JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

DIDON

Méthode de Cauchy pour l'inversion de l'intégrale elliptique

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 14 (1869), p. 230-240.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1869_2_14__230_0>

Méthode de Cauchy pour l'inversion de l'intégrale elliptique;

Par M. DIDON,

Docteur ès Sciences.

Dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* de l'année 1843 (t. XVII) se trouvent plusieurs Mémoires de Cauchy, relatifs à certains produits d'un nombre infini de facteurs, et, en particulier, à ceux qu'il a appelés *factorielles réciproques*, et qui ne sont autre chose que les fonctions Θ de Jacobi. Les premiers Mémoires sont consacrés au développement en séries infinies de ces factorielles et de leurs puissances, et on trouve dans les derniers une méthode extrêmement simple et ingénieuse pour l'inversion de l'intégrale elliptique. Cette méthode étant peu connue, j'ai pensé qu'il serait utile de l'exposer, en mettant à la place des notations de Cauchy celles de Jacobi, qui sont plus familières. On trouvera, dans ce qui va suivre, l'expression, au moyen des fonctions Θ, H,..., non-seulement de $\sin \operatorname{am} x$, $\cos \operatorname{am} x$ et $\Delta \operatorname{am} x$, mais aussi de la fonction elliptique $\Pi(x, a)$ de troisième espèce; et même une formule de Cauchy, conduisant à ce dernier résultat, donnera, si on l'interprète convenablement, la solution du problème de l'addition des arguments.

On a

$$\Theta\,(x) = A\left(1 - 2q\cos\frac{\pi x}{K} + q^2\right)\left(1 - 2q^3\cos\frac{\pi x}{K} + q^6\right)\cdots,$$

$$\Theta_1(x) = A\left(1 + 2q\cos\frac{\pi x}{K} + q^2\right)\left(1 + 2q^3\cos\frac{\pi x}{K} + q^6\right)\cdots,$$

$$H\,(x) = A\,2\sqrt[4]{q}\,\sin\frac{\pi x}{2K}\left(1 - 2q^2\cos\frac{\pi x}{K} + q^4\right)\left(1 - 2q^4\cos\frac{\pi x}{K} + q^8\right)\cdots,$$

$$H_1(x) = A\,2\sqrt[4]{q}\,\cos\frac{\pi x}{2K}\left(1 + 2q^2\cos\frac{\pi x}{K} + q^4\right)\left(1 + 2q^4\cos\frac{\pi x}{K} + q^8\right)\cdots,$$

où

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}} \quad \text{et} \quad A = (1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6)\ldots.$$

La formule fondamentale de la solution de Cauchy est la suivante :

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{H}(x)\Theta(x+a)}{\mathrm{H}_1(x)\Theta_1(x+a)} = \mathrm{M}\frac{\Theta_1(a)}{\Theta(a)}\left[-\frac{\Theta'_1(a)}{\Theta_1(a)} + \mathrm{D}_x \mathrm{l}\frac{\Theta_1(x+a)}{\mathrm{H}_1(x)}\right],$$

dans laquelle

$$\mathrm{M} = \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\frac{(1+q^2)^2(1+q^4)^2(1+q^6)^2\ldots}{(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\ldots}.$$

Pour la démontrer, je considère la fonction de x :

$$f(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{(1-q^2\mathrm{x})(1-q^4\mathrm{x})\ldots(1-\mathrm{x}^{-1})(1-q^2\mathrm{x}^{-1})\ldots}{(1+q^2\mathrm{x})(1+q^4\mathrm{x})\ldots(1+\mathrm{x}^{-1})(1+q^2\mathrm{x}^{-1})\ldots}$$
$$\times\frac{\left(1-q\mathrm{x}e^{\frac{\pi a}{\mathrm{K}}\sqrt{-1}}\right)\left(1-q^3\mathrm{x}e^{\frac{\pi a}{\mathrm{K}}\sqrt{-1}}\right)\ldots\left(1-q\mathrm{x}^{-1}e^{-\frac{\pi a}{\mathrm{K}}\sqrt{-1}}\right)\left(1-q^3\mathrm{x}^{-1}e^{-\frac{\pi a}{\mathrm{K}}\sqrt{-1}}\right)\ldots}{\left(1+q\mathrm{x}e^{\frac{\pi a}{\mathrm{K}}\sqrt{-1}}\right)\left(1+q^3\mathrm{x}e^{\frac{\pi a}{\mathrm{K}}\sqrt{-1}}\right)\ldots\left(1+q\mathrm{x}^{-1}e^{-\frac{\pi a}{\mathrm{K}}\sqrt{-1}}\right)\left(1+q^3\mathrm{x}^{-1}e^{-\frac{\pi a}{\mathrm{K}}\sqrt{-1}}\right)\ldots},$$

qui, pour $\mathrm{x} = \infty$, se réduit à une constante. D'après une proposition bien connue du calcul des résidus, cette fonction se comportera comme une fraction rationnelle relativement à la décomposition en fractions simples, et, par conséquent, sera égale, à une constante près, à

$$\frac{\mathrm{M}\pi}{\mathrm{K}\sqrt{-1}}\frac{\Theta_1(a)}{\Theta(a)}\left[\frac{1}{1+\mathrm{x}^{-1}} + \sum_{n=1}^{n=+\infty}\left(\frac{1}{1+q^{2n}\mathrm{x}^{-1}} - \frac{1}{1+q^{2n}\mathrm{x}}\right)\right.$$
$$\left. + \sum_{n=1}^{n=+\infty}\left(\frac{1}{1+q^{2n-1}\mathrm{x}e^{\frac{\pi a}{\mathrm{K}}\sqrt{-1}}} - \frac{1}{1+q^{2n-1}\mathrm{x}^{-1}e^{-\frac{\pi a}{\mathrm{K}}\sqrt{-1}}}\right)\right].$$

Cette expression, quand y suppose $\mathrm{x} = e^{\frac{\pi x}{\mathrm{K}}\sqrt{-1}}$, devient

$$\mathrm{M}\frac{\Theta_1(a)}{\Theta(a)}\left[\frac{\frac{\pi}{2\mathrm{K}}\sin\frac{\pi x}{2\mathrm{K}}}{\cos\frac{\pi x}{2\mathrm{K}}} - \frac{\pi}{2\mathrm{K}\sqrt{-1}}\right.$$
$$\left. - \sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{-\frac{2\pi}{\mathrm{K}}q^{2n}\sin\frac{\pi x}{\mathrm{K}}}{1+2q^{2n}\cos\frac{\pi x}{\mathrm{K}}+q^{4n}} + \sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{-\frac{2\pi}{\mathrm{K}}q^{2n-1}\sin\frac{\pi(x+a)}{\mathrm{K}}}{1+2q^{2n-1}\cos\frac{\pi(x+a)}{\mathrm{K}}+q^{4n-2}}\right],$$

ou bien

$$M\frac{\Theta_1(a)}{\Theta(a)}\left[D_x l\frac{\Theta_1(x+a)}{H_1(x)} - \frac{\pi}{2K\sqrt{-1}}\right].$$

Si l'on remarque que, dans la même hypothèse, $f(x)$ se transforme en $\frac{H(x)\Theta(x+a)}{H_1(x)\Theta_1(x+a)}$, on en conclura

$$\frac{H(x)\Theta(x+a)}{H_1(x)\Theta_1(x+a)} = M\frac{\Theta_1(a)}{\Theta(a)}\left[S + D_x l\frac{\Theta_1(x+a)}{H_1(x)}\right],$$

S étant une quantité indépendante de x, qui sera, par conséquent, égale à $-\frac{\Theta'_1(a)}{\Theta_1(a)}$, puisque, pour $x=0$, le premier membre de la relation précédente s'annule, ainsi que $D_x l H_1(x)$. La formule (1) est donc démontrée. En y changeant q en $-q$, elle devient

$$\frac{H(x)\Theta_1(x+a)}{H_1(x)\Theta(x+a)} = M\frac{\Theta(a)}{\Theta_1(a)}\left[-\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + D_x l\frac{\Theta(x+a)}{H_1(x)}\right]. \tag{2}$$

Pour simplifier l'écriture, je poserai

$$\frac{H(x)}{H_1(x)} = \omega, \quad \frac{\Theta(x+a)}{H_1(x)} = U, \quad \frac{\Theta_1(x+a)}{H_1(x)} = V,$$
$$\frac{\Theta(a)}{\Theta_1(a)} = H, \quad -\frac{\Theta'_1(a)}{\Theta_1(a)} = \alpha, \quad -\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} = \beta,$$

ce qui permettra d'écrire les formules (1) et (2) de la manière suivante :

$$\alpha + D_x l V = \frac{1}{M} H\omega\frac{U}{V}; \tag{1'}$$

$$\beta + D_x l U = \frac{1}{M} H^{-1}\omega\frac{V}{U}, \tag{2'}$$

Si, dans ces égalités, on change x en $x+K$, elles deviennent

$$\alpha + D_x l U - D_x l\omega = -\frac{1}{M} H\omega^{-1}\frac{V}{U}, \tag{3}$$

$$\beta + D_x l V - D_x l\omega = -\frac{1}{M} H^{-1}\omega^{-1}\frac{U}{V}. \tag{4}$$

En retranchant des formules (1′) et (2′) respectivement les formules (4) et (3), on obtient

$$(5)\qquad \alpha - \beta + \mathrm{D}_x \mathrm{l}\,\omega = \frac{1}{\mathrm{M}}\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}}(\mathrm{H}\omega + \mathrm{H}^{-1}\omega^{-1}),$$

$$(6)\qquad \beta - \alpha + \mathrm{D}_x \mathrm{l}\,\omega = \frac{1}{\mathrm{M}}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{U}}(\mathrm{H}^{-1}\omega + \mathrm{H}\omega^{-1}),$$

d'où l'on déduit, par la multiplication,

$$(\mathrm{D}_x \mathrm{l}\,\omega)^2 = \frac{1}{\mathrm{M}^2}\left[\omega^2 + \omega^{-2} + \mathrm{H}^2 + \mathrm{H}^{-2} + \mathrm{M}^2(\alpha - \beta)^2\right].$$

La constante $\mathrm{H}^2 + \mathrm{H}^{-2} + \mathrm{M}^2(\alpha-\beta)^2$, devant être indépendante de a, puisque ni ω ni M n'en dépendent, sera égale à $\left[\frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)}\right]^2 + \left[\frac{\Theta_1(0)}{\Theta(0)}\right]^2$; car α et β s'annulent avec a. Si donc on pose

$$(7)\qquad k'^{\frac{1}{2}} = \frac{(1-q)^2(1-q^3)^2(1-q^5)^2\ldots}{(1+q)^2(1+q^3)^2(1+q^5)^2\ldots} = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)}.$$

cette constante pourra s'exprimer par $k' + k'^{-1}$, et l'on aura

$$(8)\qquad \frac{d\omega^2}{dx^2} = \frac{1}{\mathrm{M}^2}(1 + k'\omega^2)(1 + k'^{-1}\omega^2).$$

Examinons la valeur de ω :

$$\omega = \operatorname{tang}\frac{\pi x}{2\mathrm{K}}\,\frac{\left(1 - 2q^2\cos\frac{\pi x}{\mathrm{K}} + q^4\right)\left(1 - 2q^4\cos\frac{\pi x}{\mathrm{K}} + q^6\right)\ldots}{\left(1 + 2q^2\cos\frac{\pi x}{\mathrm{K}} + q^4\right)\left(1 + 2q^4\cos\frac{\pi x}{\mathrm{K}} + q^8\right)\ldots}.$$

Nous voyons que, nulle avec x, elle augmente en même temps que cette variable, et est infinie pour $x = \mathrm{K}$; si donc on pose

$$(9)\qquad \omega = \sqrt{k'}\operatorname{tang} p,$$

p croîtra de 0 à $\frac{\pi}{2}$ quand x croîtra de 0 à K, et la dérivée $\frac{dp}{dx}$ sera positive dans cet intervalle.

Dans la formule (8), remplaçons ω et $d\omega$ en fonction de p et de dp, nous obtiendrons, en posant $k^2 = 1 - k'^2$,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{M\sqrt{k'}}\sqrt{1 - k^2\sin^2 p},$$

avec le signe + devant le radical. Maintenant nous allons particulariser les constantes positives k et k', qui jusqu'à présent étaient arbitraires, en les assujettissant à satisfaire à l'égalité $M\sqrt{k'} = 1$, c'est-à-dire

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots[(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots]^2.$$

Il vient alors, puisque p s'annule avec x,

$$(10) \qquad x = \int_0^p \frac{dp}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 p}};$$

p est ce que Legendre appelle *l'amplitude de l'intégrale* x; la formule (9) peut donc s'écrire

$$(11) \qquad \operatorname{tang} p = \operatorname{tang}\operatorname{am} x = \frac{1}{\sqrt{k'}}\frac{H(x)}{H_1(x)}.$$

Il est bon de remarquer que, p devenant égal à $\frac{\pi}{2}$, pour $x = K$, on a

$$(12) \qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dp}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 p}}.$$

Mais il nous faut exprimer $\sin p$, $\cos p$, et $\sqrt{1 - k^2\sin^2 p}$ au moyen de x. Pour y arriver, on se servira des formules (5), (6), (1′) et (2′) dans lesquelles on fera $a = 0$. Appelant u et v ce que deviennent U et V dans cette hypothèse, et remarquant que pour $a = 0$, $\alpha = \beta = 0$, et $H = k'^{\frac{1}{2}}$, on tirera de (5) et de (6)

$$\frac{1}{M}\frac{u}{v} = \frac{D_x l\omega}{k'^{\frac{1}{2}}\omega + k'^{-\frac{1}{2}}\omega^{-1}}, \qquad \frac{1}{M}\frac{v}{u} = \frac{D_x l\omega}{k'^{-\frac{1}{2}}\omega + k'^{-\frac{1}{2}}\omega^{-1}},$$

et ensuite de (1′) et de (2′)

$$D_x \,l v = \frac{k'^{\frac{1}{2}} \omega D_x \,l \omega}{k'^{\frac{1}{2}} \omega + k'^{-\frac{1}{2}} \omega^{-1}}, \quad D_x \,l u = \frac{k'^{-\frac{1}{2}} \omega D_x \,l \omega}{k'^{-\frac{1}{2}} \omega + k'^{\frac{1}{2}} \omega^{-1}}.$$

En intégrant, il viendra

$$\sqrt{1 + k' \omega^2} = \frac{v}{v_0}, \quad \sqrt{1 + k'^{-1} \omega^2} = \frac{u}{u_0},$$

v_0 et u_0 étant ce que deviennent v et u pour $x = 0$; ou bien

$$\frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 p}}{\cos p} = \frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)} \frac{\Theta_1(x)}{H_1(x)}, \quad \frac{1}{\cos p} = \frac{H_1(0)}{\Theta(0)} \frac{\Theta(x)}{H_1(x)};$$

ou encore, si nous tenons compte de la relation (11)

$$(13) \quad \begin{cases} \cos p = \dfrac{\Theta(0)}{H_1(0)} \dfrac{H_1(x)}{\Theta(x)}, \\ \sqrt{1 - k^2 \sin^2 p} = \dfrac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)} \dfrac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}, \\ \sin p = \cos p \operatorname{tang} p = \dfrac{1}{\sqrt{k'}} \dfrac{\Theta(0)}{H_1(0)} \dfrac{\Theta(x)}{H(x)}. \end{cases}$$

Il n'est pas difficile d'exprimer les coefficients qui entrent dans les seconds membres de ces formules, au moyen des quantités k et k'. D'abord, on a $\frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)} = \sqrt{k'}$; soit maintenant $\frac{\Theta(0)}{H_1(0)} = \lambda$. En éliminant p entre les équations (13), on arrive aux relations

$$(14) \quad \begin{cases} \Theta^2(x) = \lambda^2 H_1^2(x) + \dfrac{\lambda^2}{k'} H^2(x), \\ k'^2 \Theta^2(x) = k^2 \lambda^2 H^2(x) + k'^2 \Theta_1^2(x). \end{cases}$$

Si on change, dans la première de ces formules, x en $x + iK'$, et qu'on emploie les égalités suivantes bien faciles à vérifier

$$(15) \quad \begin{cases} \Theta(x + iK') = iH(x) e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x + iK')}, \\ H(x + iK') = i\Theta(x) e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x + iK')}, \\ H_1(x + iK') = \Theta_1(x) e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x + iK')}, \end{cases}$$

elle deviendra

$$-\mathrm{H}^2(x) = \lambda^2\Theta_1^2(x) - \frac{\lambda^2}{k'}\Theta^2(x),$$

et, en la comparant, dans cette nouvelle forme, à la seconde des formules (14), on obtiendra $\lambda = \sqrt{\frac{k'}{k}}$. Donc finalement

$$(16)\qquad \begin{cases} \sin\operatorname{am} x = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\dfrac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}, \\ \cos\operatorname{am} x = \sqrt{\dfrac{k'}{k}}\dfrac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(x)}, \\ \sqrt{1-k^2\sin^2\operatorname{am} x} = \Delta\operatorname{am} x = \sqrt{k'}\,\dfrac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}. \end{cases}$$

On peut remarquer qu'on déduit des formules précédentes

$$\sqrt{k} = \frac{\mathrm{H}_1(0)}{\Theta_1(0)} = \frac{2\sqrt[4]{q}(1+q^2)^2(1+q^4)^2(1+q^6)^2\ldots}{(1+q)^2(1+q^3)^2(1+q^5)^2\ldots}.$$

Il reste à indiquer comment, connaissant k, on déduit K et K'. K est donné par l'égalité (12), et Cauchy arrive, de la manière suivante, à la formule

$$(17)\qquad \mathrm{K}' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dp}{\sqrt{1-k'^2\sin^2 p}}.$$

Si, dans l'expression de $\omega = \frac{\mathrm{H}(x)}{\mathrm{H}_1(x)}$, on remplace les sinus et cosinus par des exponentielles imaginaires, on trouvera, en posant $e^{\frac{\pi x}{\mathrm{K}}\sqrt{-1}} = y$,

$$\omega = \sqrt{-1}\,\frac{(1-y)(1-q^2y)(1-q^4y)\ldots(1-q^2y^{-1})(1-q^4y^{-1})\ldots}{(1+y)(1+q^2y)(1+q^4y)\ldots(1+q^2y^{-1})(1+q^4y^{-1})\ldots}.$$

On voit donc que $\frac{\omega}{\sqrt{-1}}$ s'annule pour $y = q^2$ et $y = 1$, mais ne s'annule pas dans l'intervalle, et que cette quantité, pour $y = q$, est égale à $\sqrt{k'}$. L'équation (8), où l'on remplace dx en fonction de y et de dy, se transforme en

$$(18) \qquad -\frac{y^2\pi^2 d\omega^2}{K^2 dy^2} = \frac{1}{M^2}(1 + k'\omega^2)(1 + k'^{-1}\omega^2),$$

et l'on reconnaît que la dérivée $\frac{d\omega}{\sqrt{-1}\,dy}$ est nulle avec l'expression $1 + k'^{-1}\omega^2$ pour $\frac{\omega}{\sqrt{-1}} = k'^{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire que $\frac{\omega}{\sqrt{-1}}$ passe par un maximum pour $y = q$. On peut, par conséquent, poser $\omega = \sqrt{-1}\,k'^{\frac{1}{2}}\sin\varphi$, et lorsque y variera de q à 1, φ diminuera de $\frac{\pi}{2}$ à 0, de sorte que la dérivée $\frac{d\varphi}{dy}$ sera négative dans cet intervalle. Remplaçons, dans l'équation (18), ω et $d\omega$ en fonction de φ et de $d\varphi$, il viendra, dans l'intervalle de $y = q$ à $y = 1$,

$$\frac{dy}{y} = \frac{M\pi\sqrt{k'}}{K}\,\frac{-d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}},$$

et, par conséquent, puisque $M\sqrt{k'} = 1$, et que, pour $\varphi = 0$, on a $y = 1$,

$$\mathrm{l}y = -\frac{\pi}{K}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\varphi}}.$$

Pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, y devient égal à q; donc

$$\mathrm{l}q = -\frac{\pi}{K}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\varphi}},$$

ce qui démontre la formule (17).

Je passe maintenant à l'expression de la fonction elliptique de troisième espèce $\Pi(x, a)$ au moyen de la fonction Θ. La formule (6) donne

$$(19) \qquad \frac{1}{M}\,\frac{V}{U} = \frac{\beta - \alpha + D_x \mathrm{l}\omega}{H^{-1}\omega + H\omega^{-1}},$$

ce qui permet d'écrire l'égalité (2') ainsi qu'il suit :

$$D_x \mathrm{l}U = -\beta + \frac{H^{-1}\omega\, D_x \mathrm{l}\omega}{H^{-1}\omega + H\omega^{-1}} + (\beta - \alpha)\,\frac{H^{-1}\omega}{H^{-1}\omega + H\omega^{-1}},$$

d'où, en intégrant,

$$\mathrm{l}\frac{U}{U_0} = -\beta x + \mathrm{l}\sqrt{1 + H^{-2}\omega^2} + (\beta - \alpha)\int_0^x \frac{H^{-2}\omega^2}{1 + H^{-2}\omega^2}\,dx,$$

U_0 étant la valeur de U qui correspond à $x = 0$. Si l'on remplace U, β et H par leurs valeurs, on aura

$$\begin{aligned}\mathrm{l}\frac{H_1(0)}{\Theta(a)}\,\frac{\Theta(x+a)}{H_1(x)}\\ = x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \mathrm{l}\sqrt{1 + \frac{\Theta_1^2(a)}{\Theta^2(a)}\omega^2} + \left[\frac{\Theta'_1(a)}{\Theta_1(a)} - \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}\right]\int_0^x \frac{\dfrac{\Theta_1^2(a)}{\Theta^2(a)}\omega^2}{1 + \dfrac{\Theta_1^2(a)}{\Theta^2(a)}\omega^2}\,dx.\end{aligned}$$

En changeant, dans cette formule, a en $-a$, elle deviendra

$$\begin{aligned}\mathrm{l}\frac{H_1(0)}{\Theta(a)}\,\frac{\Theta(x-a)}{H_1(x)}\\ = -x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \mathrm{l}\sqrt{1 + \frac{\Theta_1^2(a)}{\Theta^2(a)}\omega^2} - \left[\frac{\Theta'_1(a)}{\Theta_1(a)} - \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}\right]\int_0^x \frac{\dfrac{\Theta_1^2(a)}{\Theta^2(a)}\omega^2}{1 + \dfrac{\Theta_1^2(a)}{\Theta^2(a)}\omega^2}\,dx.\end{aligned}$$

Si l'on retranche ces deux égalités membre à membre, on obtiendra

$$(20)\quad \left[\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} - \frac{\Theta'_1(a)}{\Theta_1(a)}\right]\int_0^x \frac{\dfrac{\Theta_1^2(a)}{\Theta^2(a)}\omega^2}{1 + \dfrac{\Theta_1^2(a)}{\Theta^2(a)}\omega^2}\,dx = x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2}\mathrm{l}\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}.$$

Mais les formules (16) donnent

$$\frac{\Theta_1^2(a)}{\Theta^2(a)} = \frac{1}{k'}\Delta^2 \operatorname{am} a = \frac{1}{k'}(1 - k^2\sin^2\operatorname{am} a),$$

$$\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - \frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)} = -D_x\,\mathrm{l}\frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)} = \frac{k^2\sin p\cos p}{1 - k^2\sin^2 p}\,\frac{dp}{dx} = \frac{k^2\sin\operatorname{am}x\cos\operatorname{am}x}{\Delta\operatorname{am}x}.$$

et l'on a

$$\omega^2 = k'\frac{\sin^2\operatorname{am}x}{\cos^2\operatorname{am}x}.$$

Le premier membre de la formule (20) est donc égal à

$$\int_0^x \frac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \,\Delta \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x}\, dx,$$

c'est-à-dire à $\Pi(x, a)$.

La formule (19) résout le problème de l'addition des arguments relativement à la fonction $\Delta \operatorname{am} x$; car, si l'on remarque que $\frac{1}{M} = \sqrt{k'}$, cette formule revient à

$$\Delta \operatorname{am}(x + a) = \frac{-\dfrac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a}{\Delta \operatorname{am} a} + \dfrac{\Delta \operatorname{am} x}{\sin \operatorname{am} x \cos \operatorname{am} x}}{\Delta \operatorname{am} a \dfrac{\sin \operatorname{am} x}{\cos \operatorname{am} x} + \dfrac{1}{\Delta \operatorname{am} a} \dfrac{\cos \operatorname{am} x}{\sin \operatorname{am} x}}.$$

Si l'on multiplie les deux termes du second membre de l'égalité précédente par $\Delta \operatorname{am} a \sin \operatorname{am} x \cos \operatorname{am} x$, et si l'on remarque que le nouveau dénominateur $\Delta^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x + \cos^2 \operatorname{am} x$ est égal à $1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \cos^2 \operatorname{am} x$, on aura finalement

$$(21) \qquad \Delta \operatorname{am}(x + a) = \frac{\Delta \operatorname{am} a \,\Delta \operatorname{am} x - k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \sin \operatorname{am} x \cos \operatorname{am} x}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x}.$$

Je terminerai en indiquant encore une formule importante, démontrée très-simplement par Cauchy, et qui peut servir aussi à exprimer $\Pi(x, a)$ au moyen de la fonction Θ. Qu'on cherche à décomposer en fractions simples la fonction $\frac{H(x+a)H(x-a)}{\Theta^2(x)}$, on trouvera sans difficulté que la somme des deux fractions correspondantes au facteur $1 - 2q^{2n-1} \cos \frac{\pi x}{K} + q^{4n-2}$ de $\Theta(x)$ est

$$\frac{\Theta^2(a)}{\sqrt{q}(1-q^2)^4(1-q^4)^4(1-q^6)^4 \ldots} \times \left[\frac{(1-q^{4n-2})^2}{\left(1 - 2q^{2n-1}\cos\dfrac{\pi x}{K} + q^{4n-2}\right)^2} - \frac{1 + q^{4n-2}}{1 - 2q^{2n-1}\cos\dfrac{\pi x}{K} + q^{4n-2}}\right].$$

Si l'on remarque la composition de cette expression, on voit qu'on pourra écrire

$$\frac{H(x+a)H(x-a)}{\Theta^2(x)\Theta^2(a)} = \Phi(x) + S,$$

$\Phi(x)$ étant indépendant de a, et S de x. D'ailleurs, le premier membre de cette formule s'annulant pour $x = a$, on aura $S = -\Phi(a)$. Donc

$$(22) \qquad \frac{H(x+a)H(x-a)}{\Theta^2(x)\Theta^2(a)} = \Phi(x) - \Phi(a).$$

Il est facile de déterminer la fonction Φ. Si, en effet, nous remplaçons a par $2K$ dans la formule précédente, elle donne

$$\Phi(x) = \Phi(2K) + \frac{k}{\Theta^2(0)} \sin^2 \operatorname{am} x,$$

et, par conséquent,

$$\Phi(x) - \Phi(a) = \frac{k}{\Theta^2(0)} (\sin^2 \operatorname{am} x - \sin^2 \operatorname{am} a).$$

La formule (22) devient donc

$$(23) \qquad \sin^2 \operatorname{am} x - \sin^2 \operatorname{am} a = \frac{\Theta^2(0) H(x+a) H(x-a)}{k \Theta^2(a) \Theta^2(x)}.$$

Cette relation importante prend, si l'on y change a en $a + iK'$, et qu'on emploie les formules (15), cette nouvelle forme :

$$1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x = \frac{\Theta^2(0)\Theta(x+a)\Theta(x-a)}{\Theta^2(a)\Theta^2(x)}.$$

Prenant les logarithmes des deux membres, différentiant par rapport à a, et intégrant ensuite par rapport à x, on trouvera finalement

$$\int_0^x \frac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \,\Delta \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x}\, dx = \Pi(x, a) = x \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2} \operatorname{l} \frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}.$$