JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme ternaire $x^2 + 2y^2 + 3z^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 14 (1869), p. 359-360.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1869_2_14__359_0>

Sur la forme ternaire $x^2 + 2y^2 + 3z^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soit m un entier donné, impair et premier à 3, de façon que l'on ait

$$m = 6\mu \pm 1.$$

On demande une expression simple du nombre N des représentations de m sous la forme ternaire indiquée

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2,$$

c'est-à-dire du nombre N des solutions que l'équation indéterminée

$$m = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

comporte quand on admet pour x, y, z des valeurs entières quelconques, positives, nulles ou négatives.

Or, je trouve que l'on a toujours

$$\mathrm{N} = F(6m),$$

en désignant généralement, comme d'ordinaire, par

$$F(k)$$

le nombre des formes quadratiques binaires et impaires (primitives ou non, mais distinctes) de déterminant $-k$. Au surplus, le mot *impaires* pourrait être supprimé ici; car, dans le cas présent, il n'y a lieu qu'à de telles formes.

La démonstration du théorème que je viens d'énoncer n'est pas difficile. Pour le moment, toutefois, je me bornerai à vérifier ma formule sur deux exemples, tirés des plus petits entiers qu'on puisse employer après l'unité, savoir $m = 5$, puis $m = 7$.

Pour $m = 5$, la formule indiquée donne

$$N = F(30) = 4,$$

résultat exact, en vertu de l'identité

$$5 = 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2.$$

Pour $m = 7$, elle fournit ensuite

$$N = F(42) = 4,$$

et cela s'accorde avec l'identité

$$7 = (\pm 2)^2 + 2 \times 0^2 + 3(\pm 1)^2.$$

Il serait inutile de pousser plus loin ces calculs.