JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant la fonction numérique $p_2(n)$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 14 (1869), p. 302-304.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1869_2_14__302_0>

Théorème concernant la fonction numérique $\rho_2(n)$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

L'entier que nous désignons par n sera toujours impair, et si on le décompose de toutes les manières possibles en un produit

$$d\delta$$

de deux facteurs, on aura, d'après une notation souvent employée par nous,

$$\rho_2(n) = \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2.$$

Ajoutons que, dans le présent article, n ne pourra être que de la forme linéaire

$$4l + 3,$$

en sorte que les valeurs de n seront prises dans la suite

$$3,\ 7,\ 11,\ 15,\ldots;$$

à ces valeurs répondront, comme on peut s'en assurer par un calcul très-simple, les valeurs de $\rho_2(n)$ ci-après

$$8,\ 48,\ 120,\ 208,\ldots,$$

dont nous avons eu déjà occasion de faire usage.

Maintenant, soit

$$m$$

un entier donné $\equiv 7 \pmod{8}$, c'est-à-dire de la forme linéaire

$$8k + 7.$$

Retranchons-en les carrés des entiers impairs successifs

$$1,\ 3,\ 5,\ 7, \ldots,\ i, \ldots,$$

en ayant soin de nous arrêter au moment où le carré

$$i^2$$

surpasserait l'entier m, auquel il ne peut jamais être égal; puis formons la somme

$$\text{(A)} \qquad \sum (m - 7i^2)\,\rho_2\left(\frac{m - i^2}{2}\right),$$

pour toutes les valeurs indiquées de i. Dans les conditions où nous nous sommes placés,

$$\frac{m - i^2}{2}$$

sera toujours un nombre entier $\equiv 3 \pmod{4}$ et rentrant par conséquent dans la série des nombres n écrite plus haut.

Cela posé, le théorème que nous voulons donner ici consiste en ce que la somme (A) est toujours nulle. Il s'exprime donc par l'équation

$$\text{(B)} \qquad \sum (m - 7i^2)\,\rho_2\left(\frac{m - i^2}{2}\right) = 0,$$

que nous sommes parvenus à démontrer de plusieurs manières, mais que nous nous bornerons pour le moment à vérifier numériquement sur les deux exemples les plus simples.

Les valeurs de m pour lesquelles l'équation (B) a lieu sont celles des divers termes de la progression arithmétique

$$7,\ 15,\ 23,\ 31,\ldots$$

dont le terme général est

$$8k+7.$$

Or, pour

$$m=7,$$

l'équation (B) est purement identique, le premier membre de cette équation se réduisant à un seul terme qui est nul de lui-même. Pour

$$m=15,$$

elle fournit

$$(15-7.1)\rho_2\left(\frac{15-1}{2}\right)+(15-7.9)\rho_2\left(\frac{15-9}{2}\right)=0,$$

c'est-à-dire

$$8\rho_2(7)-48\rho_2(3)=0,$$

ce qui est exact, puisque l'on a, comme on l'a vu plus haut

$$\rho_2(3)=8,\quad \rho_2(7)=48.$$

Il serait inutile de pousser plus loin ces calculs.