'\alpha e'^2 A'_1 t^3\end{array}\right.$ |
| 34, 114 | $\left\{\begin{array}{l}-\frac{81}{16}\alpha.n'\alpha e'^2 A'_1 t^3\\-\frac{81}{8}\alpha.e'^2 B'_1 t^2\end{array}\right.$ |
| 76, 52 | $\left\{\begin{array}{l}+\left(-\frac{27}{16}-\frac{27}{8}\alpha\right).n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4\\+\left(\frac{9}{2}+9\alpha\right).n'\alpha e'^2 A'_1 t^3\end{array}\right.$ |
| 91, 37 | $\left\{\begin{array}{l}+\left(-\frac{27}{32}-\frac{27}{64}\alpha\right).n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4\\+\left(\frac{9}{4}+\frac{9}{8}\alpha\right).n'\alpha e'^2 A'_1 t^3\end{array}\right.$ |
| 94, 42 | $\left\{\begin{array}{l}+\frac{27}{8}\alpha.n'\alpha e'^2 A'_1 t^3\\+\frac{27}{4}\alpha.e'^2 B'_1 t^2\end{array}\right.$ |
| 213, 10 | $\left\{\begin{array}{l}+\left(\frac{81}{32}+\frac{81}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4\\+\left(-\frac{27}{4}-\frac{27}{4}\alpha\right).n'\alpha e'^2 A'_1 t^3\end{array}\right.$ |
| 10, 1 | $+\left(-9-\frac{27}{2}\alpha-\frac{693}{16}\alpha^2+27\gamma_0^2+\frac{225}{4}e^2+\frac{117}{2}e'^2\right.$ $\left.-\frac{297}{4}\alpha^3+45\alpha\gamma_0^2+\frac{351}{4}\alpha e^2+\frac{351}{4}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |

| DÉSIGNATION de la combinaison. | PARTIE NON PÉRIODIQUE CORRESPONDANTE DE $\delta_2 l$. |
|---|---|
| 37, 6 | $+\left(-\frac{9}{4}e'^2-\frac{27}{16}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 38, 7 | $+\left(-\frac{441}{4}e'^2-\frac{3969}{16}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 39, 8 | $+\left(\frac{27}{2}+27\alpha+\frac{621}{8}\alpha^2-54\gamma_0^2-90e^2-\frac{351}{4}e'^2\right.$ $\left.+162\alpha^3-108\alpha\gamma_0^2-\frac{441}{2}\alpha e^2-\frac{351}{2}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 40, 9 | $+\left(-\frac{3}{2}-\alpha-\frac{79}{24}\alpha^2+6\gamma_0^2+6e^2+\frac{39}{4}e'^2\right.$ $\left.-\frac{31}{9}\alpha^3+4\alpha\gamma_0^2-\frac{1}{2}\alpha e^2+\frac{13}{2}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 42, 4 | $+\frac{189}{32}\alpha e'^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 44, 5 | $+\left(-1-\frac{13}{4}\alpha^2+14\gamma_0^2+\frac{3}{2}e^2-\frac{3}{2}e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 52, 97 | $+\left(6\gamma_0^2-\frac{3}{2}e^2+12\alpha\gamma_0^2-3\alpha e^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 107, 27 | $+\left(\frac{27}{8}e'^2+\frac{27}{8}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 108, 28 | $+\left(\frac{1323}{8}e'^2+\frac{3969}{8}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 109, 29 | $+\left(-\frac{3}{8}e'^2-\frac{1}{8}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 110, 30 | $+\left(-\frac{147}{8}e'^2-\frac{147}{8}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 112, 32 | $+(-6e^2-3\alpha e^2).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 117, 23 | $+\left(-\frac{9}{4}e'^2+\frac{9}{4}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 118, 24 | $+\left(-\frac{9}{4}e'^2-\frac{9}{4}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 120, 25 | $-\frac{1}{4}e^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 136, 33 | $-9\gamma_0^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |

| DÉSIGNATION de la combinaison. | PARTIE NON PÉRIODIQUE CORRESPONDANTE DE $\delta_2 l$. |
|---|---|
| 10, 213 | $\left\{\begin{aligned} &+\left(-\frac{81}{32}-\frac{81}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2\mathrm{B}'_1t^4\\ &+\left(\frac{27}{4}+\frac{27}{4}\alpha\right).n'\alpha e'^2\mathrm{A}'_1t^3\end{aligned}\right.$ |
| 37, 91 | $\left\{\begin{aligned} &+\left(\frac{27}{32}+\frac{27}{64}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2\mathrm{B}'_1t^4\\ &+\left(-\frac{9}{4}-\frac{9}{8}\alpha\right).n'\alpha e'^2\mathrm{A}'_1t^3\end{aligned}\right.$ |
| 42, 94 | $\left\{\begin{aligned} &+\frac{63}{16}\alpha.n'\alpha e'^2\mathrm{A}'_1t^3\\ &+\frac{63}{8}\alpha.e'^2\mathrm{B}'_1t^2\end{aligned}\right.$ |
| 52, 76 | $\left\{\begin{aligned} &+\left(\frac{27}{16}+\frac{27}{8}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2\mathrm{B}'_1t^4\\ &+\left(-\frac{9}{2}-9\alpha\right).n'\alpha e'^2\mathrm{A}'_1t^3\end{aligned}\right.$ |
| 114, 34 | $\left\{\begin{aligned} &-\frac{189}{32}\alpha.n'\alpha e'^2\mathrm{A}'_1t^3\\ &-\frac{189}{16}\alpha.e'^2\mathrm{B}'_1t^2\end{aligned}\right.$ |
| 132, 24 | $\left\{\begin{aligned} &+\left(-\frac{9}{16}-\frac{9}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2\mathrm{B}'_1t^4\\ &+\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\alpha\right).n'\alpha e'^2\mathrm{A}'_1t^3\end{aligned}\right.$ |
| 12, 33 | $+\left(-\frac{3}{2}+\frac{15}{16}\alpha^2-24\gamma_0^2+\frac{39}{4}e^2-\frac{9}{4}e'^2\right).n'\alpha(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)t^2$ |
| 13, 34 | $+\left(\frac{21}{16}\alpha-\frac{189}{512}\alpha^2+\frac{189}{4096}\alpha^3-\frac{117}{8}\alpha\gamma_0^2+\frac{63}{16}\alpha e^2-\frac{105}{16}\alpha e'^2\right).n'\alpha(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)t$ |
| 41, 4 | $-\frac{189}{32}\alpha e'^2.n'\alpha(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)t^3$ |
| 43, 5 | $+\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2-14\gamma_0^2+\frac{3}{2}e^2+\frac{3}{2}e'^2\right).n'\alpha(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)t$ |
| 45, 90 | $+\left(-\frac{27}{8}e'^2+\frac{27}{16}\alpha e'^2\right).n'\alpha(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)t^3$ |
| 46, 91 | $+\left(-\frac{27}{8}e'^2-\frac{27}{16}\alpha e'^2\right).n'\alpha(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)t^3$ |

| DÉSIGNATION de la combinaison. | PARTIE NON PÉRIODIQUE CORRESPONDANTE DE $\delta_2 l$. |
|---|---|
| 47, 92 | $+\left(54\gamma_0^2 - \frac{27}{2}e^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 48, 93 | $+\left(-6\gamma_0^2 - \frac{3}{2}e^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 49, 94 | $+\frac{21}{32}\alpha e'^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 50, 95 | $+\frac{343}{32}\alpha e'^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 51, 96 | $+\left(-\frac{3}{2}e^2 - 6\gamma_0^2 + 3\alpha e^2 + 12\alpha\gamma_0^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 111, 31 | $-\frac{375}{16}\alpha e^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 115, 23 | $+\left(\frac{9}{4}e'^2 - \frac{9}{4}\alpha c'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 116, 24 | $+\left(\frac{9}{4}c'^2 + \frac{9}{4}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 119, 25 | $+\frac{1}{4}e^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 13, 22 | $\begin{cases} -\frac{189}{32}\alpha.n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ -\frac{189}{16}\alpha.e'^2 B'_1 t^2 \end{cases}$ |
| 46, 6 | $\begin{cases} +\left(\frac{81}{16} + \frac{243}{64}\alpha\right).n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4 \\ +\left(-\frac{27}{2} - \frac{81}{8}\alpha\right).n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \end{cases}$ |
| 49, 4 | $\begin{cases} +\frac{63}{16}\alpha.n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \\ +\frac{63}{8}\alpha.e'^2 B'_1 t^2 \end{cases}$ |
| 51, 75 | $\begin{cases} +\left(-\frac{27}{16} + \frac{27}{8}\alpha\right).n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4 \\ +\left(\frac{9}{2} - 9\alpha\right).n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \end{cases}$ |
| 122, 1 | $\begin{cases} +\left(-\frac{243}{16} - \frac{729}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4 \\ +\left(\frac{81}{2} + \frac{243}{4}\alpha\right).n'\alpha e'^2 A'_1 t^3 \end{cases}$ |

| DÉSIGNATION de la combinaison. | PARTIE NON PÉRIODIQUE CORRESPONDANTE DE $\delta_2 l$. |
|---|---|
| 124, 27 | $\left\{\begin{array}{l} +\left(-\frac{243}{32}-\frac{243}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4 \\ +\left(\frac{81}{4}+\frac{81}{4}\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t^3 \end{array}\right.$ |
| 126, 29 | $\left\{\begin{array}{l} +\left(\frac{27}{32}+\frac{9}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4 \\ +\left(-\frac{9}{4}-\frac{3}{4}\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t^3 \end{array}\right.$ |
| 130, 23 | $\left\{\begin{array}{l} +\left(\frac{9}{16}-\frac{9}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4 \\ +\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t^3 \end{array}\right.$ |
| 273, 8 | $\left\{\begin{array}{l} +\left(\frac{729}{32}+\frac{729}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4 \\ +\left(-\frac{243}{4}-\frac{243}{2}\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t^3 \end{array}\right.$ |
| 275, 9 | $\left\{\begin{array}{l} +\left(-\frac{81}{32}-\frac{27}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4 \\ +\left(\frac{27}{4}+\frac{9}{2}\alpha\right).n'\alpha e'^2A'_1t^3 \end{array}\right.$ |
| 1, 57 | $+\left(-\frac{567}{64}-\frac{405}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ |
| 6, 15 | $+\left(\frac{189}{64}+\frac{135}{64}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ |
| 8, 159 | $+\left(\frac{729}{64}+\frac{729}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ |
| 9, 161 | $+\left(-\frac{81}{64}-\frac{27}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ |
| 23, 65 | $+\left(\frac{9}{32}-\frac{9}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ |
| 27, 59 | $+\left(-\frac{243}{64}-\frac{243}{64}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ |
| 29, 61 | $+\left(\frac{27}{64}+\frac{9}{64}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ |
| 75, 20 | $+\left(-\frac{27}{32}+\frac{27}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ |

| DÉSIGNATION de la combinaison. | PARTIE NON PÉRIODIQUE CORRESPONDANTE DE $\delta_2 l$. |
|---|---|
| 24, 67 | $+\left(-\frac{9}{32}-\frac{9}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ |
| 76, 21 | $+\left(\frac{27}{32}+\frac{27}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ |
| 21, 76 | $+\left(-\frac{27}{32}-\frac{27}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ |
| 67, 24 | $+\left(\frac{9}{32}+\frac{9}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ |
| 15, 6 | $+\left(-\frac{189}{64}-\frac{135}{64}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ |
| 20, 75 | $+\left(\frac{27}{32}-\frac{27}{16}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ |
| 57, 1 | $+\left(\frac{567}{64}+\frac{405}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ |
| 59, 27 | $+\left(\frac{243}{64}+\frac{243}{64}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ |
| 61, 29 | $+\left(-\frac{27}{64}-\frac{9}{64}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ |
| 65, 23 | $+\left(-\frac{9}{32}+\frac{9}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ |
| 159, 8 | $+\left(-\frac{729}{64}-\frac{729}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ |
| 161, 9 | $+\left(\frac{81}{64}+\frac{27}{32}\alpha\right).n'^2\alpha^2e'^2B'_1t^4$ |
| 10, 10 | $+\left(-\frac{15}{8}\alpha^2-\frac{39}{16}\alpha^3\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 42, 42 | $-\frac{189}{32}\alpha e'^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 12, 12 | $-\frac{15}{8}\alpha^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 13, 13 | $+\left(-\frac{21}{16}\alpha+\frac{63}{128}\alpha^2-\frac{189}{1024}\alpha^3+\frac{45}{4}\alpha\gamma_0^2\right.$ $\left.-\frac{63}{16}\alpha e^2+\frac{105}{16}\alpha e'^2\right).n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 41, 41 | $+\frac{189}{32}\alpha e'^2.n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |

| DÉSIGNATION de la combinaison. | PARTIE NON PÉRIODIQUE CORRESPONDANTE DE $\delta_2 l$. |
|---|---|
| 49, 49 | $-\frac{21}{32}\alpha e'^2 . n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 50, 50 | $-\frac{343}{32}\alpha e'^2 . n'\alpha(A^2+B^2)t^3$ |
| 10, 122 | $+\left(\frac{81}{32}+\frac{81}{32}\alpha\right). n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4$ |
| 37, 46 | $+\left(-\frac{27}{32}-\frac{27}{64}\alpha\right). n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4$ |
| 42, 49 | $-\frac{63}{16}\alpha . n'\alpha e'^2 A'_1 t^3$ |
| 114, 13 | $+\frac{189}{32}\alpha . n'\alpha e'^2 A'_1 t^3$ |
| 13, 114 | $+\frac{189}{32}\alpha . n'\alpha e'^2 A'_1 t^3$ |
| 46, 37 | $+\left(\frac{27}{32}+\frac{27}{64}\alpha\right). n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4$ |
| 49, 42 | $-\frac{63}{16}\alpha . n'\alpha e'^2 A'_1 t^3$ |
| 122, 10 | $+\left(-\frac{81}{32}-\frac{81}{32}\alpha\right). n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4$ |

Si l'on rassemble dans ce tableau toutes les parties qui contiennent le facteur $B'_1 t^4$, on trouve qu'elles se détruisent deux à deux : le terme en $t^4$ dans $\delta_2 l$ est donc nul, ou du moins il est le produit de $n'^2\alpha^2 e'^2 B'_1 t^4$ par un facteur qui est au moins du second degré. Cela suffit pour conclure que ce terme est négligeable dans les limites des temps historiques.

On trouve également une somme nulle en additionnant toutes les parties du tableau précédent qui contiennent $A'_1 t^3$ : le terme de $\delta_2 l$ qui renferme $A'_1 t^3$ en facteur est donc nul, ou du moins il est le produit de $n'\alpha e'^2 A'_1 t^3$ par un facteur qui est au moins du second degré. On conclut de là que ce terme est encore négligeable.

Les parties qui renferment le facteur $(A^2+B^2)t^3$ ne se détruisent pas complétement; leur somme est $\left(\frac{7067}{1536}-\frac{2547}{4096}\alpha\right). n'\alpha^3(A^2+B^2)t^3$.

Enfin la somme des parties où se trouve le facteur $B'_1 t^2$ est $-\frac{9}{8}\alpha e'^2 B'_1 t^2$.

Ainsi le déplacement du plan de l'écliptique introduit dans la longitude moyenne de la Lune la partie non périodique et non proportionnelle au temps

$$\delta_2 l = \left(\frac{7067}{1536} - \frac{2547}{4096}\alpha\right).n'\alpha^3(A^2 + B^2)t^3 - \frac{9}{8}\alpha e'^2 B'_1 t^2.$$

La réduction en nombres montre que le coefficient $-\frac{9}{8}\alpha e'^2 B'_1$ de $t^2$ est inférieur à $0'',000\,000\,02$; le terme en $t^2$ est donc insensible. Il nous reste par conséquent, en réduisant en nombre le coefficient de $t^3$,

$$\delta_2 l = +\,0'',00328\,t^3.$$

Si l'on réunit ce terme en $t^3$ au terme $ct^2$ que la diminution de l'excentricité de l'orbite terrestre introduit dans la longitude moyenne de la Lune, la somme pourra s'écrire $(c + 0'',00328\,t)t^2$. Il en résulte que pour une époque $t = -25$ antérieure de vingt-cinq siècles à l'époque actuelle, le déplacement de l'écliptique a pour effet de diminuer de $0'',08$ seulement le coefficient de l'accélération séculaire.

Les anciennes éclipses paraissent exiger au contraire que ce coefficient soit accru de 4 à 6 secondes : ainsi, comme nous l'avons annoncé, ce n'est pas dans le fait du déplacement du plan de l'orbite terrestre qu'on peut trouver l'explication du désaccord qui semble exister sur ce point entre la théorie et l'observation.

Cette conclusion ne pouvait résulter d'ailleurs que du calcul de l'ensemble des termes que nous avons déterminés ci-dessus; car, parmi ces termes, il y en a plusieurs qui, pris isolément, modifieraient beaucoup l'accélération du mouvement de la Lune. Par exemple, les deux termes en $t^4$ égaux et de signes contraires que fournissent les combinaisons 8, 273 et 273, 8 ont pour valeur numérique $\pm\,0'',0128\,t^4$; si l'un d'eux existait seul, il augmenterait ou diminuerait de 8 secondes le coefficient de l'accélération applicable à l'époque $t = -25$. Ainsi encore, les combinaisons 8, 39 et 39, 8 donnent des termes en $t^3$ qui, pris séparément, altéreraient ce coefficient, l'un de $+50''$, l'autre de $-51''$, tandis que, réunis, ils le diminueraient de 1 seconde seulement. Il était donc nécessaire de s'assurer, comme nous l'avons fait, que ces différents termes se détruisent à très-peu près.

*Nota*. Pour la réduction en nombre des formules de ce Mémoire, on a fait usage des valeurs suivantes :

$$e = 0{,}054\,908, \quad \gamma_0 = \sin 9264'', \quad e' = 0{,}01677,$$
$$\varpi' = 280^\circ 21' 40'', \quad A = +\,2'',944, \quad B = -\,23'',783,$$
$$\frac{n'}{100} = 1\,295\,977'', \quad \frac{n'}{n} = \alpha = 0{,}074\,39.$$