JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

R. RADAU

Sur une propriété des systèmes qui ont un plan invariable

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 14 (1869), p. 167-229.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1869_2_14__167_0>

Sur une propriété des systèmes qui ont un plan invariable;

Par M. R. RADAU.

Lorsqu'on aborde l'intégration des équations différentielles de la dynamique, certaines simplifications, basées sur la nature particulière de ces équations, s'offrent comme d'elles-mêmes. En premier lieu, si les forces sont indépendantes du temps, on peut exclure la différentielle dt des $6n$ équations du premier ordre qui représentent le mouvement de n points matériels, et les réduire ainsi à $6n - 1$ équations simultanées entre $6n$ variables. Le temps s'obtient alors par une quadrature après l'intégration du système de $6n - 1$ équations.

Ensuite, dans les problèmes où les forces ne dépendent que des distances mutuelles des mobiles, on peut faire abstraction de la position absolue du système par rapport à un point fixe dans l'espace, et se contenter d'en considérer la *configuration* autour d'un point mobile, lié au système. On peut, par exemple, prendre l'origine des coordonnées au centre de gravité, en le supposant fixe; cela ne change rien à la forme des équations du mouvement, seulement on gagne ainsi trois équations de condition entre les coordonnées, et trois équations semblables entre les vitesses, de sorte qu'on peut éliminer six variables et diminuer de six le nombre des équations différentielles. En outre, le mouvement de translation du centre de gravité est connu par trois intégrales, qui nous apprennent qu'il est rectiligne et uniforme.

Au lieu de rapporter tous les points du système au centre de gravité, on peut aussi les rapporter à un des points que j'ai appelés *points canoniques*. Ce sont des centres de gravité de deux masses fictives, l'une égale à la racine carrée de la masse totale du système et située au centre de gravité réel, l'autre égale à la racine carrée de la masse de l'un des corps et prenant la place de ce corps. Ce dernier se trouve dès lors exclu des équations différentielles; le mouvement des $n-1$ *planètes* a lieu autour du point canonique comme autour d'un centre d'attraction fixe (en ce sens que la fonction des forces renferme maintenant les distances des planètes à l'origine des coordonnées). En résumé, quand les forces et les liaisons des points ne dépendent que des distances mutuelles de ces derniers, le nombre des équations différentielles se réduit à $6n-6$, ou bien à $6n-7$, si nous éliminons dt.

Toutes les fois que les forces en jeu dans le système sont les dérivées partielles d'une fonction qui ne renferme pas le temps, nous avons une intégrale indépendante des équations de condition : l'intégrale des forces vives. Elle existe pour les systèmes libres ou sollicités par les attractions de centres fixes, et elle permet d'abaisser le nombre des équations différentielles d'une unité.

Quand les forces et les liaisons du système n'éprouvent aucun changement par une rotation d'ensemble de tous les points autour d'une droite fixe, que j'appellerai l'*axe polaire*, nous avons toujours une intégrale des aires : la somme des vitesses aréolaires autour du pôle fixe est une constante. Ceci s'applique au cas où nous avons une ligne droite contenant des centres fixes. Dans le cas d'un système libre, le théorème a lieu pour une droite fixe quelconque, ce qui donne trois intégrales des aires. J'appellerai ici *axe polaire* celui qui correspond au maximum de la somme des aires, c'est-à-dire la normale au *plan invariable*. Pour un axe quelconque situé dans le plan invariable la somme des aires est nulle.

Je montrerai qu'*une intégrale des aires et l'intégrale des forces vives valent ensemble trois intégrales,* en ce sens qu'elles permettent d'éliminer trois variables, ou de réduire de trois unités le nombre des équations différentielles du problème. S'il existe une seconde intégrale des aires, on sait que la troisième existe aussi, puisque $(\alpha, \beta) = \gamma$, si nous désignons par α, β, γ les sommes des vitesses aréolaires autour de trois axes rectangulaires, et par (α, β) la fonction de Poisson. Nous pouvons alors éliminer cinq variables, et le nombre des équations différentielles tombe de $6n-7$ à $6n-12$, si le principe du centre de gravité s'applique également.

Cette propriété curieuse des intégrales des aires peut s'énoncer géométriquement comme il suit. Toutes les fois qu'un système a un pôle invariable, c'est-à-dire que les forces et les liaisons des points sont indépendantes de l'orientation du système autour d'une droite fixe, on peut rapporter le mouvement à un méridien mobile avec le système. La position absolue du plan mobile par rapport à un méridien fixe se détermine par une quadrature après coup, si l'on parvient à intégrer les équations différentielles du mouvement relatif. Or ces dernières renferment deux variables de moins que les équations du mouvement absolu, car le méridien mobile se détermine par une équation de condition, $f = 0$, entre les coordonnées, et cette équation en donne une seconde, $\frac{df}{dt} = 0$, qui existe entre les coordonnées et les vitesses. Ces deux équations permettent d'éliminer une coordonnée et une vitesse; on peut, par exemple, faire passer le méridien mobile par l'un des corps du système, ce qui donne $y_0 = 0$, $\frac{dy_0}{dt} = 0$. En échange on n'introduit qu'une seule variable nouvelle, la rotation du méridien mobile, qui s'élimine par l'intégrale des aires. En effet, prenons l'axe polaire pour axe des z, le plan invariable pour plan des x, y, et l'intersection de ce plan avec le méridien mobile, ou la *ligne des nœuds*, pour axe des x; soit Ω la longitude du nœud, ou l'angle que le méridien mobile fait avec un méridien fixe, et soit $\Omega' = \frac{d\Omega}{dt}$ sa vitesse de rotation autour du pôle. Les trois composantes de la vitesse d'un point matériel libre seront

$$x' - y\Omega', \quad y' + x\Omega', \quad z',$$

et la force vive du système deviendra

$$2T = \Sigma m(x' - y\Omega')^2 + \Sigma m(y' + x\Omega')^2 + \Sigma m z'^2.$$

Sans modifier cette expression d'une manière essentielle, nous pourrons supposer que les variables ont été réduites au plus petit nombre possible. Au lieu de prendre l'origine au centre de gravité et d'éliminer les coordonnées de l'un des corps, on peut par exemple en exclure un directement, en prenant pour origine des coordonnées un point canonique; cela ne changera rien ni à la forme de T, ni à la situation du pôle invariable. Pour déterminer le méridien mobile, on a l'équation $f = 0$, qui donne $\Sigma(f'_x x' + f'_y y' + f'_z z') = 0$, et si nous éliminons une coordonnée et une vitesse à l'aide de ces deux équations, T reste toujours une fonction homogène du second degré des variables x', y', z', Ω'. La variable Ω n'existe ni dans T, ni dans la fonction des forces U. Par conséquent, si l'on fait

$$T - U = H,$$
$$\frac{dT}{dx'} = p, \quad \frac{dT}{dy'} = q, \quad \frac{dT}{dz'} = r, \quad \frac{dT}{d\Omega'} = K,$$

et qu'on remplace dans T les variables x', y', z', Ω' par les variables p, q, r, K, on aura, par la méthode d'Hamilton, le système canonique d'équations différentielles :

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{dH}{dp}, & \frac{dp}{dt} &= -\frac{dH}{dx},\\
\frac{dy}{dt} &= \frac{dH}{dq}, & \frac{dq}{dt} &= -\frac{dH}{dy},\\
\frac{dz}{dt} &= \frac{dH}{dr}, & \frac{dr}{dt} &= -\frac{dH}{dz},\\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{dH}{dK}, & \frac{dK}{dt} &= -\frac{dH}{d\Omega} = 0.
\end{aligned}$$

L'équation $\frac{dK}{dt} = 0$ donne l'intégrale $K = \text{const.}$; c'est l'intégrale des aires. En prenant les dérivées partielles de H par rapport aux variables x, y, z, p, q, r, on traite déjà K comme une constante; on ne changera donc rien aux équations différentielles du mouvement, si l'on prend de suite pour K la constante des aires. Ces équations se réduisent alors à $6n - 8$ équations différentielles entre les variables x, y, z, p, q, r, avec la quadrature

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{dH}{dK}.$$

Deux autres intégrales des aires, l'intégrale des forces vives, $H = \text{const.}$, et l'élimination de dt réduisent ensuite le nombre des équations à $6n - 12$.

Il est donc démontré que l'on peut former les équations du mouvement en faisant abstraction non-seulement de la translation dans l'espace d'un point mobile, fonction des coordonnées, mais encore de la rotation d'un plan mobile qui fait également partie du système.

Cette idée se trouve déjà énoncée à la dernière page du Mémoire de M. Sylvester, intitulé *On the motion of a rigid body acted on by no external forces* [*]. « Le problème qui vient d'être traité, dit M. Sylvester, constitue peut-être le cas le plus simple d'une classe bien définie de questions de dynamique auxquelles s'applique une méthode spéciale qui consiste à renvoyer la recherche du déplacement absolu après la détermination du déplacement autour d'une droite fixe. Les trois problèmes qui offrent les exemples les plus importants de ce genre de questions, et qui forment pour ainsi dire un groupe naturel, sont : celui de la rotation d'un corps libre, celui d'un corps attiré par deux centres fixes, et le problème des trois corps. Dans le premier et le troisième, la droite fixe est la normale au plan invariable; dans le second, c'est la ligne qui joint les centres fixes.... Dans le problème des trois corps, on comprend *à priori* que, pour recourir aux procédés de déformation employés par Jacobi et tous ceux qui sont venus après lui, on pourrait gagner, c'est-à-dire économiser une intégrale, en formant un système d'équations d'où la position absolue de l'intersection du plan des trois corps avec le plan invariable serait exclue. Ce résultat équivaudrait, par le fait, à ce qu'on appelle avec Jacobi l'*élimination des nœuds;* mais, dans la méthode de Jacobi, la ligne des nœuds est l'intersection de deux orbites instantanées qui se coupent dans le plan invariable, tandis qu'ici c'est l'intersection du plan invariable avec le plan des trois corps....

» Le procédé par lequel l'élément relatif à la position absolue est pour ainsi dire écarté dès le principe n'est pas un procédé d'élimination à proprement parler, ou, du moins, nous ne sommes pas obligés de le reconnaître pour tel. On appelle *élimination* l'opération qui consiste à chasser une variable d'un système d'équations où elle était déjà entrée; mais ce qu'il y a à faire dans le cas actuel, ce n'est pas de

[*] *Philosophical Transactions*, 1866.

faire disparaître une variable, mais de l'exclure dès le commencement : c'est, pour le dire en un mot, un procédé d'*ab-limination* qui s'applique ici. »

M. Sylvester termine par l'annonce d'un Mémoire dans lequel il se propose de traiter à ce point de vue le problème des trois corps ; mais il n'a rien publié sur cette question.

La méthode de Jacobi à laquelle M. Sylvester fait allusion dans ce passage consiste à substituer aux trois corps réels deux corps fictifs et à introduire comme variables les inclinaisons des orbites que ces corps décrivent autour du centre de gravité du système. Les orbites se coupent dans le plan invariable, la longitude du nœud se détermine par une quadrature, et les équations finales de Jacobi ne représentent au fond que six équations du premier ordre. Il dit lui-même : cinq du premier et une du second ordre, mais on s'assure facilement que son système peut être mis sous la forme de six équations du premier ordre seulement. Il ne paraît pas que Jacobi ait jamais essayé de généraliser ce résultat. Son Mémoire date de 1842.

L'élimination du nœud du plan des trois corps a été obtenue quatorze ans plus tard (en 1856) par Edmond Bour. Ce dernier prend pour point de départ la transformation de Jacobi, et une analyse fort compliquée le conduit à deux systèmes canoniques de huit variables, dont chacun peut servir à déterminer le mouvement des deux corps fictifs dans le plan des trois corps. Dans le second figurent les rayons vecteurs (q_1, q_2) et les vitesses radiales (p_1, p_2), les azimuts (q_3, q_4) des vecteurs, comptés à partir du nœud, et les vitesses aréolaires dans le plan des trois corps (p_3, p_4). Dans le premier système de Bour, les variables q_3, q_4, p_3, p_4 sont remplacées par leurs sommes et différences (n_3, n_4, l_3, l_4), c'est-à-dire par l'angle compris entre les vecteurs, l'azimut de la bissectrice de cet angle, la différence des vitesses aréolaires et leur somme, qui dépend du cosinus de l'inclinaison. Ce sont les variables ω, φ, q, $\cos\theta$, de M. Brioschi, qui arrive au même système en considérant la bissectrice de l'angle ω comme un axe mobile et en éliminant le nœud par les intégrales des aires ; seulement, M. Brioschi ne s'aperçoit pas que les variables φ, $\cos\theta$ sont conjuguées [*].

---

[*] Note présentée à l'Académie des Sciences le 6 avril 1868.

I.

Je ferai voir, dans ce qui suit, comment avec une seule intégrale des aires l'élimination des nœuds peut s'obtenir directement, en déterminant un méridien mobile par une équation quelconque $f = 0$. Je montrerai ensuite comment, lorsqu'on dispose de trois intégrales des aires, on peut employer trois axes mobiles déterminés par trois équations finies : par exemple, les trois axes principaux d'inertie. Les trois équations de condition permettent d'éliminer six variables : trois coordonnées et trois vitesses ; en échange, on n'introduit que cinq variables nouvelles : deux angles et trois vitesses angulaires, qui expriment les rotations autour des axes mobiles. Trois de ces variables s'éliminent par les intégrales des aires; il en reste deux, qui sont conjuguées : le cosinus de l'inclinaison du plan des x, y et l'azimut de l'axe des x dans ce plan. Ces deux variables prennent la place des six qui ont été éliminées par les équations de condition ; nous avons par conséquent quatre variables de moins après avoir épuisé les intégrales des aires. On arrive ainsi de nouveau à $6n - 12$ équations différentielles du premier ordre, ou à un système canonique de $6n - 10$ équations dont on connaît une intégrale, $H = \text{const}$.

Reprenons l'expression de la force vive qui renferme la rotation d'un méridien mobile

$$2T = \Sigma m(x' - y\Omega')^2 + \Sigma m(y' + x\Omega')^2 + \Sigma mz'^2.$$

Le méridien est déterminé par une équation $f(xyz) = 0$, qui donne

$$\frac{df}{dt} = \Sigma(x'f'_x + y'f'_y + z'f'_z) = 0.$$

Je supposerai que ce sont là les seules équations de condition, soit que le principe du centre de gravité n'ait pas lieu, soit qu'il ait lieu, mais qu'on ait pris pour origine un point canonique (ce qui a pour effet d'éliminer un des corps, sans changer la forme de T, comme je l'expliquerai plus loin). On pourrait maintenant éliminer deux variables, par exemple, y_0 et y'_0, à l'aide des deux équations $f = 0$, $\frac{df}{dt} = 0$;

T resterait une fonction homogène du second degré des vitesses, et on pourrait y appliquer la méthode d'Hamilton, comme nous l'avons fait plus haut. Mais il vaut mieux différentier l'expression $T + \alpha \frac{df}{dt}$, où α est un multiplicateur qui se détermine par la condition que $\frac{dT}{dy'_0} = 0$. On trouve de cette manière

$$\begin{aligned}
p &= \frac{dT}{dx'} = m(x' - y\Omega') + \alpha f'_x, \\
q &= \frac{dT}{dy'} = m(y' + x\Omega') + \alpha f'_y, \\
r &= \frac{dT}{dz'} = mz' \qquad\qquad + \alpha f'_z, \\
K &= \frac{dT}{d\Omega'} = \Sigma m(xy' - yx') + \Omega' \Sigma m(x^2 + y^2).
\end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de remplacer dans T les variables x', y', z', Ω' par les variables p, q, r, K. On a d'abord

$$\Sigma(qx - py) = K + \alpha\Sigma(xf'_y - yf'_x),$$

d'où

$$\alpha = -\frac{K - \Sigma(qx - py)}{\Sigma(xf'_y - yf'_x)};$$

ensuite

$$2T = \Sigma \frac{1}{m}[(p - \alpha f'_x)^2 + (q - \alpha f'_y)^2 + (r - \alpha f'_z)^2],$$

expression dans laquelle nous pouvons supposer l'une des variables p, q, r, par exemple q_0, égale à zéro, à cause du multiplicateur indéterminé; en même temps, nous pouvons éliminer la variable conjuguée y_0 par l'équation $f = 0$. La méthode d'Hamilton donne ensuite le système canonique d'équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dH}{dp}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{dH}{dx},$$

. . . .

avec la quadrature $\frac{d\Omega}{dt} = \frac{dH}{dK}$, et l'intégrale $K = \text{const.}$, qui nous permet de prendre pour K la constante des aires. La formule qui donne α ne cesse pas d'être vraie, si nous prenons $f = y_0 = 0$, d'où $y'_0 = 0$ et $q_0 = 0$. En effet, elle repose sur l'équation

$$q_0 = \frac{1}{2} m_0 \frac{d(y'_0 + x_0\Omega')^2}{x_0\, d\Omega'} + \alpha \frac{dy_0}{dy_0} = 0,$$

qui subsiste pour $y_0 = 0$. Dans ce cas, les dérivées partielles de f sont nulles, à l'exception d'une seule, qui est égale à l'unité. Nous avons, par suite, en supposant $y_0 = 0$, $q_0 = 0$,

$$2T = \Sigma \frac{1}{m}(p^2 + q^2 + r^2) + \frac{1}{m_0}\left(\frac{K - \Sigma(qx - py)}{x_0}\right)^2.$$

Si le principe du centre de gravité a lieu, on peut encore éliminer six variables, soit directement, en rapportant les coordonnées à un point canonique (ce qui permet d'exclure l'un des corps), soit indirectement, en prenant l'origine au centre de gravité et en ajoutant à T l'expression $\beta_1 \Sigma mx' + \beta_2 \Sigma my' + \beta_3 \Sigma mz'$, les multiplicateurs $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ devant être choisis de manière que trois des variables p, q, r s'évanouissent identiquement. On trouve alors

$$\begin{aligned}
p &= m(x' - y\Omega' + \beta_1) + \alpha f'_x,\\
q &= m(y' + x\Omega' + \beta_2) + \alpha f'_y,\\
r &= m(z' + \beta_3) \qquad\qquad + \alpha f'_z,\\
K &= \Sigma m(xy' - yx') + \Omega' \Sigma m(x^2 + y^2),
\end{aligned}$$

et, en tenant compte des équations

$$\begin{aligned}
\Sigma mx &= 0, \quad \Sigma my = 0, \quad \Sigma mz = 0,\\
\Sigma mx' &= 0, \quad \Sigma my' = 0, \quad \Sigma mz' = 0,
\end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned}
\Sigma(qx - py) &= K + \alpha\Sigma(xf'_y - yf'_x),\\
\Sigma p &= \beta_1 \Sigma m + \alpha \Sigma f'_x,\\
\Sigma q &= \beta_2 \Sigma m + \alpha \Sigma f'_y,\\
\Sigma r &= \beta_3 \Sigma m + \alpha \Sigma f'_z;
\end{aligned}$$

enfin

$$2\mathrm{T} = \Sigma \frac{1}{m}(p - m\beta_1 - \alpha f'_x)^2 + \ldots,$$

où il faut mettre pour α, β_1, β_2, β_3 les valeurs données par les équations ci-dessus. Pour prendre un exemple, supposons que le méridien mobile est un *plan nul*, d'après l'expression de M. Haton de la Goupillière, c'est-à-dire que $f = \Sigma mxy = 0$. Alors $f'_x = my$, $f'_y = mx$, $f'_z = 0$, $\Sigma f'_x = \Sigma f'_y = \Sigma f'_z = 0$.

Par suite,

$$\Sigma p = \beta_1 \Sigma m, \quad \Sigma q = \beta_2 \Sigma m, \quad \Sigma r = \beta_3 \Sigma m,$$
$$\Sigma(qx - py) = \mathrm{K} + \alpha \Sigma m(x^2 - y^2).$$

On tire de là

$$2\mathrm{T} = \Sigma \frac{1}{m}(p^2 + q^2 + r^2) - \frac{(\Sigma p)^2 + (\Sigma q)^2 + (\Sigma r)^2}{\Sigma m}$$
$$- 2\alpha \Sigma(qx + py) + \alpha^2 \Sigma m(x^2 + y^2),$$

ou bien, après quelques réductions,

$$2\mathrm{T} = \Sigma \frac{p^2 + q^2 + r^2}{m} - \frac{(\Sigma p)^2 + (\Sigma q)^2 + (\Sigma r)^2}{\Sigma m}$$
$$+ \frac{\Sigma mx^2(\mathrm{K} + 2\Sigma py)^2 + \Sigma my^2(\mathrm{K} - 2\Sigma qx)^2 - \Sigma m(x^2 + y^2)[\Sigma(py + qx)]^2}{[\Sigma m(x^2 - y^2)]^2}.$$

Dans cette expression, il est permis de supposer identiquement nulles les variables p_0, q_0, r_0 et p_1; en même temps on doit éliminer les variables conjuguées x_0, y_0, z_0, x_1, à l'aide des équations

$$\Sigma mx = 0, \quad \Sigma my = 0, \quad \Sigma mz = 0, \quad \Sigma mxy = 0.$$

On forme ensuite les $6n - 8$ équations

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dp}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dx}, \ldots,$$

dont on connaît trois intégrales (deux intégrales des aires et l'intégrale $\mathrm{H} = \text{const.}$), et d'où l'on peut encore éliminer dt.

Si nous avions pris pour origine un point canonique, nous aurions pu exclure dès le principe le corps m_0, et nous aurions trouvé

$$2T = \Sigma \frac{p^2+q^2+r^2}{m} - 2\alpha\Sigma(qx+py) + \alpha^2\Sigma m(x^2+y^2).$$

En supposant $p_1 = 0$, il faudrait éliminer x_1 par l'équation

$$\Sigma mxy = 0,$$

puis différentier H comme précédemment.

Les deux intégrales des aires dont nous n'avons pas fait usage peuvent s'écrire comme il suit, en supposant que l'axe des z est l'axe polaire,

$$\Sigma m(zx' - xz') - \Omega'\Sigma myz = 0,$$
$$\Sigma m(yz' - zy') - \Omega'\Sigma mxz = 0,$$

ou bien,

$$\Sigma(pz - rx) = \alpha\Sigma(z f'_x - xf'_z),$$
$$\Sigma(ry - qz) = \alpha\Sigma(y f'_z - zf'_y).$$

Quand le méridien mobile est un *plan nul*, nous avons $\Sigma mxy = 0$, et

$$\Sigma(pz - rx) = \alpha\Sigma myz,$$
$$\Sigma(ry - qz) = -\alpha\Sigma mzx,$$
$$\Sigma(qx - py) = \alpha\Sigma m(x^2 - y^2) + K.$$

L'élimination de α donne deux équations entre les variables x, y, z, p, q, r. La forme de ces intégrales est d'ailleurs la même, que l'on prenne pour origine le centre de gravité ou un point canonique.

II.

C'est ici le lieu de dire quelques mots de la transformation orthogonale par laquelle on peut réduire le mouvement d'un sytème libre de $n+1$ corps à un mouvement de n corps autour d'un centre d'attraction fixe. Cette transformation fait l'objet d'un Mémoire qui a paru dans les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure;* je me bornerai à en citer quelques résultats.

On sait qu'une substitution orthogonale laisse intacte la forme quadratique Σx^2, qui devient $\Sigma\xi^2$ lorsqu'on introduit les variables ξ à la place des variables x. Cela tient aux équations de condition qui existent entre les coefficients de la substitution et qui ont pour effet de faire disparaître de l'expression

$$\Sigma x^2 = \Sigma(a_0\xi_0 + a_1\xi_1 + \ldots)^2,$$

tous les produits $\xi_0\xi_1, \ldots$ qui ne sont pas des carrés. Plus généralement, on aura $\Sigma xy = \Sigma\xi\eta$, si la même substitution orthogonale a lieu entre les variables x, ξ, et entre les variables y, η, puisque la forme

$$\Sigma xy = \Sigma(a_0\xi_0 + a_1\xi_1 + \ldots)(a_0\eta_0 + a_1\eta_1 + \ldots)$$

a les mêmes coefficients que la forme Σx^2. Enfin, il est évident que l'on pourra ici remplacer les variables x, y par leurs dérivées, et que l'on pourra ajouter ensemble plusieurs équations telles que $\Sigma x^2 = \Sigma\xi^2$, $\Sigma y^2 = \Sigma\eta^2, \ldots$. On peut donc dire que la substitution orthogonale, appliquée simultanément à plusieurs systèmes de variables x_0, $x_1, \ldots$, y_0, $y_1, \ldots$, z_0, $z_1, \ldots$, laisse intacte la forme quadratique $\Sigma((x))$, où le symbole $((x))$ représente à volonté un produit ou une somme de produits tels que

$$\begin{array}{l}
xy, \quad x^2, \quad y^2, \quad x^2+y^2, \quad x^2+y^2+z^2, \\
x\,dx, \quad x\,dy - y\,dx, \\
dx^2, \quad dx^2+dy^2+dz^2, \\
d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
D_x^2 + D_y^2 + D_z^2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Si nous écrivons $\sqrt{m}x$ à la place de x, $\sqrt{\mu}\xi$ à la place de ξ, l'équation symbolique qui représente le résultat de la substitution orthogonale devient

$$\Sigma m((x)) = \Sigma \mu((\xi)),$$

où $\Sigma m((x))$ peut représenter les moments d'inertie, la force vive, le mouvement aréolaire, la variation de la fonction des forces :

$$\delta U = \frac{1}{dt^2} \Sigma m(d^2 x\, \delta x + d^2 y\, \delta y + d^2 z\, \delta z),$$

les paramètres différentiels :

$$\Delta^2 = \Sigma \frac{1}{m}(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2) \quad \text{et} \quad \nabla = \Sigma \frac{1}{2m}(D_x D_x + D_y D_y + D_z D_z),$$

ou d'autres formes analogues.

Nous pouvons maintenant spécialiser la substitution orthogonale en introduisant la condition que μ_0 soit la somme des $n+1$ masses m_0, $m_1, \ldots$, et que ξ_0, η_0, ζ_0 soient les coordonnées du centre de gravité de ces masses. J'ai trouvé que les coefficients de cette substitution spéciale du degré $n+1$ peuvent être formés, suivant une loi très-simple, au moyen des coefficients de la substitution générale du degré n. Nous avons, dès lors, en désignant par M la somme des masses m, et par X, Y, Z les coordonnées de leur centre de gravité,

$$\sum_0^n m_i((x_i)) = M((X)) + \sum_1^n \mu_i((\xi_i)).$$

De cette formule on tire la suivante :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} S &= \frac{1}{M} \Sigma m_i m_h ((x_i - x_h)) \\ &= \sum_0^n m_i((x_i)) - M((X)) = \sum_0^n m_i((x_i - X)) = \sum_1^n \mu_i((\xi_i)). \end{aligned} \right.$$

Le seul aspect de cette formule symbolique nous apprend que la force vive, le mouvement aréolaire, les moments d'inertie, le plan invariable, les axes principaux d'inertie, enfin la variation δU, sont les mêmes pour les n corps fictifs μ_1, $\mu_2, \ldots$, dont les coordonnées sont les ξ, η, ζ, et pour les $n+1$ corps donnés m_0, $m_1, \ldots$, ces derniers étant rapportés à leur centre de gravité par les coordonnées $x-X$, $y-Y$, $z-Z$. Les formules de transformation nous permettent d'exprimer ces $3n+3$ coordonnées par les $3n$ variables ξ, η, ζ; on peut donc exprimer U en fonction des mêmes variables. Dès lors, l'équation

$$dt^2 \delta U = \Sigma \mu (d^2\xi\, \delta\xi + d^2\eta\, \delta\eta + d^2\zeta\, \delta\zeta)$$

nous donne

$$\mu \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{dU}{d\xi}, \quad \mu \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{dU}{d\eta}, \quad \mu \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{dU}{d\zeta},$$

équations semblables à celles qu'on a pour les variables x, y, z. Le même raisonnement s'applique à la forme canonique des équations différentielles du mouvement, et l'on voit qu'elle a lieu pour les n corps fictifs comme pour les $n+1$ corps réels.

On peut d'ailleurs réduire cette transformation à un simple changement d'origine. En effet, la formule (1) montre que la somme S se réduit à n termes et qu'elle devient

$$S = \sum_1^n m_i((x_i)),$$

si nous prenons pour origine un *point canonique*, défini par la condition, que

$$m_0((x_0)) = M((X)),$$

ou bien

$$\sqrt{m_0}\, x_0 \pm \sqrt{M}\, X = 0.$$

Cela ne change pas la valeur de S, puisqu'elle ne dépend que des différences des coordonnées. Le mouvement des *n planètes* m_1, $m_2, \ldots$ a donc lieu autour du point canonique comme autour d'un centre fixe, car nous avons

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dU}{dx}, \ldots.$$

en remplaçant dans U les coordonnées x_0, y_0, z_0 par des fonctions linéaires des autres coordonnées. Si nous prenons le signe supérieur et $m_0 = 1$, il vient

$$x_0 = -\frac{1}{1+\sqrt{M}} \sum_1^n m_i x_i, \ldots$$

Les intégrales des forces vives et des aires ont lieu sans changement pour les n planètes rapportées au point mobile qui vient d'être défini, et les constantes H, K sont les mêmes que lorsqu'on rapporte les $n+1$ corps à leur centre de gravité. Le plan invariable et les axes principaux d'inertie sont aussi les mêmes dans les deux cas. Enfin, la transformation s'étend à l'équation aux dérivées partielles dont la solution complète fournit les intégrales du problème. J'appellerai *premier paramètre différentiel du système* le symbole déjà défini

$$\nabla = \Sigma \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d}{dz}\right)^2\right],$$

c'est-à-dire la demi-somme des carrés des paramètres différentiels du premier ordre dans la notation de M. Lamé. L'équation dont il s'agit peut alors s'écrire

$$\nabla W = U + H.$$

Or, la formule (1) montre que

$$\nabla W = \sum_1^n \frac{1}{2\mu}\left[\left(\frac{dW}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dW}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dW}{d\zeta}\right)^2\right] + \frac{1}{2M}\left[\left(\frac{dW}{dX}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dY}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dZ}\right)^2\right],$$

d'où il suit que l'équation aux dérivées partielles qui définit la fonction caractéristique W devient

$$\nabla_{(\xi)} W = U + H - \frac{1}{2M}\left[\left(\frac{dW}{dX}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dY}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dZ}\right)^2\right].$$

Le symbole $\nabla_{(\xi)}$ ne comprend plus que $3n$ termes au lieu de $3n+3$, et les dérivées partielles de W par rapport aux trois coordonnées X, Y, Z du centre de gravité ne figurent ici que comme des constantes, puisque U ne renferme pas les variables X, Y, Z.

Pour trois corps, la formule (1) donne encore cette relation curieuse :

$$(2) \qquad \mathrm{m}^2 \Sigma \frac{1}{m_i}((\mathrm{x}_i)) = \Sigma m_i((x_i - \mathrm{X})),$$

où

$$\mathrm{x}_1 = x_2 - x_3, \quad \mathrm{x}_2 = x_3 - x_1, \quad \mathrm{x}_3 = x_1 - x_2, \quad \mathrm{m}^2 = \frac{m_1 m_2 m_3}{\mathrm{M}}.$$

Il existe donc une substitution orthogonale entre les variables $\frac{\mathrm{m}\mathrm{x}_i}{\sqrt{m_i}}$ et $\sqrt{m_i}(x_i - \mathrm{X})$, c'est-à-dire entre les coordonnées relatives de trois masses et leurs coordonnées rapportées à leur centre de gravité. La substitution est la suivante :

$$\mathrm{x}_1 = x_2 - x_3 + \frac{m_1}{\mathrm{m}\mathrm{M}} \Sigma m_i (x_i - \mathrm{X}),$$

$$x_2 - x_3 = \mathrm{x}_1 - \frac{m_1}{\mathrm{M}} \Sigma \mathrm{x}_i,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et les neuf coefficients sont

$$\frac{m_1}{\mathrm{M}}, \quad \frac{\sqrt{m_1 m_2} + \sqrt{m_3 \mathrm{M}}}{\mathrm{M}}, \quad \frac{\sqrt{m_3 m_1} - \sqrt{m_2 \mathrm{M}}}{\mathrm{M}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si, dans la fonction des forces U, nous remplaçons les différences des coordonnées $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2, \ldots$ par des expressions de cette forme

$$\mathrm{x}_3 - \frac{m_3}{\mathrm{M}} \Sigma \mathrm{x}, \quad \mathrm{y}_3 - \frac{m_3}{\mathrm{M}} \Sigma \mathrm{y}, \ldots,$$

nous avons

$$\mathrm{m}^2 \frac{d^2 \mathrm{x}_3}{dt^2} = m_3 \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{x}_3}, \quad \mathrm{m}^2 \frac{d^2 \mathrm{y}_3}{dt^2} = m_3 \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{y}_3}, \ldots.$$

La transformation orthogonale par laquelle on se débarrasse des équations de condition $\Sigma m x = 0, \ldots$ du centre de gravité, existe entre les coordonnées *de même nom* d'un certain nombre de points matériels; elle est indépendante de la direction des axes coordonnés. Les points μ sont déterminés par les points m, en vertu d'équations analogues à celles qui déterminent les centres de gravité. Au contraire, la transformation orthogonale dont on se sert ordinairement ne détermine que la direction des axes; elle laisse intactes les expressions de la forme

$$x_i x_h + y_i y_h + z_i z_h,$$

où l'on peut remplacer les variables par leurs dérivées, si les coefficients de la transformation sont des constantes, c'est-à-dire si les axes restent fixes dans l'espace.

III.

Avant d'aller plus loin, il sera utile de rappeler quelques formules qui servent à la transformation des coordonnées. Considérons deux systèmes d'axes rectangulaires, l'un fixe, l'autre mobile, ayant même origine; soient x, y, z les *coordonnées fixes*, et x, y, z les *coordonnées mobiles* d'un point animé d'un mouvement indépendant. Désignons par a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3 les coordonnées mobiles des points d'intersection des axes fixes avec une sphère de rayon égal à l'unité, qui a l'origine pour centre; les coordonnées fixes des points d'intersection des axes mobiles avec la même sphère seront a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3. On aura les formules connues :

$$\begin{aligned} \mathrm{x} &= a_1 x + b_1 y + c_1 z, & x &= a_1 \mathrm{x} + a_2 \mathrm{y} + a_3 \mathrm{z}, \\ \mathrm{y} &= a_2 x + b_2 y + c_2 z, & y &= b_1 \mathrm{x} + b_2 \mathrm{y} + b_3 \mathrm{z}, \\ \mathrm{z} &= a_3 x + b_3 y + c_3 z, & z &= c_1 \mathrm{x} + c_2 \mathrm{y} + c_3 \mathrm{z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 z - c_1 y &= a_3 \mathrm{y} - a_2 \mathrm{z}, \\ c_1 x - a_1 z &= b_3 \mathrm{y} - b_2 \mathrm{z}, \\ a_1 y - b_1 x &= c_3 \mathrm{y} - c_2 \mathrm{z}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite. En remplaçant les coordonnées $x, y, z, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ par les coordonnées des points d'intersection de la sphère avec les axes, on aura

$$
\begin{array}{ll}
a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, & a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \\
a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0, & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= b_2 c_3 - b_3 c_2, \\
b_1 &= c_2 a_3 - c_3 a_2, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Je désignerai toujours par des lettres accentuées (x', y',...) les dérivées des variables prises par rapport au temps. Les composantes de la vitesse d'un point (xyz, xyz) seront représentées par des lettres surmontées d'un point $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\mathrm{x}}, \dot{\mathrm{y}}, \dot{\mathrm{z}}$); pour les axes fixes on aura donc $\mathrm{x}' = \dot{\mathrm{x}}$, $\mathrm{y}' = \dot{\mathrm{y}}$, $\mathrm{z}' = \dot{\mathrm{z}}$. Enfin, je me servirai d'un exposant o (x°, y°, z°, x°, y°, z°) pour désigner les rotations autour des axes, c'est-à-dire les composantes de la rotation du système mobile. Les vitesses étant considérées comme des longueurs prises dans la direction du mouvement, les rotations comme des longueurs portées sur l'axe de rotation, les aires ou vitesses aréolaires comme des longueurs portées sur la normale à l'orbite, on peut les projeter sur les axes coordonnés comme les rayons vecteurs et les distances; nous aurons

$$
\begin{array}{ll}
\dot{\mathrm{x}} = a_1 \dot{x} + b_1 \dot{y} + c_1 \dot{z}, & \dot{x} = a_1 \dot{\mathrm{x}} + a_2 \dot{\mathrm{y}} + a_3 \dot{\mathrm{z}}, \\
\mathrm{x}^{\circ} = a_1 x^{\circ} + b_1 y^{\circ} + c_1 z^{\circ}, & x^{\circ} = a_1 \mathrm{x}^{\circ} + a_2 \mathrm{y}^{\circ} + a_3 \mathrm{z}^{\circ}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

comme pour les coordonnées. Nous prendrons les rotations dans le sens indiqué ci-après :

$$
\begin{array}{ccccccc}
y & \rightarrow & z & \rightarrow & x & \rightarrow & y, \\
 & +x^{\circ} & & +y^{\circ} & & +z^{\circ} &
\end{array}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
x^{\circ} &= c_1 b'_1 + c_2 b'_2 + c_3 b'_3 = - b_1 c'_1 - b_2 c'_2 - b_3 c'_3, \\
y^{\circ} &= a_1 c'_1 + a_2 c'_2 + a_3 c'_3 = - c_1 a'_1 - c_2 a'_2 - c_3 a'_3, \\
z^{\circ} &= b_1 a'_1 + b_2 a'_2 + b_3 a'_3 = - a_1 b'_1 - a_2 b'_2 - a_3 b'_3.
\end{aligned}
$$

De même

$$
\begin{aligned}
\mathrm{x}^{\circ} &= a_2 a'_3 + b_2 b'_3 + c_2 c'_3 = - a_3 a'_2 - b_3 b'_2 - c_3 c'_2,\\
\mathrm{y}^{\circ} &= a_3 a'_1 + b_3 b'_1 + c_3 c'_1 = - a_1 a'_3 - b_1 b'_3 - c_1 c'_3,\\
\mathrm{z}^{\circ} &= a_1 a'_2 + b_1 b'_2 + c_1 c'_2 = - a_2 a'_1 - b_2 b'_1 - c_2 c'_1.
\end{aligned}
$$

Pour les vitesses absolues d'un point (x, y, z) dans les directions des axes mobiles, on aura

$$
(3)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\dot{x} &= x' + y^{\circ} z - z^{\circ} y,\\
\dot{y} &= y' + z^{\circ} x - x^{\circ} z,\\
\dot{z} &= z' + x^{\circ} y - y^{\circ} x.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces vitesses étant nulles pour les points des axes fixes dont les coordonnées mobiles sont a, b, c, nous avons

$$
\mathrm{o} = a' + y^{\circ} c - z^{\circ} b,
$$

et ainsi de suite, ou bien

$$
\begin{aligned}
a'_1 &= z^{\circ} b_1 - y^{\circ} c_1 = \mathrm{y}^{\circ} a_3 - \mathrm{z}^{\circ} a_2,\\
b'_1 &= x^{\circ} c_1 - z^{\circ} a_1 = \mathrm{y}^{\circ} b_3 - \mathrm{z}^{\circ} b_2,\\
c'_1 &= y^{\circ} a_1 - x^{\circ} b_1 = \mathrm{y}^{\circ} c_3 - \mathrm{z}^{\circ} c_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

On tire de là

$$
(4)\qquad \left\{
\begin{aligned}
x^{\circ} a'_1 + y^{\circ} b'_1 + z^{\circ} c'_1 &= \mathrm{o},\\
x^{\circ} a'_2 + y^{\circ} b'_2 + z^{\circ} c'_2 &= \mathrm{o},\\
x^{\circ} a'_3 + y^{\circ} b'_3 + z^{\circ} c'_3 &= \mathrm{o},
\end{aligned}
\right.
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{x}^{\circ} a'_1 + \mathrm{y}^{\circ} a'_2 + \mathrm{z}^{\circ} a'_3 = \mathrm{o},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
&d\mathrm{x}^{\circ} = a_1\, dx^{\circ} + b_1\, dy^{\circ} + c_1\, dz^{\circ},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Enfin nous avons

$$
\begin{aligned}
x^{\circ} &= a_1 \mathrm{x}^{\circ} - b_1 c'_1 + c_1 b'_1 = a_2 \mathrm{y}^{\circ} - b_2 c'_2 + c_2 b'_2 = a_3 \mathrm{z}^{\circ} - b_3 c'_3 + c_3 b'_3,\\
y^{\circ} &= b_1 \mathrm{x}^{\circ} - c_1 a'_1 + a_1 c'_1 = b_2 \mathrm{y}^{\circ} - c_2 a'_2 + a_2 c'_2 = b_3 \mathrm{z}^{\circ} - c_3 a'_3 + a_3 c'_3,\\
z^{\circ} &= c_1 \mathrm{x}^{\circ} - a_1 b'_1 + b_1 a'_1 = c_2 \mathrm{y}^{\circ} - a_2 b'_2 + b_2 a'_2 = c_3 \mathrm{z}^{\circ} - a_3 b'_3 + b_3 a'_3,
\end{aligned}
$$

formules qui expriment les trois rotations autour des axes mobiles par la rotation autour d'un axe fixe et par les dérivées des cosinus qui déterminent cet axe fixe par rapport aux axes mobiles. Les trois cosinus d'un axe ne représentent que deux variables indépendantes, les neuf cosinus d'une transformation orthogonale n'en représentent que trois. On les exprime ordinairement par l'inclinaison I du plan des x, y sur le plan des x, y, et par les angles Ω, φ que l'intersection de ces plans fait avec les axes des x et des x; j'appellerai Ω la longitude du nœud, et φ l'azimut de l'axe des x. Nous aurons

$$\begin{aligned}
a_3 &= \sin I \sin\varphi, & x^0 &= \Omega' \sin I \sin\varphi + I' \cos\varphi,\\
b_3 &= \sin I \cos\varphi, & y^0 &= \Omega' \sin I \cos\varphi - I' \sin\varphi,\\
c_3 &= \cos I, & z^0 &= \Omega' \cos I + \varphi',\\
& & \mathrm{z}^0 &= \Omega' + \varphi' \cos I.
\end{aligned}$$

En prenant le nœud pour axe des x, on aurait $\varphi = 0$, et

$$x^0 = I', \quad y^0 = \Omega' \sin I, \quad z^0 = \Omega' \cos I, \quad \mathrm{z}^0 = \Omega'.$$

On voit que les rotations dépendent en général de deux angles et de trois vitesses angulaires. On peut encore les exprimer d'une manière assez élégante par les longitudes Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 des intersections du plan des x, y avec les trois plans des y, z, des z, x et des x, y. Je ferai

$$\Psi_2 - \Psi_3 = \theta_1, \quad \Psi_3 - \Psi_1 = \theta_2, \quad \Psi_1 - \Psi_2 = \theta_3,$$

d'où

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0.$$

Alors, en désignant encore par I_1, I_2, I_3 les inclinaisons des trois plans :

$$\begin{aligned}
\mathrm{x} &= x \sin I_1 \sin\Psi_1 + y \sin I_2 \sin\Psi_2 + z \sin I_3 \sin\Psi_3,\\
\mathrm{y} &= -x \sin I_1 \cos\Psi_1 - y \sin I_2 \cos\Psi_2 - z \sin I_3 \cos\Psi_3,\\
\mathrm{z} &= x \cos I_1 + y \cos I_2 + z \cos I_3,
\end{aligned}$$

ou bien, en faisant

$$\Theta^2 = -2\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 = \frac{1}{2}(\sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_2 + \sin 2\theta_3)$$

et

$$\Phi^2 = \operatorname{tang}\theta_1\operatorname{tang}\theta_2\operatorname{tang}\theta_3,$$

$$\mathrm{x}\Theta = x\sqrt{\sin 2\theta_1}\sin\Psi_1 + y\sqrt{\sin 2\theta_2}\sin\Psi_2 + z\sqrt{\sin 2\theta_3}\sin\Psi_3,$$
$$\mathrm{y}\Theta = -x\sqrt{\sin 2\theta_1}\cos\Psi_1 - y\sqrt{\sin 2\theta_2}\cos\Psi_2 - z\sqrt{\sin 2\theta_3}\cos\Psi_3,$$
$$\mathrm{z}\Phi = x\sqrt{\operatorname{tang}\theta_1} + y\sqrt{\operatorname{tang}\theta_2} + z\sqrt{\operatorname{tang}\theta_3}.$$

Soit maintenant

$$l_1 = \Psi'_1\sin^2\mathrm{I}_1 = \Psi'_1\frac{\sin 2\theta_1}{\Theta^2} = -\Psi'_1\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_2\sin\theta_3},$$

de même

$$l_2 = \Psi'_2\sin^2\mathrm{I}_2,\quad l_3 = \Psi'_3\sin^2\mathrm{I}_3,$$

on aura

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{z}^0 &= l_1 + l_2 + l_3,\\ 2\cos\mathrm{I}_1\,x^0 &= -l_1 + l_2 + l_3,\\ 2\cos\mathrm{I}_2\,y^0 &= +l_1 - l_2 + l_3,\\ 2\cos\mathrm{I}_3\,z^0 &= +l_1 + l_2 - l_3, \end{aligned}$$

et les angles I_1, I_2, I_3, compris entre les axes mobiles et l'axe fixe des z, s'expriment par les longitudes des trois nœuds à l'aide des formules

$$\cos^2\mathrm{I}_1 = \operatorname{cotang}\theta_2\operatorname{cotang}\theta_3,\quad \sin^2\mathrm{I}_1 = \frac{\sin 2\theta_1}{\Theta^2},\ldots$$

On voit que les rotations dépendent ici des trois vitesses angulaires Ψ'_1, Ψ'_2, Ψ'_3, et des trois différences θ_1, θ_2, θ_3, lesquelles ne représentent que deux variables, puisque leur somme est nulle. Nous pouvons écrire

$$\mathrm{z}^0 = \frac{\Psi'_1\sin 2\theta_1 + \Psi'_2\sin 2\theta_2 + \Psi'_3\sin 2\theta_3}{\sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_2 + \sin 2\theta_3},$$
$$x^0 = \frac{\Psi'_1\sin 2\theta_1 - \Psi'_2\sin 2\theta_2 - \Psi'_3\sin 2\theta_3}{\sin\theta_1\sqrt{\sin 2\theta_2 . \sin 2\theta_3}},$$

. . . .

IV.

La force vive d'un système de points matériels s'exprimera maintenant par la formule

$$
\begin{aligned}
2\mathrm{T} &= \Sigma m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\\
&= \Sigma m(x' + y^0 z - z^0 y)^2 + \Sigma m(y' + z^0 x - x^0 z)^2 + \Sigma m(z' + x^0 y - y^0 x)^2.
\end{aligned}
$$

Le double de l'aire qu'un rayon vecteur décrit dans l'unité de temps peut se projeter sur les trois plans mobiles, ce qui donne les trois composantes

$$y\dot{z} - z\dot{y}, \quad z\dot{x} - x\dot{z}, \quad x\dot{y} - y\dot{x},$$

que nous pouvons nous figurer comme des longueurs portées sur les axes mobiles des x, y, z. Je les supposerai toujours multipliées par les masses, et j'appellerai *mouvement aréolaire autour de l'axe des* z la somme

$$\Sigma m(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Les mouvements aréolaires sont les dérivées partielles de la demi-force vive par rapport aux rotations; en effet

$$\frac{d\mathrm{T}}{dz^0} = \Sigma m\left(\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dz^0} + \dot{y}\frac{d\dot{y}}{dz^0}\right) = \Sigma m(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

On aura d'ailleurs

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathrm{T}}{dx^0} &= \Sigma m(yz' - zy') + x^0\,\Sigma m(y^2 + z^2) - y^0\,\Sigma m xy - z^0\,\Sigma m zx,\\
\frac{d\mathrm{T}}{dy^0} &= \Sigma m(zx' - xz') + y^0\,\Sigma m(z^2 + x^2) - z^0\,\Sigma m yz - x^0\,\Sigma m xy,\\
\frac{d\mathrm{T}}{dz^0} &= \Sigma m(xy' - yx') + z^0\,\Sigma m(x^2 + y^2) - x^0\,\Sigma m zx - y^0\,\Sigma m yz.
\end{aligned}
$$

Dans le cas où les plans mobiles sont les plans principaux d'inertie, on aura, en désignant par A, B, C les moments d'inertie principaux,

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{dT}{dx^0} = \Sigma m(yz' - zy') + x^0 A, \\ \dfrac{dT}{dy^0} = \Sigma m(zx' - xz') + y^0 B, \\ \dfrac{dT}{dz^0} = \Sigma m(xy' - yx') + z^0 C. \end{cases}$$

Si nous prenons pour axe des z l'axe polaire, c'est-à-dire la normale au plan invariable, les intégrales des aires nous apprennent que le mouvement aréolaire autour de cet axe est égal à une constante K, et qu'il est nul autour d'un axe quelconque perpendiculaire au premier. Il s'ensuit que le mouvement aréolaire autour d'un des axes mobiles sera égal à la projection de K sur cet axe, K étant une longueur portée sur l'axe polaire, et que les intégrales des aires pourront s'écrire

$$(6)\qquad \frac{dT}{dx^0} = Ka, \quad \frac{dT}{dy^0} = Kb, \quad \frac{dT}{dz^0} = Kc,$$

où a, b, c sont les trois cosinus de l'axe polaire.

La force vive étant une fonction homogène du second degré par rapport aux vitesses apparentes x', y', z' et aux rotations x^0, y^0, z^0, on aura

$$T = \Sigma\left(x'\frac{dT}{dx'} + y'\frac{dT}{dy'} + z'\frac{dT}{dz'}\right) + x^0\frac{dT}{dx^0} + y^0\frac{dT}{dy^0} + z^0\frac{dT}{dz^0} - T,$$

et en prenant les différentielles totales

$$dT = \Sigma\left(x'd\frac{dT}{dx'} + \ldots - \frac{dT}{dx}dx - \ldots\right) + x^0 d\frac{dT}{dx^0} + \ldots,$$

ou bien, en faisant

$$\frac{dT}{dx'} = p, \quad \frac{dT}{dy'} = q, \quad \frac{dT}{dz'} = r,$$

$$dT = \Sigma\left(x'dp + \ldots - \frac{dT}{dx}dx - \ldots\right) + x^0 d\frac{dT}{dx^0} + \ldots.$$

Si les intégrales des aires ont lieu, nous pouvons remplacer les dérivées $\frac{dT}{dx^0}, \cdots$ par $Ka, \ldots$, et alors

$$dT = \Sigma\left(x' dp - \frac{dT}{dx} dx\right) + \ldots + K(x^0 da + y^0 db + z^0 dc).$$

Si, d'un autre côté, nous éliminons les variables $x', y', z', x^0, y^0, z^0$, à l'aide des relations linéaires

$$p = \frac{dT}{dx'}, \ldots, \quad Ka = \frac{dT}{dx^0}, \ldots,$$

la force vive devient une fonction homogène du second degré des variables p, q, r, a, b, c; elle renferme en outre les variables x, y, z. Il s'ensuit que, sous cette forme,

$$dT = \Sigma\left(\frac{dT}{dp}\right) dp + \Sigma\left(\frac{dT}{dx}\right) dx + \ldots + \left(\frac{dT}{da}\right) da + \ldots.$$

Cette expression doit être identique à la première, puisque l'une se déduit de l'autre par une simple transformation littérale; donc

$$x' = \left(\frac{dT}{dp}\right), \quad \frac{dT}{dx} = -\left(\frac{dT}{dx}\right), \quad Kx^0 = \left(\frac{dT}{da}\right),$$

. . . .

pour toutes les variables employées. On peut d'ailleurs remarquer qu'en vertu des intégrales des aires le dernier terme de dT, qui dépend des rotations, s'évanouit, en supposant que les rotations soient exprimées en fonction des trois cosinus a, b, c. En effet, si nous désignons par z^0 la rotation autour de l'axe polaire, les formules (4) donnent

$$ax^0 + by^0 + cz^0 = z^0,$$
$$x^0 da + y^0 db + z^0 dc = 0.$$

On tire de là

$$2T = \Sigma(px' + qy' + rz') + Kz^0,$$

et

$$dT = \Sigma(x' dp + y' dq + z' dr) - \Sigma\left(\frac{dT}{dx} dx + \frac{dT}{dy} dy + \frac{dT}{dz} dz\right).$$

Par conséquent aussi

$$\left(\frac{d\mathrm{T}}{da}\right) da + \left(\frac{d\mathrm{T}}{db}\right) db + \left(\frac{d\mathrm{T}}{dc}\right) dc = 0.$$

On a d'ailleurs

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad ada + bdb + cdc = 0,$$

et, à cause des relations

$$a' = bz^0 - cy^0, \ldots$$

que nous avons démontrées plus haut,

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}\frac{da}{dt} &= b\left(\frac{d\mathrm{T}}{dc}\right) - c\left(\frac{d\mathrm{T}}{db}\right),\\
\mathrm{K}\frac{db}{dt} &= c\left(\frac{d\mathrm{T}}{da}\right) - a\left(\frac{d\mathrm{T}}{dc}\right),\\
\mathrm{K}\frac{dc}{dt} &= a\left(\frac{d\mathrm{T}}{db}\right) - b\left(\frac{d\mathrm{T}}{da}\right).
\end{aligned}$$

Des deux premières de ces équations on déduit

$$\mathrm{K}(a'b - ab') = (a^2 + b^2)\left(\frac{d\mathrm{T}}{dc}\right) - ac\left(\frac{d\mathrm{T}}{da}\right) - bc\left(\frac{d\mathrm{T}}{db}\right).$$

Or, si l'on pose

$$a = \sqrt{1 - c^2}\sin\varphi, \quad b = \sqrt{1 - c^2}\cos\varphi,$$

on aura

$$\frac{da}{dc} = -\frac{ac}{a^2 + b^2}, \quad \frac{db}{dc} = -\frac{bc}{a^2 + b^2}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{a'b - ab'}{a^2 + b^2}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}\frac{d\varphi}{dt} &= \left(\frac{d\mathrm{T}}{dc}\right) + \left(\frac{d\mathrm{T}}{da}\right)\frac{da}{dc} + \left(\frac{d\mathrm{T}}{db}\right)\frac{db}{dc}\\
&= \frac{d\mathrm{T}}{dc}.
\end{aligned}$$

D'un autre côté, la troisième équation donne

$$\begin{aligned} \mathrm{K}\frac{dc}{dt} &= \sin\varphi\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\cos\varphi}\right) - \cos\varphi\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\sin\varphi}\right) \\ &= -\frac{d\mathrm{T}}{d\varphi}. \end{aligned}$$

On voit que l'azimut φ de l'axe des x et le cosinus c de l'angle compris entre l'axe des z et l'axe polaire sont des variables conjuguées. Le nœud Ω n'est point entré dans les équations. Pour compléter le système des équations différentielles, nous écrirons les équations du mouvement sous la forme adoptée par Lagrange :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(\mathrm{T}+\mathrm{U})}{dx}, \ldots.$$

Il faut ici supposer que les coordonnées x, y, z ont été réduites au plus petit nombre possible à l'aide des équations de condition, ce qui n'empêche pas T d'être une fonction homogène des x', y', z', et n'a, par conséquent, aucune influence sur le raisonnement qui vient d'être présenté. Les équations ci-dessus sont d'ailleurs évidemment indépendantes du choix des variables par lesquelles on remplacera les rotations x^0, y^0, z^0, et, puisque $\frac{d\mathrm{T}}{dx} = -\left(\frac{d\mathrm{T}}{dx}\right)$, elles donnent

$$\frac{dp}{dt} = -\left(\frac{d\mathrm{H}}{dx}\right), \ldots,$$

où $\mathrm{H} = \mathrm{T} - \mathrm{U}$. Si nous supprimons les parenthèses, nous avons le système canonique

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dp}, && \frac{dp}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dx}, \ldots, \\ &\frac{dy}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dq}, && \frac{dq}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dy}, \ldots, \\ &\frac{dz}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dr}, && \frac{dr}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dz}, \ldots, \\ &\mathrm{K}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dc}, && \mathrm{K}\frac{dc}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{d\varphi}. \end{aligned}\right.$$

Les équations du centre de gravité et les trois équations de condition qui déterminent les axes mobiles réduisent le nombre des variables x, y, z à $3n - 6$; le nombre des équations ci-dessus n'est donc que de $6n - 12 + 2 = 6n - 10$. Nous avons, en outre, l'intégrale $\mathrm{H} = \text{const.}$; donc, si nous éliminons la différentielle du temps dt, notre système ne représente en définitive que $6n - 12$ équations du premier ordre.

La constante K n'entre dans T que multipliée par a, b, c; par conséquent

$$\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{K}}\right) = \Sigma \frac{a}{\mathrm{K}}\left(\frac{d\mathrm{T}}{da}\right) = ax^{\circ} + by^{\circ} + cz^{\circ} = \mathrm{z}^{\circ},$$

ou bien

$$\mathrm{z}^{\circ} = \frac{d\mathrm{H}}{d\mathrm{K}}. \tag{8}$$

Quand on n'a qu'une seule intégrale des aires, il faut faire coïncider l'axe des z avec l'axe polaire, ce qui donne

$$x^{\circ} = y^{\circ} = 0, \quad z^{\circ} = \Omega', \quad \frac{d\mathrm{T}}{dz^{\circ}} = \mathrm{K}.$$

Dans ce cas, nous avons une seule équation entre les coordonnées (elle détermine l'axe mobile des x); le nombre des équations différentielles est alors de $6n - 2$, elles représentent $6n - 4$ équations du premier ordre en comptant l'intégrale $\mathrm{H} = \text{const.}$, et l'élimination de dt. La seule inconnue que l'on introduise par l'emploi des axes mobiles est ici la longitude Ω; elle se détermine par la quadrature

$$\Omega' = \frac{d\mathrm{H}}{d\mathrm{K}}.$$

Si nous exprimons les rotations par trois angles ψ_1, ψ_2, ψ_3 et trois vitesses angulaires ψ'_1, ψ'_2, ψ'_3, la différentielle $d\mathrm{T}$ renfermera le terme

$$\Sigma\left(\psi' d\pi - \frac{d\mathrm{T}}{d\psi} d\psi\right),$$

qui devra s'annuler par les intégrales des aires. Néanmoins, si nous éliminons x', y', z',..., ψ' par les relations linéaires

$$p = \frac{dT}{dx'}, \ldots, \quad \pi = \frac{dT}{d\psi'},$$

nous pourrons raisonner comme précédemment en comparant les deux expressions de dT obtenues avant et après l'élimination. Nous aurons

$$\begin{aligned} dT &= \Sigma\left(x'dp - \frac{dT}{dx}dx\right) + \ldots + \Sigma\left(\psi' d\pi - \frac{dT}{d\psi}d\psi\right) \\ &= \Sigma\left(\frac{dT}{dp}\right)dp + \Sigma\left(\frac{dT}{dx}\right)dx + \ldots + \Sigma\left(\frac{dT}{d\pi}\right)d\pi + \Sigma\left(\frac{dT}{d\psi}\right)d\psi; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} x' &= \left(\frac{dT}{dp}\right), \quad \frac{dT}{dx} = -\left(\frac{dT}{dx}\right), \ldots, \\ \psi' &= \left(\frac{dT}{d\pi}\right), \quad \frac{dT}{d\psi} = -\left(\frac{dT}{d\psi}\right), \ldots. \end{aligned}$$

Les équations de Lagrange donnent ensuite

$$\frac{dp}{dt} = -\left(\frac{dH}{dx}\right), \ldots, \quad \frac{d\pi}{dt} = -\left(\frac{dH}{d\psi}\right), \ldots.$$

On tirerait de là le système canonique

$$\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dH}{dp}, \quad \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{dH}{dx}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{d\psi}{dt} = \dfrac{dH}{d\pi}, \quad \dfrac{d\pi}{dt} = -\dfrac{dH}{d\psi}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Mais ce système se simplifie par les intégrales des aires. En effet, si nous prenons pour les variables ψ les longitudes Ψ des nœuds des plans mobiles, les rotations ne renferment que les différences $\theta_1 = \Psi_2 - \Psi_3, \ldots$, et nous avons

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0.$$

D'un autre côté, en vertu des intégrales des aires,

$$\frac{dT}{d\Psi'} = \Sigma \frac{dT}{dx^\circ} \frac{dx^\circ}{d\Psi'} = K\,\Sigma \frac{a\,dx^\circ}{d\Psi'} = K \frac{dz^\circ}{d\Psi'},$$

ou bien

$$\pi = \frac{K \sin 2\theta}{2\Theta^2} = \frac{K \sin 2\theta}{\Sigma \sin 2\theta},$$

d'où

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = K$$

et

$$\pi_1^2 + \pi_2^2 + 2\pi_1 \pi_2 \cos 2\theta_3 = \pi_3^2, \ldots.$$

Les six variables θ, π ne représentent donc en définitive que deux variables indépendantes. On aura d'ailleurs

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta_1}{dt} &= \left(\frac{dT}{d\pi_2}\right) - \left(\frac{dT}{d\pi_3}\right),\\
\frac{d\pi_1}{dt} &= \left(\frac{dT}{d\theta_2}\right) - \left(\frac{dT}{d\theta_3}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Lorsqu'on exprime les rotations par les variables φ, I, φ', I', Ω', on a, comme nous l'avons vu,

$$\begin{aligned}
a &= \sin I \sin\varphi, & x^\circ &= \Omega' a + I' \cos\varphi,\\
b &= \sin I \cos\varphi, & y^\circ &= \Omega' b - I' \sin\varphi,\\
c &= \cos I, & z^\circ &= \Omega' c + \varphi',\\
 & & z^\circ &= \Omega' \quad + \varphi' c.
\end{aligned}$$

Les intégrales des aires peuvent se mettre sous les formes suivantes :

$$\frac{dT}{d\Omega'} = K, \quad \frac{dT}{dI'} = 0, \quad \frac{dT}{dI} = 0, \quad \frac{dT}{d\varphi'} = Kc, \quad \frac{dT}{d\varphi} = Kc'.$$

Si nous éliminons les vitesses angulaires Ω', I', φ' à l'aide des relations linéaires ci-dessus, nous pouvons raisonner comme précédemment pour les variables ψ', et nous trouvons que les équations

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{d\mathrm{H}}{dp}\right), \quad \frac{dp}{dt} = -\left(\frac{d\mathrm{H}}{dx}\right), \ldots$$

subsistent toujours; seulement l'expression de H renferme, à la place des trois variables π_1, π_2, π_3, les valeurs de $\frac{d\mathrm{T}}{d\Omega'}$, $\frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{I}'}$, $\frac{d\mathrm{T}}{d\varphi'}$, qui sont : K, o, K$c$. Il ne reste donc dans H, à côté des variables x, y, z, p, q, r, que φ et $c = \cos \mathrm{I}$. La comparaison des deux valeurs de $d\mathrm{T}$, obtenues avant et après l'élimination, donne encore

$$\frac{d\mathrm{T}}{d\varphi} = -\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\varphi}\right),$$

d'où

$$\mathrm{K}\frac{dc}{dt} = -\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\varphi}\right) = -\left(\frac{d\mathrm{H}}{d\varphi}\right)$$

par les équations de Lagrange et par les intégrales des aires. Enfin, la partie de $d\mathrm{T}$ qui dépend des rotations devant s'annuler par les intégrales des aires, on aura, après l'élimination,

$$\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\varphi}\right) d\varphi + \left(\frac{d\mathrm{T}}{dc}\right) dc = 0,$$

d'où

$$\mathrm{K}\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{d\mathrm{T}}{dc}\right) = \left(\frac{d\mathrm{H}}{dc}\right).$$

On retombe ainsi sur le système canonique

$$(7) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d\mathrm{H}}{dp}, \quad \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{d\mathrm{H}}{dx}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{K}\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{d\mathrm{H}}{dc}, \quad \mathrm{K}\dfrac{dc}{dt} = -\dfrac{d\mathrm{H}}{d\varphi}, \end{array}\right.$$

que nous avons obtenu précédemment. On a enfin, par les équations de Lagrange,

$$\frac{d\Omega}{dt} = \left(\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{K}}\right)\right),$$

en considérant K comme la dérivée partielle $\frac{dT}{d\Omega'}$, introduite dans T par l'élimination des variables φ', I', Ω'. La constante K existe, en outre, dans l'expression de T comme facteur de la dérivée partielle $\frac{dT}{d\varphi'} = \mathrm{K}c$. Or, il est facile de voir que

$$\left(\frac{dT}{d\mathrm{K}c}\right) = \frac{1}{\mathrm{K}}\left(\frac{dT}{dc}\right).$$

En effet,

$$\frac{1}{\mathrm{K}}\left(\frac{dT}{dc}\right) = \left(\frac{dT}{d\mathrm{K}c}\right) + \frac{1}{\mathrm{K}}\left(\frac{dT}{d\cos\mathrm{I}}\right),$$

en considérant I comme une fonction de c qui existe dans T à côté de Kc; or les intégrales des aires montrent que, dans ce sens,

$$\left(\frac{dT}{d\mathrm{I}}\right) = -\frac{dT}{d\mathrm{I}} = 0;$$

d'où il suit qu'on obtient le même résultat en différentiant par rapport à (Kc) ou bien par rapport à $c = \cos\mathrm{I}$. Donc

$$z^0 = \Omega' + \varphi' c = \left(\left(\frac{dT}{d\mathrm{K}}\right)\right) + c\left(\frac{dT}{d\mathrm{K}c}\right) = \left(\frac{dT}{d\mathrm{K}}\right),$$

ou bien

$$z^0 = \frac{dH}{d\mathrm{K}},$$

comme auparavant. La rotation autour de l'axe polaire est la dérivée partielle de la constante des forces vives par rapport à la constante des aires. Pour Ω on aura la quadrature

$$(9) \qquad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{dH}{d\mathrm{K}} - \frac{c}{\mathrm{K}}\frac{dH}{dc}.$$

Au lieu de déterminer trois axes mobiles par trois équations entre les coordonnées, on peut se contenter de déterminer par deux équations le plan des xy, et prendre pour axe des z la normale à ce plan, pour axe des x la ligne des nœuds. Dans ce cas, on a $\varphi = 0$, $x^0 = \mathrm{I}'$, $y^0 = \Omega' \sin \mathrm{I}$, $z^0 = \Omega' \cos \mathrm{I}$, $z^0 = \Omega'$. Les intégrales des aires sont toujours

$$\frac{d\mathrm{T}}{d\Omega'} = \mathrm{K}, \quad \frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{I}'} = 0, \quad \frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{I}} = 0.$$

On a encore

$$\left(\frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{I}}\right) = -\frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{I}} = 0,$$

et cette équation montre qu'il est permis de remplacer I dans T par une fonction des autres variables *avant* la différentiation, c'est-à-dire que nous pourrons mettre pour I sa valeur tirée des intégrales des aires. On peut donc éliminer Ω', I' et I par ces intégrales et former ensuite le système canonique

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dp}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dx}, \ldots.$$

Cela se voit d'ailleurs immédiatement par la comparaison des deux valeurs de $d\mathrm{T}$:

$$\begin{aligned} d\mathrm{T} &= \Sigma\left(x'dp - \frac{d\mathrm{T}}{dx}dx\right) + \Omega' d\mathrm{K} + \mathrm{I}' d\frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{I}'} - \frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{I}}d\mathrm{I} \\ &= \Sigma\left(\frac{d\mathrm{T}}{dp}\right)dp + \Sigma\left(\frac{d\mathrm{T}}{dx}\right)dx. \end{aligned}$$

On a ensuite

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{d\mathrm{K}}. \tag{10}$$

Lorsqu'on fait $\mathrm{I} = 0$, de sorte que l'axe polaire devient l'axe des z, on n'a que Ω' à éliminer par l'intégrale $\frac{d\mathrm{T}}{d\Omega'} = \mathrm{K}$. Les deux autres intégrales des aires, si elles existent, pourront servir ensuite à éliminer deux variables quelconques *après* la formation du système canonique. Dans le cas de deux corps, ces intégrales donnent $z = 0$, $z' = 0$; elles équivalent donc alors à une équation entre les coordonnées.

En résumé, on voit que les équations du mouvement peuvent toujours être présentées sous la forme canonique après qu'on a employé les intégrales des aires à éliminer les rotations d'axes mobiles, et que le nombre des équations de condition que l'on gagne par l'usage de coordonnées mobiles dépasse d'une unité celui des variables nouvelles que l'on est obligé d'introduire; d'où il suit qu'en définitive le nombre des équations différentielles se trouve diminué de quatre unités par les intégrales des aires.

V.

Jusqu'ici nous avons supposé que les variables x', y', z' étaient réduites au plus petit nombre possible par une élimination préalable. Nous allons voir qu'il est encore facile de former les équations du mouvement quand ces variables sont liées par les trois équations du centre de gravité et par les trois qui déterminent les axes mobiles. Soient

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0$$

les équations des axes. Si l'on ajoute l'expression

$$\alpha_1 \frac{df_1}{dt} + \alpha_2 \frac{df_2}{dt} + \alpha_3 \frac{df_3}{dt} + \beta_1 \Sigma mx' + \beta_2 \Sigma my' + \beta_3 \Sigma mz'$$

à celle de la force vive, qui était

$$\begin{aligned} \mathrm{T} = {} & \frac{1}{2}\Sigma m(x' + y^0 z - z^0 y)^2 + \frac{1}{2}\Sigma m(y' + z^0 x - x^0 z)^2 \\ & + \frac{1}{2}\Sigma m(z' + x^0 y - y^0 x)^2, \end{aligned}$$

la différentiation donne

$$\begin{aligned} \frac{d\mathrm{T}}{dx'} &= p = m(x' + y^0 z - z^0 y + \beta_1) + \alpha_1 \frac{df_1}{dx} + \alpha_2 \frac{df_2}{dx} + \alpha_3 \frac{df_3}{dx}, \\ \frac{d\mathrm{T}}{dy'} &= q = m(y' + z^0 x - x^0 z + \beta_2) + \alpha_1 \frac{df_1}{dy} + \alpha_2 \frac{df_2}{dy} + \alpha_3 \frac{df_3}{dy}, \\ \frac{d\mathrm{T}}{dz'} &= r = m(z' + x^0 y - y^0 x + \beta_3) + \alpha_1 \frac{df_1}{dz} + \alpha_2 \frac{df_2}{dz} + \alpha_3 \frac{df_3}{dz}. \end{aligned}$$

On tire de là

$$\Sigma p = \beta_1 \Sigma m + \alpha_1 \Sigma \frac{df_1}{dx} + \alpha_2 \Sigma \frac{df_2}{dx} + \alpha_3 \Sigma \frac{df_3}{dx},$$

$$\Sigma(ry - qz) = \frac{dT}{dx^0} + \alpha_1 \Sigma\left(y\frac{df_1}{dz} - z\frac{df_1}{dy}\right) + \alpha_2 \Sigma\left(y\frac{df_2}{dz} - z\frac{df_2}{dy}\right)$$
$$+ \alpha_3 \Sigma\left(y\frac{df_3}{dz} - z\frac{df_3}{dy}\right),$$

et ainsi de suite : en tout six équations linéaires pour exprimer les multiplicateurs α, β en fonction des variables x, y, z, p, q, r, et des quantités $\mathrm{K}a$, $\mathrm{K}b$, $\mathrm{K}c$, que l'on mettra à la place des dérivées $\frac{dT}{dx^0}, \ldots$, afin de tenir compte des intégrales des aires. Ce procédé d'élimination ne modifie en rien le raisonnement que nous avons fait en supposant que les variables x', y', z' étaient réduites au plus petit nombre possible. En effet, les multiplicateurs α, β sont des fonctions linéaires des vitesses et des rotations, qui se déterminent par la condition, que six des dérivées p, q, r doivent s'annuler identiquement ; les autres dérivées p, q, r sont donc précisément celles que l'on aurait obtenues après avoir éliminé de T les six variables x', y', z' qui correspondent aux dérivées p, q, r qui s'annulent. L'avantage de notre procédé consiste en ce qu'il nous permet d'exprimer les multiplicateurs par les nouvelles variables p, q, r.

Les formules se simplifient beaucoup lorsqu'on prend pour axes mobiles les axes principaux d'inertie. Les équations de condition sont alors les suivantes :

$$\Sigma mx = 0, \quad \Sigma my = 0, \quad \Sigma mz = 0,$$
$$\Sigma myz = 0, \quad \Sigma mzx = 0, \quad \Sigma mxy = 0.$$

En ajoutant à T l'expression

$$\alpha_1 \Sigma m(yz' + zy') + \beta_1 \Sigma mx' + \ldots,$$

on trouve

$$p = m(x' + y^0 z - z^0 y + \beta_1 + \alpha_2 z + \alpha_3 y),$$
$$q = m(y' + z^0 x - x^0 z + \beta_2 + \alpha_3 x + \alpha_1 z),$$
$$r = m(z' + x^0 y - y^0 x + \beta_3 + \alpha_1 y + \alpha_2 x);$$

d'où

$$\Sigma p = \beta_1 \Sigma m, \quad \Sigma q = \beta_2 \Sigma m, \quad \Sigma r = \beta_3 \Sigma m,$$

$$\Sigma(ry - qz) = \frac{dT}{dx^0} + \alpha_1 \Sigma m(y^2 - z^2),$$

$$\Sigma(pz - rx) = \frac{dT}{dy^0} + \alpha_2 \Sigma m(z^2 - x^2),$$

$$\Sigma(qx - py) = \frac{dT}{dz^0} + \alpha_3 \Sigma m(x^2 - y^2).$$

Enfin

$$2T = \Sigma \frac{1}{m}(p - m\beta_1 - mz\alpha_2 - my\alpha_3)^2 + \ldots$$

ou bien

$$\begin{aligned} 2T = \Sigma \frac{p^2 + q^2 + r^2}{m} &- \frac{(\Sigma p)^2 + (\Sigma q)^2 + (\Sigma r)^2}{\Sigma m} \\ &+ \alpha_1^2 \Sigma m(y^2 + z^2) + \alpha_2^2 \Sigma m(z^2 + x^2) + \alpha_3^2 \Sigma m(x^2 + y^2) \\ &- 2\alpha_1 \Sigma(ry + qz) - 2\alpha_2 \Sigma(pz + rx) - 2\alpha_3 \Sigma(qx + py). \end{aligned}$$

Si, au lieu de prendre l'origine des coordonnées au centre de gravité, on rapportait le système à un point canonique, on aurait déjà éliminé par le fait les coordonnées et les vitesses de l'un des corps, et les multiplicateurs β n'entreraient pas dans les expressions des p, q, r; dans ce cas, il faudrait supprimer le second terme de T, qui dépend des trois sommes Σp, Σq, Σr.

Les relations ci-dessus donnent, en tenant compte des intégrales des aires,

$$\alpha_1 = -\frac{Ka - \Sigma(ry - qz)}{\Sigma m(y^2 - z^2)}.$$

Cette valeur étant substituée pour α_1, il vient

$$\begin{aligned} &\alpha_1^2 \Sigma m(y^2 + z^2) - 2\alpha_1 \Sigma(ry + qz) \\ &= \frac{\Sigma my^2(Ka + 2\Sigma qz)^2 + \Sigma mz^2(Ka - 2\Sigma ry)^2 - \Sigma m(y^2 + z^2)[\Sigma(ry + qz)]^2}{[\Sigma m(y^2 - z^2)]^2}, \end{aligned}$$

et l'on trouve des expressions analogues pour les termes de T qui dépendent de α_2 et de α_3, en remplaçant les variables par une permutation circulaire.

Si, au lieu de rapporter les coordonnées aux trois axes principaux d'inertie, nous nous contentons d'en prendre un pour axe des z, et le plan principal correspondant pour plan des xy, le nœud de ce plan étant l'axe des x, nous n'avons que les deux équations $\Sigma myz = 0$, $\Sigma mxz = 0$, pour la détermination des axes mobiles, et nous ne pouvons éliminer par ces équations que quatre variables. En revanche, les intégrales des aires n'introduisent plus dans T que la constante K. On a maintenant $x^0 = I'$, $y^0 = \Omega' \sin I$, $z^0 = \Omega' \cos I$, et les intégrales des aires sont

$$\frac{dT}{d\Omega'} = K, \quad \frac{dT}{dI'} = 0, \quad \frac{dT}{dI} = 0.$$

L'expression de la force vive devient

$$\begin{aligned} 2T = \Sigma m(x' - y\Omega' \cos I + z\Omega' \sin I)^2 + \Sigma m(y' + x\Omega' \cos I - zI')^2 \\ + \Sigma m(z' + yI' - x\Omega' \sin I)^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, si l'on fait abstraction des équations du centre de gravité (nous avons vu que cela est permis) et qu'on n'ajoute à T que l'expression $\alpha_1 \Sigma m(yz' + zy') + \alpha_2 \Sigma m(zx' + xz')$, il vient

$$\begin{aligned} p &= m(x' - y\Omega' \cos I + z\Omega' \sin I + \alpha_2 z), \\ q &= m(y' + x\Omega' \cos I - zI' + \alpha_1 z), \\ r &= m(z' - x\Omega' \sin I + yI' + \alpha_1 y + \alpha_2 x). \end{aligned}$$

On tire de là

$$\begin{aligned} \Sigma(ry - qz) &= \alpha_1 \Sigma m(y^2 - z^2) + \alpha_2 \Sigma mxy, \\ \Sigma(pz - rx) &= \alpha_2 \Sigma m(z^2 - x^2) - \alpha_1 \Sigma mxy + K \sin I, \\ \Sigma(qx - py) &= K \cos I. \end{aligned}$$

Ces relations permettent d'éliminer α_1, α_2 et I. On a d'abord

$$\begin{aligned} K \sin I + \alpha_2 \left[\Sigma m(z^2 - x^2) + \frac{\Sigma mxy \; \Sigma mxy}{\Sigma m(y^2 - z^2)} \right] \\ = \Sigma(pz - rx) + \frac{\Sigma mxy}{\Sigma m(y^2 - z^2)} \Sigma(ry - qz), \end{aligned}$$

et une expression analogue pour α_1; en les substituant dans T, on exprime la force vive par les variables x, y, z, p, q, r, I. Or, la relation

$$\left(\frac{dT}{dI}\right) = -\frac{dT}{dI} = 0$$

montre qu'il est permis de remplacer $\sin I$ par sa valeur tirée de l'équation

$$K^2 \sin^2 I = K^2 - [\Sigma(qx - py)]^2.$$

Ces formules se simplifient lorsqu'on n'a que trois corps. Dans ce cas, l'un des plans principaux d'inertie est le plan même des trois corps, et les deux équations de condition qui le déterminent se réduisent à celles-ci :

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 0,$$

qui comprennent en même temps l'équation $\Sigma mz = 0$. On a donc $z = 0$, $z' = 0$, $r = 0$, et l'expression de T ne renferme la variable I que sous la forme du carré de $\sin I$, de sorte que tout est rationnel. Nous allons considérer ce cas dans le paragraphe suivant.

VI.

L'expression de la force vive de trois corps, rapportés à des axes mobiles, est

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} 2T = \Sigma m(x' - y\Omega'\cos I)^2 + \Sigma m(y' + x\Omega'\cos I)^2 \\ + \Sigma m(yI' - x\Omega'\sin I)^2, \end{aligned} \right.$$

si nous prenons pour plan des xy le plan des trois corps, et le nœud de ce plan pour axe des x. Les intégrales des aires sont

$$\frac{dT}{d\Omega'} = K, \quad \frac{dT}{dI'} = 0, \quad \frac{dT}{dI} = 0,$$

ou bien

$$\begin{aligned}\Sigma m(xy' - yx') + \Omega' \cos \mathrm{I}\, \Sigma m(x^2 + y^2) &= \mathrm{K} \cos \mathrm{I},\\ - \mathrm{I}' \Sigma mxy + \Omega' \sin \mathrm{I}\, \Sigma mx^2 &= \mathrm{K} \sin \mathrm{I},\\ \mathrm{I}' \Sigma my^2 - \Omega' \sin \mathrm{I}\, \Sigma mxy &= 0.\end{aligned}$$

Il en résulte que l'on peut écrire

$$(12) \qquad 2\mathrm{T} = \Sigma m(x' - y\Omega' \cos \mathrm{I})^2 + \Sigma m(y' + x\Omega' \cos \mathrm{I})^2 + \mathrm{K}\Omega' \sin^2 \mathrm{I},$$

et qu'on aura toujours

$$\frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{I}} = 0.$$

Les intégrales donnent

$$(13) \qquad \Omega' = \frac{\mathrm{MK}}{m_1 m_2 m_3} \frac{\Sigma my^2}{4\Delta^2},$$

où M est la somme $m_1 + m_2 + m_3$, et Δ l'aire du triangle des trois corps. On trouve, en effet, que

$$\Sigma mx^2 . \Sigma my^2 - \Sigma mxy . \Sigma mxy = \Sigma m_1 m_2 (x_2 y_1 - x_1 y_2)^2 = \frac{m_1 m_2 m_3}{\mathrm{M}} 4\Delta^2,$$

puisque

$$\frac{2\Delta}{\mathrm{M}} = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{m_3} = \frac{y_2 x_3 - y_3 x_2}{m_1} = \frac{y_3 x_1 - y_1 x_3}{m_2}.$$

La dérivée Ω', ou la rotation autour de l'axe polaire, est donc indépendante des vitesses x', y'; elle est égale à une constante multipliée par le moment d'inertie du système autour de la ligne des nœuds, et divisée par le carré du triangle des trois corps; elle devient $\frac{0}{0}$ pour $\Delta = 0$, parce que le plan des trois corps cesse d'être déterminé quand les corps se trouvent sur une ligne droite.

Pour obtenir les équations du mouvement, nous devons prendre les dérivées partielles $p = \frac{d\mathrm{T}}{dx'}$, $q = \frac{d\mathrm{T}}{dy'}$, ce qui peut se faire sur l'une ou sur l'autre des deux expressions de T données par les formules (11) et (12), puisque les variables x', y' n'existent que dans les deux premières parties, communes à ces formules. Aux équations linéaires ainsi obtenues il faut joindre les deux suivantes :

$$\frac{dT}{d\Omega'} = \mathrm{K}, \quad \frac{dT}{dI'} = 0,$$

puis remplacer les x', y' et Ω', I' par les p, q et la constante K. La force vive est alors exprimée par les variables x, y, I, p, q, et nous devons prendre les dérivées de T par rapport aux variables x, y, p, q en traitant I comme une constante, puis mettre pour I sa valeur tirée des intégrales; ou bien, puisque

$$\left(\frac{dT}{dI}\right) = -\frac{dT}{dI} = 0,$$

comme nous l'avons vu plus haut, nous pouvons de suite remplacer I par sa valeur en fonction des x, y, p, q. La différentiation donne, en ajoutant à T l'expression $\alpha\,\Sigma m x' + \beta\,\Sigma m y'$, pour tenir compte des équations du centre de gravité,

$$p = m(x' - y\Omega'\cos I + \alpha),$$
$$q = m(y' + x\Omega'\cos I + \beta),$$

d'où

$$\Sigma p = \alpha \mathrm{M}, \quad \Sigma q = \beta \mathrm{M}, \quad \Sigma(qx - py) = \mathrm{K}\cos I,$$

et, en substituant ces expressions dans la formule (12), on trouve

$$(14) \qquad 2T = \Sigma\frac{p^2+q^2}{m} - \frac{(\Sigma p)^2 + (\Sigma q)^2}{\mathrm{M}} + \Omega'\mathrm{K} - \frac{\Omega'}{\mathrm{K}}[\Sigma(qx - py)]^2,$$

où il faut mettre pour Ω' sa valeur tirée de l'équation (13), qui peut s'écrire

$$(15) \qquad \Omega' = \mathrm{K}\frac{\mathrm{M}(m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2) - m_1 m_2 (y_1 - y_2)^2}{\mathrm{M} m_1 m_2 (y_1 x_2 - y_2 x_1)^2}.$$

En même temps nous pouvons supposer $p_3 = q_3 = 0$, de sorte que T ne renferme que les huit variables x_1, y_1, x_2, y_2, p_1, q_1, p_2, q_2. Ces dernières (les p, q) sont les vitesses relatives des corps m_1, m_2 par rapport à m_3, car nous avons

$$\frac{p_1}{m_1} = x'_1 - x'_3 - (y_1 - y_3)\Omega' \cos \mathrm{I}, \ldots,$$

ou bien

$$p_1 = -m_1 \dot{\mathrm{x}}_2, \quad p_2 = m_2 \dot{\mathrm{x}}_1,$$
$$q_1 = -m_1 \dot{\mathrm{y}}_2, \quad q_2 = m_2 \dot{\mathrm{y}}_1,$$

en désignant, comme nous l'avons déjà fait, par les lettres romaines x_1, x_2, $\mathrm{x}_3, \ldots$ les différences $x_2 - x_3$, $x_3 - x_1$, $x_1 - x_2, \ldots$, et en exprimant les vitesses réelles par des lettres pointées.

Si nous nous reportons à la transformation orthogonale contenue dans la formule

$$(2) \qquad \mathrm{m}\, \Sigma \frac{1}{m}((\mathrm{x})) = \frac{1}{\mathrm{m}} \Sigma\, m((x)),$$

où

$$\mathrm{m}^2 = \frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1 m_2 m_3}{\mathrm{M}},$$

il est évident que nous pouvons écrire $\mathrm{m}\mathrm{x}$ pour mx, et $\mathrm{m}\mathrm{y}$ pour my dans les formules (11), (12), (13), et que l'équation (14) subsistera, si les lettres p, q signifient les dérivées $\frac{m}{\mathrm{m}}\frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{x}}$, $\frac{m}{\mathrm{m}}\frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{y}}$, ou si nous remplaçons p, q par $m\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{m}}$, $m\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{m}}$, ce qui donne

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} 2\mathrm{T} &= \frac{\mathrm{M}}{m_1 m_2 m_3} \Sigma\, m(\mathrm{p}^2 + \mathrm{q}^2) - \frac{(\Sigma\, m\mathrm{p})^2 + (\Sigma\, m\mathrm{q})^2}{m_1 m_2 m_3} \\ &\quad + \mathrm{K}\Omega' - \frac{\Omega'}{\mathrm{K}}[\Sigma(\mathrm{q}\mathrm{x} - \mathrm{p}\mathrm{y})]^2. \end{aligned} \right.$$

Pour Ω' il faut mettre sa valeur en fonction des x, y,

$$(17) \qquad \Omega' = \frac{\mathrm{K}}{4\Delta^2} \Sigma \frac{1}{m} \mathrm{y}^2 = \mathrm{K} \frac{\frac{1}{m_1}\mathrm{y}_1^2 + \frac{1}{m_2}\mathrm{y}_2^2 + \frac{1}{m_3}(\mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2)^2}{(\mathrm{y}_1 \mathrm{x}_2 - \mathrm{y}_2 \mathrm{x}_1)^2}.$$

Les variables p, q sont les vitesses des corps m_1, m_2 par rapport au centre de gravité, car en faisant $\mathrm{p}_3 = \mathrm{q}_3 = 0$, on a

$$\mathrm{p}_1 = m_2 \dot{x}_2, \quad \mathrm{p}_2 = - m_1 \dot{x}_1,$$
$$\mathrm{q}_1 = m_2 \dot{y}_2, \quad \mathrm{q}_2 = - m_1 \dot{y}_1.$$

Quand le mouvement des trois corps a été réduit à un mouvement de deux corps par une transformation orthogonale (par exemple, en prenant pour origine un point canonique), on n'aura qu'à supprimer dans les formules (14) et (16) les termes qui proviennent des multiplicateurs α, β, c'est-à-dire Σp, Σq, et $\Sigma m \mathrm{p}$, $\Sigma m \mathrm{q}$. Les équations finales seront toujours

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dp}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dx}, \dots,$$

et

$$\frac{d\mathrm{x}}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{d\mathrm{p}}, \quad \frac{d\mathrm{p}}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{d\mathrm{x}}, \dots.$$

On peut encore remplacer les coordonnées x, y par des coordonnées polaires (rayons vecteurs et azimuts) sans rien changer à la marche générale des opérations. Si l'on pose

$$x = \rho \cos v, \quad y = \rho \sin v,$$

la formule (12) devient

$$(18) \qquad 2\mathrm{T} = \Sigma m \rho'^2 + \Sigma m \rho^2 (\Omega' \cos \mathrm{I} + v')^2 + \mathrm{K}\Omega' \sin^2 \mathrm{I},$$

et (13) donne

$$(19) \qquad \Omega' = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{M}} \frac{m_3}{m_1 m_2} \frac{\Sigma m \rho^2 \sin^2 v}{\rho_1^2 \rho_2^2 \sin^2(v_1 - v_2)}.$$

Pour simplifier, je supposerai que l'origine est un point canonique ; alors nous n'avons que deux corps à considérer, et

$$(20) \qquad \Omega' = \frac{\mathrm{K}}{\sin^2(v_1 - v_2)} \left(\frac{\sin^2 v_1}{m_2 \rho_2^2} + \frac{\sin v_2^2}{m_1 \rho_1^2} \right).$$

La différentiation donne

$$\varpi = \frac{dT}{d\rho'} = m\rho', \quad \chi = \frac{dT}{d\upsilon'} = m\rho^2(\Omega'\cos I + \upsilon'),$$

d'où

$$\chi_1 + \chi_2 = \Sigma m\rho^2(\Omega'\cos I + \upsilon') = K\cos I,$$

en vertu des intégrales des aires. On trouve ainsi

$$(21) \qquad 2T = \frac{\varpi_1^2}{m_1} + \frac{\varpi_2^2}{m_2} + \frac{\chi_1^2}{m_1\rho_1^2} + \frac{\chi_2^2}{m_2\rho_2^2} + \frac{\Omega'}{K}[K^2 - (\chi_1 + \chi_2)^2],$$

et

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{dH}{d\varpi}, \quad \frac{d\varpi}{dt} = -\frac{dH}{d\rho},$$
$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{dH}{d\chi}, \quad \frac{d\chi}{dt} = -\frac{dH}{d\upsilon}.$$

C'est le second système de Bour. On peut obtenir le premier système de Bour en faisant

$$\upsilon_1 - \upsilon_2 = \omega, \quad \upsilon_1 + \upsilon_2 = 2\varphi,$$

d'où

$$\upsilon_1 = \varphi + \frac{1}{2}\omega, \quad \upsilon_2 = \varphi - \frac{1}{2}\omega;$$

ω est l'angle compris entre les vecteurs ρ_1, ρ_2, et φ l'azimut de la bissectrice de cet angle. On a évidemment

$$\sigma = \frac{dT}{d\omega'} = \frac{1}{2}(\chi_1 - \chi_2),$$
$$\pi = \frac{dT}{d\varphi'} = \chi_1 + \chi_2 = K\cos I.$$

Il en résulte pour la force vive l'expression

$$(22) \qquad \left\{ \begin{aligned} 2T &= \frac{\varpi_1^2}{m_1} + \frac{\varpi_2^2}{m_2} + \frac{\left(\sigma + \frac{1}{2}\pi\right)^2}{m_1\rho_1^2} + \frac{\left(\sigma - \frac{1}{2}\pi\right)^2}{m_2\rho_2^2} \\ &\quad + \frac{K^2 - \pi^2}{\sin^2\omega}\left[\frac{\sin^2\left(\varphi + \frac{1}{2}\omega\right)}{m_2\rho_2^2} + \frac{\sin^2\left(\varphi - \frac{1}{2}\omega\right)}{m_1\rho_1^2}\right], \end{aligned} \right.$$

et

$$\frac{d\rho_1}{dt}=\frac{dH}{d\varpi_1},\quad \frac{d\varpi_1}{dt}=-\frac{dH}{d\rho_1},\quad \frac{d\rho_2}{dt}=\frac{dH}{d\varpi_2},\quad \frac{d\varpi_2}{dt}=-\frac{dH}{d\rho_2},$$
$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{dH}{d\sigma},\quad \frac{d\sigma}{dt}=-\frac{dH}{d\omega},\quad \frac{d\varphi}{dt}=\frac{dH}{d\pi},\quad \frac{d\pi}{dt}=-\frac{dH}{d\varphi}.$$

C'est le premier système, ou « système provisoire » de Bour, qui désigne les variables par les lettres q_1, q_2, p_1, p_2, n_3, n_4, l_3, l_4.

Lorsqu'on veut prendre l'origine au centre de gravité, et les axes principaux d'inertie pour axes des xy, on aura, pour trois corps, $z=0$, et

$$2T=\Sigma m(x'-z^0y)^2+\Sigma m(y'+z^0x)^2+\Sigma m(x^0y-y^0x)^2.$$

En remplaçant les x, y par les x, y, et en substituant pour le dernier terme de T sa valeur tirée des intégrales des aires, nous avons

$$(23)\qquad 2T=\mathrm{m}^2\,\Sigma\frac{1}{m}(\mathrm{x}'-z^0\mathrm{y})^2+\mathrm{m}^2\,\Sigma\frac{1}{m}(\mathrm{y}'+z^0\mathrm{x})^2+K\Omega'\sin^2 I.$$

Nous pouvons maintenant introduire les trois distances mutuelles r_1, r_2, r_3 des trois corps, et poser

$$\mathrm{x}=r\cos u,\quad \mathrm{y}=r\sin u.$$

Alors la force vive devient

$$(23\ bis)\qquad 2T=\mathrm{m}^2\,\Sigma\frac{r'^2}{m}+\mathrm{m}^2\,\Sigma\frac{r^2}{m}(z^0+u')^2+K\Omega'\sin^2 I,$$

où $z^0=\Omega'\cos I+\varphi'$, et

$$\Omega'=\frac{K}{4\Delta^2}\,\Sigma\frac{r^2}{m}\sin^2(u+\varphi).$$

L'une des intégrales est

$$(24)\qquad \frac{dT}{dz^0}=\mathrm{m}^2\,\Sigma\frac{r^2}{m}(z^0+u')=K\cos I.$$

Les équations de condition sont les suivantes

$$(25)\qquad \Sigma r\cos u = 0,\quad \Sigma r\sin u = 0,\quad \Sigma\frac{r^2}{m}\sin 2u = 0;$$

elles donnent

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Sigma r'\cos u - \Sigma r\sin u.u' = 0,\\ &\Sigma r'\sin u + \Sigma r\cos u.u' = 0,\\ &\Sigma\frac{rr'}{m}\sin 2u + \Sigma\frac{r^2}{m}\cos 2u.u' = 0.\end{aligned}\right.$$

Si l'on pose

$$\Sigma\frac{r^2}{m}\cos 2u = \mathrm{R},$$

on trouve, par la troisième des équations (25),

$$\mathrm{R}^2 = \Sigma\left(\frac{r^2}{m}\right)^2 + 2\,\Sigma\frac{r_1^2 r_2^2}{m_1 m_2}\cos 2(u_1 - u_2).$$

Or, nous avons, dans le triangle des trois corps,

$$\cos(u_1 - u_2) = \frac{r_3^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2},\quad \sin(u_1 - u_2) = \frac{2\Delta}{r_1 r_2},\ \dots$$

En substituant, il vient

$$(27)\qquad \mathrm{R}^2 = \left(\Sigma\frac{r^2}{m}\right)^2 - \frac{16\Delta^2}{\mathrm{m}^2}.$$

On trouve ensuite

$$\begin{aligned} \mathrm{R}\sin 2u_1 &= 2\Delta\left(\frac{m_2 - m_3}{m_2 m_3} + \frac{m_2 + m_3}{m_2 m_3}\,\frac{r_3^2 - r_2^2}{r_1^2}\right),\\ \mathrm{R}\cos 2u_1 &= \Sigma\frac{r^2}{m} - \frac{m_2 + m_3}{m_2 m_3}\,\frac{8\Delta^2}{r_1^2},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

et

$$(28)\qquad \Omega' = \frac{\mathrm{K}}{8\Delta^2}\left(\Sigma\frac{r^2}{m} - \mathrm{R}\cos 2\varphi\right).$$

On a d'ailleurs, par une formule bien connue,

$$16\Delta^2 = (r_1 + r_2 + r_3)(r_1 + r_2 - r_3)(r_1 - r_2 + r_3)(-r_1 + r_2 + r_3);$$

d'où il suit que Ω' se trouve ici exprimé par les trois distances et par l'angle φ. En désignant par A, B, C les moments d'inertie principaux, nous avons

$$C = A + B = \mathfrak{m}^2 \Sigma \frac{r^2}{m}, \quad B - A = \mathfrak{m}^2 R, \quad AB = 4\mathfrak{m}^2\Delta^2, \quad \frac{1}{2}\frac{d^2C}{dt^2} = U + 2H.$$

A présent nous pouvons différentier T, en ajoutant à l'expression (23 *bis*) les trois équations (26), multipliées respectivement par les facteurs α, β, γ, qui seront déterminés de manière que les dérivées de T par rapport aux trois variables u' s'annulent. Donc

$$\begin{aligned}
p &= \frac{dT}{dr'} = \frac{\mathfrak{m}^2}{m} r' + \gamma \frac{r}{m} \sin 2u + \alpha \cos u + \beta \sin u,\\
0 &= \frac{1}{r}\frac{dT}{du'} = \frac{\mathfrak{m}^2}{m} r(z^0 + u') + \gamma \frac{r}{m} \cos 2u - \alpha \sin u + \beta \cos u,\\
\pi &= \frac{dT}{d\varphi'} = \mathfrak{m}^2 \Sigma \frac{r^2}{m}(z^0 + u').
\end{aligned}$$

On tire de là

$$\Sigma mp \cos u = \alpha M, \quad \Sigma mp \sin u = \beta M,$$

d'où

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned}
M^2(\alpha^2 + \beta^2) &= \Sigma m^2 p^2 + 2\Sigma m_1 m_2 p_1 p_2 \cos(u_1 - u_2)\\
&= (\Sigma mp)^2 - (\Sigma r)\Sigma m_1 m_2 p_1 p_2 \frac{r_1 + r_2 - r_3}{r_1 r_2}.
\end{aligned}\right.$$

En tenant compte de (24), il vient

$$(30)\quad \gamma R = -K \cos I = -\pi.$$

On trouve encore

$$\Sigma pr = \mathrm{m}^2 \Sigma \frac{rr'}{m}, \quad \Sigma pr \sin 2u + \frac{\pi}{\mathrm{R}} \Sigma \frac{r^2}{m} = z^0 \mathrm{m}^2 \mathrm{R}.$$

L'expression de la force vive devient

$$(31) \left\{ \begin{aligned} 2\mathrm{T} &= \frac{\mathrm{M}}{m_1 m_2 m_3}\left[\Sigma mp^2 + \gamma^2 \Sigma \frac{r^2}{m} - 2\gamma \Sigma pr \sin 2u - \frac{\mathrm{M}^2(\alpha^2+\beta^2)}{\mathrm{M}}\right] \\ &\quad + \mathrm{K}\Omega' \sin^2 \mathrm{I} \\ &= \frac{\mathrm{M}}{m_1 m_2 m_3}\Bigg[\Sigma mp^2 + \frac{\pi^2}{\mathrm{R}^2}\Sigma \frac{r^2}{m} + \frac{2\pi}{\mathrm{R}} \Sigma pr \sin 2u \\ &\qquad - \frac{(\Sigma mp)^2 - (r_1 + r_2 + r_3)\, \Sigma m_1 m_2 p_1 p_2 \dfrac{r_1 + r_2 - r_3}{r_1 r_2}}{\mathrm{M}}\Bigg] \\ &\quad + \frac{\mathrm{K}^2 - \pi^2}{8\Delta^2}\left(\Sigma \frac{r^2}{m} - \mathrm{R}\cos 2\varphi\right). \end{aligned} \right.$$

Il faut remplacer $\sin 2u$ par sa valeur en fonction des distances :

$$\sin 2u_1 = \frac{2\Delta}{\mathrm{R}}\left(\frac{m_2 - m_3}{m_2 m_3} + \frac{m_2 + m_3}{m_2 m_3}\,\frac{r_3^2 - r_2^2}{r_1^2}\right),$$

. . . .

Ensuite on a

$$(32) \qquad \mathrm{H} = \mathrm{T} - \Sigma \frac{m_1 m_2}{r_3};$$

et

$$(33) \left\{ \begin{aligned} &\frac{dr_1}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dp_1}, \quad \frac{dr_2}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dp_2}, \quad \frac{dr_3}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dp_3}, \\ &\frac{dp_1}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dr_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dr_2}, \quad \frac{dp_3}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dr_3}, \\ &\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{d\pi}, \quad \frac{d\pi}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{d\varphi}. \end{aligned} \right.$$

Ce système canonique comprend les distances mutuelles des trois corps, l'angle φ que l'un des axes d'inertie forme avec le nœud du plan des trois corps, et les quatre variables conjuguées p_1, p_2, p_3, π; la dernière est le cosinus de l'inclinaison du plan. La solution de ce système serait donnée par sept intégrales qui permettraient d'exprimer les huit variables par l'une d'entre elles, par exemple φ; on trouverait alors le temps t et le nœud Ω par les quadratures

$$t = \int \frac{d\varphi}{\frac{dH}{d\pi}}, \quad \Omega = \int \frac{dH}{dK}\, dt.$$

L'une de ces intégrales est connue; c'est celle des forces vives, $H = \text{const}$. Les deux quadratures et les trois intégrales des aires complètent le nombre de douze intégrales que demande le problème des trois corps. Il est d'ailleurs facile d'appliquer ces résultats à l'équation aux dérivées partielles $\nabla W = U + H$, dont la solution W fournit les intégrales du problème. Au lieu de huit équations différentielles ordinaires, on obtient alors une équation aux dérivées partielles à quatre variables indépendantes.

Je donnerai encore ici l'expression de T pour le cas général où les axes sont déterminés par une équation quelconque, $f(r, u) = 0$, à laquelle s'ajoutent les relations $\Sigma r \sin u = 0$, $\Sigma r \cos u = 0$. Je désignerai par ρ, υ les dérivées partielles $\frac{df}{dr}$, $\frac{df}{du}$; en suivant la même marche que précédemment, nous avons

$$p + \gamma\rho = \mathrm{m}^2 \frac{r'}{m} + \alpha \sin u + \beta \cos u,$$

$$\frac{1}{r}(q + \gamma\upsilon) = \mathrm{m}^2 \frac{r}{m}(u' + z^0) + \alpha \cos u - \beta \sin u,$$

$$\pi = \mathrm{m}^2 \Sigma \frac{r^2}{m}(u' + z^0),$$

d'où

$$\gamma = \frac{\pi - \Sigma q}{\Sigma \upsilon},$$

et, en écrivant r, r_1, r_2 à la place de r_1, r_2, r_3,

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned}
2T = {} & \Sigma \frac{1}{m_2}\Big[p^2 + p_1^2 + \frac{q^2}{r^2} + \frac{q_1^2}{r_1^2} - 2\left(pp_1 + \frac{qq_1}{rr_1}\right)\cos(u - u_1) \\
& \qquad + 2\left(\frac{p_1 q}{r} - \frac{pq_1}{r_1}\right)\sin(u - u_1)\Big] \\
& + \gamma^2 \Sigma \frac{1}{m_2}\Big[\rho^2 + \rho_1^2 + \frac{\upsilon^2}{r^2} + \frac{\upsilon_1^2}{r_1^2} - 2\left(\rho\rho_1 + \frac{\upsilon\upsilon_1}{rr_1}\right)\cos(u - u_1) \\
& \qquad + 2\left(\frac{\rho_1 \upsilon}{r} - \frac{\rho\upsilon_1}{r_1}\right)\sin(u - u_1)\Big] \\
& + 2\gamma \Sigma \frac{1}{m_2}\Big[p\rho + p_1\rho_1 + \frac{q\upsilon}{r^2} + \frac{q_1\upsilon_1}{r_1^2} \\
& \qquad - \left(p\rho_1 + p_1\rho + \frac{q\upsilon_1 + q_1\upsilon}{rr_1}\right)\cos(u - u_1) \\
& \qquad + \left(\frac{p_1\upsilon + q\rho_1}{r} - \frac{p\upsilon_1 + q_1\rho}{r_1}\right)\sin(u - u_1)\Big] \\
& + \frac{K^2 - \pi}{4\Delta^2}\Sigma \frac{r^2}{m}\sin^2(u + \varphi).
\end{aligned}\right.$$

Dans cette expression nous pouvons annuler trois des variables p, q, par exemple q, q_1, q_2, à la condition d'éliminer en même temps les variables conjuguées (u, u_1, u_2). On peut aussi prendre simplement $f = u_2 = 0$, ce qui donne

$$q_2 = 0, \quad \upsilon_2 = 1, \quad \upsilon = \upsilon_1 = \rho = \rho_1 = \rho_2 = 0.$$

L'angle φ est alors l'azimut de la distance r_2, compté à partir du nœud, et u, u_1 sont deux angles du triangle Δ. On a $\gamma = \pi$, et

$$\begin{aligned}
2T = {} & \Sigma \frac{p^2 + p_1^2 - 2pp_1\cos(u - u_1)}{m_2} + \frac{4\pi\Delta}{r_2^2}\left(\frac{p}{m_1 r} - \frac{p_1}{mr_1}\right) \\
& + \frac{m + m_1}{mm_1}\frac{\pi^2}{r_2^2} + \frac{K^2 - \pi^2}{4\Delta^2}\Sigma \frac{r^2}{m}\sin^2(u + \varphi).
\end{aligned}$$

Si le mouvement des trois corps avait lieu dans un plan, on aurait $\pi = K$, et

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned}
H = {} & \Sigma \frac{1}{2m_2}\left(p^2 + p_1^2 + pp_1\frac{r^2 + r_1^2 - r_2^2}{rr_1}\right) + \frac{2K\Delta}{r_2^2}\left(\frac{p}{m_1 r} - \frac{p_1}{mr_1}\right) \\
& + \frac{m + m_1}{2mm_1}\frac{K^2}{r_2^2} - \Sigma \frac{mm_1}{r_2}.
\end{aligned}\right.$$

L'angle $\Omega + \varphi$ serait donné (p. 197, 212) par l'équation

$$z^0 = \Omega' + \varphi' = \frac{dH}{dK}.$$

P. S. — Pendant l'impression de ce travail, j'ai eu connaissance d'une Note de M. Scheibner, publiée en 1868 dans le *Journal de Crelle-Borchardt*, t. LXVIII, 3e cahier, et qui renferme l'énoncé du système (33). L'auteur le donne, sans démonstration, comme point de départ de formules à l'aide desquelles il représente le mouvement d'un corps de masse nulle, attiré par deux corps tels que le Soleil et une planète.

M. Scheibner donne encore un autre système, dans lequel figurent les moments d'inertie. J'en ai cherché la démonstration, qui peut être présentée comme il suit. Si nous désignons toujours par x, y les différences des coordonnées rapportées aux axes d'inertie et au centre de gravité, nous avons

$$\Sigma \mathrm{x} = 0, \quad \Sigma \mathrm{y} = 0, \quad \Sigma \frac{\mathrm{xy}}{m} = 0.$$

Les moments d'inertie sont

$$\mathrm{A} = \mathrm{m}^2 \Sigma \frac{\mathrm{y}^2}{m}, \quad \mathrm{B} = \mathrm{m}^2 \Sigma \frac{\mathrm{x}^2}{m}, \quad \mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{m}^2 \Sigma \frac{r^2}{m},$$

où $\mathrm{m}^2 = \frac{m_1 m_2 m_3}{\mathrm{M}}$. Ces relations nous permettent d'exprimer les coordonnées par les quantités A, B et par un angle ψ, en posant

$$\sqrt{\frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}}\, \mathrm{x}_1 = \sqrt{\mathrm{B}} \cos(\psi + \beta_1), \quad \sqrt{\frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}}\, \mathrm{y}_1 = \sqrt{\mathrm{A}} \sin(\psi + \beta_1), \ldots,$$

pourvu que les différences des constantes β_1, β_2, β_3 soient déterminées par les formules

$$\operatorname{tang}(\beta_2 - \beta_3) = \frac{m_1}{\mathrm{m}}, \quad \operatorname{tang}(\beta_3 - \beta_1) = \frac{m_2}{\mathrm{m}}, \quad \operatorname{tang}(\beta_1 - \beta_2) = \frac{m_3}{\mathrm{m}},$$

et qu'on donne le signe négatif aux radicaux par lesquels s'expriment les sinus et les cosinus de ces différences. Il s'ensuit que

$$\frac{x_1^2}{B} + \frac{y_1^2}{A} = \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}, \dots$$

Si nous définissons l'angle ψ par l'équation

$$\operatorname{tang} 2\psi = \frac{m M \Sigma x y}{\Sigma m_1 (m_2 - m_3) x_1 y_1} = \frac{\Sigma m_1 (m_2 - m_3) r_1^2}{m \Sigma \frac{m_2 m_3 - m_1^2}{m_1} r_1^2},$$

nous avons

$$\operatorname{tang} 2\beta_1 = \frac{m M (m_2 - m_3)}{m_3^2 (m_1 - m_2) - m_2^2 (m_3 - m_1)}, \dots$$

La différentiation donne

$$x' = \frac{1}{2} x \frac{B'}{B} - y \sqrt{\frac{B}{A}} \psi', \quad y' = \frac{1}{2} y \frac{A'}{A} + x \sqrt{\frac{A}{B}} \psi',$$

et, en substituant dans la formule (23), il vient

$$2T = \frac{A'^2}{4A} + \frac{B'^2}{4B} + C(\psi'^2 + z^{o2}) - 4\sqrt{AB}\,\psi' z^o + K^2 \sin^2 I \left(\frac{\sin^2\varphi}{A} + \frac{\cos^2\varphi}{B}\right).$$

Si nous désignons par A_0, B_0, ϖ, π les dérivées partielles de T, prises par rapport à A', B', ψ' et φ' (ou z^o), nous avons $\pi = K \cos I$, et

$$T = 2AA_0^2 + 2BB_0^2 - \frac{2\sqrt{AB}}{(A-B)^2}\pi\varpi + \frac{C}{(A-B)^2}\frac{\pi^2 + \varpi^2}{2}$$
$$+ \frac{K^2 - \pi^2}{2}\left(\frac{\sin^2\varphi}{A} + \frac{\cos^2\varphi}{B}\right).$$

Telle est l'expression de T que M. Scheibner a publiée sans démonstration.

On aurait en même temps

$$U = \Sigma \frac{m_2 m_3 \sqrt{\frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}}}{\sqrt{A \sin^2(\psi + \beta_1) + B \cos^2(\psi + \beta_1)}}.$$

Je transformerai ce système en posant

$$C = \rho^2, \quad A = \rho^2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha, \quad B = \rho^2 \cos^2 \frac{1}{2}\alpha,$$

où ρ est le rayon de gyration des trois masses dans leur plan. L'angle α peut s'exprimer par les trois distances; nous avons

$$\rho^2 \sin\alpha = 2\sqrt{AB} = 4\,m\Delta, \quad \text{d'où} \quad m^2 \sin^2\alpha = \frac{\Sigma(2r_1^2 r_2^2 - r_3^4)}{\left(\Sigma \dfrac{r^2}{m}\right)^2}.$$

Ensuite

$$2T = \rho'^2 + \rho^2\left(\frac{\alpha'^2}{4} + \psi'^2 + z^{02} + 2\psi' z^0 \sin\alpha\right) + (K^2 - \pi^2)\left(\frac{\sin^2\varphi}{A} + \frac{\cos^2\varphi}{B}\right),$$

puis, en désignant par ρ_0, α_0, les dérivées partielles de T, prises par rapport à ρ' et à α',

$$\rho^2 T = \frac{1}{2}\rho^2\rho_0^2 + 2\alpha_0^2 + \frac{\varpi^2 + \pi^2 - 2\varpi\pi\sin\alpha}{2\cos^2\alpha} + (K^2 - \pi^2)\frac{1 - \cos\alpha\cos 2\varphi}{\sin^2\alpha},$$

et

$$\rho U = \Sigma \frac{m_2 m_3 \sqrt{\dfrac{2m_2 m_3}{m_2 + m_3}}}{\sqrt{1 + \cos\alpha \cos 2(\psi + \beta)}}.$$

Les variables ρ_0, α_0, ϖ, π sont les conjuguées de ρ, α, ψ, φ. Ce système ne diffère que légèrement de celui que M. Weiler vient de faire connaître dans les *Nouvelles astronomiques*. L'équation

$$\frac{d\rho_0}{dt} = -\frac{dH}{d\rho},$$

donne

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\rho^2}{dt^2} = U + 2H.$$

Je viens de m'apercevoir aussi que, dans le Mémoire posthume intitulé *Nova methodus æquationes differentiales partiales... integrandi*, Jacobi a déjà énoncé ce fait, qu'une seule intégrale des aires permet d'éliminer deux variables. Il le rattache à sa théorie sur les intégrales qui satisfont à des relations de la forme $(\alpha, \beta) = 0$.

VII.

Il y a quelque intérêt à voir ce qu'on peut obtenir en considérant les orbites instantanées que deux corps décrivent autour du troisième.

Pour déterminer le mouvement relatif des trois corps, il suffit de connaître neuf quantités : deux distances, deux vitesses et cinq angles. On peut, par exemple, se donner les rayons r, r_1 des corps m, m_1, rapportés au troisième, les vitesses relatives v, v_1, les quatre angles que ces droites forment avec l'intersection des orbites, enfin l'inclinaison relative λ des orbites, ou l'angle s compris entre r et r_1. On peut aussi combiner s (ou λ) avec les coordonnées p, q, p_1, q_1, prises parallèlement et perpendiculairement à l'intersection des orbites, et avec les composantes analogues des vitesses, ω, ϖ, ω_1, ϖ_1, ou bien encore remplacer ω, ϖ par la vitesse radiale r' et la vitesse aréolaire f.

En désignant par ρ la distance de m à m_1, et faisant

$$p = r\cos w, \quad \omega = mr'\cos w - \frac{f}{r}\sin w,$$

$$q = r\sin w, \quad \varpi = mr'\sin w + \frac{f}{r}\cos w,$$

on aura

$$r^2 = p^2 + q^2, \quad r_1^2 = p_1^2 + q_1^2, \quad rr_1\cos s = pp_1 + qq_1\cos\lambda,$$

$$\rho^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos s = (p - p_1)^2 + q^2 + q_1^2 - 2qq_1\cos\lambda,$$

$$m^2 v^2 = \omega^2 + \varpi^2 = m^2 r'^2 + \frac{f^2}{r^2},$$

$$mrr' = p\omega + q\varpi, \quad f = p\varpi - q\omega.$$

Il est facile de s'assurer que les dérivées de ces variables ne dépendent que des neuf éléments du mouvement relatif. La dérivée de r est r', celle de l'angle s est la différence des vitesses aréolaires projetées sur le plan des trois corps. Si l'on différentie l'équation $rr' = xx' + yy' + zz'$, on trouve

$$rr'' = \frac{f^2}{m^2 r^2} + xx'' + yy'' + zz'',$$

et en substituant pour x'', y'', z'' leurs valeurs tirées des équations du mouvement, on voit que le dernier terme de rr'' est une fonction homogène des coordonnées qui ne peut dépendre que des variables r, r_1, s. Les variations des quantités r, r', s ne renferment donc aucune inconnue nouvelle. Soient maintenant α, β, γ les cosinus de la normale à l'orbite f, et a, b, c les cosinus de la composante $\frac{f}{r}$, normale au rayon r, on aura

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0, \quad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0,$$
$$f' = \alpha(f\alpha)' + \beta(f\beta)' + \gamma(f\gamma)',$$
$$fr^0 = a(f\alpha)' + b(f\beta)' + c(f\gamma)',$$

en désignant par r^0 la rotation de l'orbite f autour du rayon vecteur. Or

$$(f\gamma)' = m(xy'' - x''y) = mm_1(xy_1 - x_1y)\left(\frac{1}{\rho_3} - \frac{1}{r_1^3}\right), \ldots,$$

et il s'ensuit que les quantités f' et fr^0 sont respectivement proportionnelles aux deux projections du triangle Δ des trois corps sur l'orbite f et sur un plan perpendiculaire à f. En posant

$$R = \frac{1}{r^3} - \frac{1}{\rho^3}, \quad R_1 = \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{\rho^3}, \quad \sigma = \cos s, \quad M = 1 + m + m_1,$$

nous aurons

$$r'' = \frac{f^2}{m^2 r^3} - \frac{M}{r^2} + m_1(rR - r_1 R_1 \sigma),$$
$$f' = -mm_1 \Delta \cos\eta R_1,$$
$$fr^0 = mm_1 \Delta \sin\eta R_1,$$
$$rr_1\sigma' = \Delta\cos\eta \frac{f}{mr^2} - \Delta\cos\eta_1 \frac{f_1}{m_1 r_1^2},$$

et

$$\Delta \sin\eta = rq_1 \sin\lambda, \quad -\Delta\cos\eta = p_1 q - pq_1 \cos\lambda.$$

Comme les variations des angles du système ne peuvent dépendre que du déplacement des rayons vecteurs et de la rotation des orbites, c'est-à-dire des quantités f et r^0, on voit que les dérivées de nos variables ne renfermeront aucune inconnue nouvelle. C'est précisément le résultat auquel M. Bertrand est arrivé par une autre voie. Je désignerai par (w') la variation de w qui dépend de la rotation des orbites; alors

$$\lambda' = r^0 \cos w - r_1^0 \cos w_1,$$
$$\sin\lambda (w') = r_1^0 \sin w_1 - r^0 \sin w \cos\lambda,$$

ou bien

$$\lambda' = mm_1 \sin\lambda \left(pq_1 \frac{R_1}{f} + p_1 q \frac{R}{f_1}\right),$$
$$(w') = -mm_1 qq_1 \left(\frac{R}{f_1} + \frac{R_1}{f}\cos\lambda\right).$$

On trouve ensuite que

$$w' = \frac{f}{mr^2} + (w'),$$
$$p' = \frac{\omega}{m} - q(w'),$$
$$q' = \frac{\varpi}{m} + p(w'),$$
$$\omega' = -\frac{pm\mathrm{M}}{r^3} + mm_1(p\mathrm{R} - p_1\mathrm{R}_1) - \varpi(w'),$$
$$\varpi' = -\frac{qm\mathrm{M}}{r^3} + mm_1(q\mathrm{R} - q_1\mathrm{R}_1\cos\lambda) + \omega(w').$$

On peut donc former un système de neuf équations différentielles du premier ordre, en réunissant par exemple les variables r, w, r', f, σ, ou bien p, q, ω, ϖ, λ. Un pareil système donnera toujours le mouvement relatif des trois corps, et nous en connaissons deux intégrales, celle des forces vives et une intégrale des aires. En posant

$$\mathrm{U} = \frac{m}{r} + \frac{m_1}{r_1} + \frac{mm_1}{\rho},$$
$$2\mathrm{MT} = \frac{1+m_1}{m}(\omega^2 + \varpi^2) + \frac{1+m}{m_1}(\omega_1^2 + \varpi_1^2) - 2(\omega\omega_1 + \varpi\varpi_1\cos\lambda),$$

la première intégrale sera $\mathrm{T} - \mathrm{U} = \mathrm{H}$, et la seconde se trouve comme il suit.

Considérons les quatre triangles que les rayons vecteurs peuvent former avec les vitesses v, v_1; désignons par $\frac{f}{2m}$ et $\frac{\varphi}{2m}$ les triangles que r, r_1 forment avec v, et par $\frac{\varphi_1}{2m_1}$, $\frac{f_1}{2m_1}$, ceux qu'ils forment avec v_1. Dès lors, le principe des aires fournit l'équation *géométrique*

$$\overline{\mathrm{MK}} = (1 + m_1)\bar{f} + (1 + m)\bar{f}_1 - m_1\bar{\varphi} - m\bar{\varphi}_1, \tag{36}$$

qui exprime une relation linéaire entre les projections des triangles f, φ et celle d'un triangle K pris dans le plan invariable. Si nous projetons sur un plan perpendiculaire à r, les termes f et φ_1 disparaissent, et comme $r\varphi \sin(r, \varphi) = r_1 f \sin(r_1, f)$, il vient

$$\mathrm{MK}z = (1 + m) r f_1 \sin(r, f_1) - m_1 r_1 f \sin(r_1, f),$$

ou bien

$$\frac{\mathrm{MK}z}{\sin\lambda} = (1 + m) q f_1 - m_1 q_1 f; \tag{37}$$

De même, si nous projetons sur un plan perpendiculaire à r_1,

$$\frac{\mathrm{MK}z_1}{\sin\lambda} = m q f_1 - (1 + m_1) q_1 f. \tag{38}$$

d'où

$$f = p\varpi - q\omega = \mathrm{K}\frac{m(z - z_1) - z_1}{q_1 \sin\lambda},$$
$$f_1 = p_1\varpi_1 - q_1\omega_1 = \mathrm{K}\frac{m_1(z - z_1) - z}{q \sin\lambda}.$$

Si nous projetons enfin sur un plan perpendiculaire à l'intersection des orbites, ce sont les termes f, f_1 qui disparaissent tout d'abord; nous pouvons aussi faire abstraction des composantes ω, ω_1, et ne considérer que les triangles que r forme avec ϖ_1, et r_1 avec ϖ. On trouve ainsi

$$\mathrm{MK}\sin\mathrm{L} = m_1 r_1 \varpi \sin(r_1, f) - m r \varpi_1 \sin(r, f_1),$$

ou bien

$$m_1 q_1 \varpi - m q \varpi_1 = \mathrm{MK}\frac{\sin\mathrm{L}}{\sin\lambda}. \tag{39}$$

où L est la latitude de l'intersection. Les trois intégrales des aires fournissent donc z, z_1 et L, c'est-à-dire les latitudes des deux rayons vecteurs et de l'intersection des orbites. Elles déterminent ainsi la position du système par rapport au plan invariable, et elles donnent en outre une équation entre les neuf éléments du mouvement relatif, car on a

$$q_1(pq_1 - p_1 q\cos\lambda)\frac{z}{\sin\lambda} + q(p_1 q - pq_1\cos\lambda)\frac{z_1}{\sin\lambda} - r^2 r_1^2 \sin^2 s\frac{\sin L}{\sin\lambda}$$
$$= qq_1\sqrt{r^2 r_1^2\sin^2 s - r_1^2 z^2 - r^2 z_1^2 + 2zz_1 rr_1\cos s}.$$

Cette intégrale et celle des forces vives réduisent le nombre des équations différentielles à sept; on n'en aurait même que six en éliminant dt. Il est d'ailleurs à remarquer que les deux intégrales pourraient tenir lieu de deux équations différentielles du premier ordre pour les rayons vecteurs, auxquelles il suffirait d'ajouter cinq équations différentielles pour les variables ϖ, ϖ_1, f, f_1 et λ ou σ. En effet

$$m_1 q_1 \varpi - mq\varpi_1 = mm_1 qq_1 \frac{d\log\frac{q}{q_1}}{dt},$$

en prenant seulement la variation de q, q_1 pour les orbites immobiles; par conséquent, en vertu de la troisième intégrale des aires,

$$qq_1\left(\frac{r'}{r} - \frac{r'_1}{r_1}\right) = \frac{\text{MK}}{mm_1}\frac{\sin L}{\sin\lambda} + \frac{p_1 q f_1}{m_1 r_1^2} - \frac{pq_1 f}{mr^2}. \tag{40}$$

Cette équation permet de remplacer $\sin L$ par r' et r'_1 dans la combinaison des trois intégrales des aires et d'obtenir ainsi une équation différentielle pour les rayons vecteurs. Elle en serait une elle-même, si nous prenions pour variables les inclinaisons des orbites (i, i_1), les distances aux nœuds (u, u_1) et la différence des nœuds (Θ). Nous aurions, dans ce cas, $z = r\sin i\sin u$, et $\sin L = \frac{\sin i\sin i_1\sin\Theta}{\sin\lambda}$, les angles ϖ, λ et σ s'exprimeraient également par les angles u, i, Θ, et les quantités f, f_1 s'élimineraient par les deux premières intégrales des aires. La troisième intégrale des aires et celle des forces vives fourniraient donc deux équations différentielles du premier ordre pour r, r_1, auxquelles il faudrait ajouter cinq autres pour les variables u, u_1, i, i_1 et Θ. On aurait

$$i' = r^0 \cos u, \quad \text{d'où} \quad f.i' = mm_1 \sin\lambda \cos u\, rq_1 R_1\,;$$

ensuite

$$u' = \frac{f}{mr^2} - \frac{\operatorname{tang} u}{\operatorname{tang} i}\, i', \quad \Theta' = \frac{\operatorname{tang} u_1}{\sin i_1}\, i'_1 - \frac{\operatorname{tang} u}{\sin i}\, i'.$$

Les nœuds ϑ, ϑ_1 se trouveraient finalement par des quadratures à l'aide des relations

$$d\vartheta = \frac{\operatorname{tang} u}{\sin i}\, di, \quad d\vartheta_1 = \frac{\operatorname{tang} u_1}{\sin i_1}\, di_1.$$

Dans tous les cas, le problème revient à l'intégration de sept équations du premier ordre, que l'on peut réduire à six par l'élimination du temps. On n'aurait donc besoin que de cinq intégrations nouvelles, le principe du dernier multiplicateur fournissant la sixième.

On peut enfin réduire les neuf équations à six par une seule intégrale. Divisons les distances par un facteur de similitude n, et dt par $n\sqrt{n}$ (d'où il suit que les vitesses devront être multipliées par $\sqrt{n}$). Les dérivées des quantités $\frac{r}{n}$, $r'\sqrt{n}$, $\frac{f}{r}\sqrt{n}$, $\omega\sqrt{n}, \ldots$, et celles des angles w, λ, s, prises par rapport à $d\tau = \frac{dt}{n\sqrt{n}}$, ne renfermeront que ces mêmes variables, plus $n'\sqrt{n}$. Si nous substituons les nouvelles variables dans les deux intégrales du système, les constantes H, K y sont remplacées par nH et $\frac{K}{\sqrt{n}}$; on peut donc éliminer n, et obtenir une intégrale avec la constante HK^2. Le facteur n étant arbitraire, nous pouvons, par exemple, prendre $n = r$; la variable $\frac{r}{n}$ se trouve alors éliminée $\left(\text{puisque } \frac{r}{n} = 1,\ n'\sqrt{n} = r'\sqrt{n}\right)$, et nous n'avons plus que huit équations, qui se réduisent à six par l'élimination de $d\tau$ et par l'intégrale $F = HK^2$. La seconde intégrale, $F_1 = Hr$, fait connaître r en fonction des autres variables. On pourrait aussi prendre pour n le rapport $\frac{\rho}{\sin s} = \frac{r}{\sin S} = \frac{r_1}{\sin S_1}$, où S, S_1 sont les angles opposés aux rayons vecteurs dans le triangle des trois corps. Dans ce cas, $\frac{r}{n}$ et $\frac{r_1}{n_1}$ représenteraient les deux angles S, S_1, et le troisième s serait donné par la relation $s + S + S_1 = 180^\circ$. On aurait

$$\sin s\, n'\sqrt{n} = r'\sqrt{n}\cos S_1 + r'_1\sqrt{n}\cos S + \cos S\cos S_1\frac{ds}{d\tau},$$

et les huit variables S, S_1, w, w_1, $r'\sqrt{n}$,... se détermineraient par sept équations simultanées, que l'intégrale $F = HK^2$ réduirait à six; l'intégrale $F_1 = Hn$ fournirait la valeur absolue des distances. On voit qu'il doit exister sept intégrales qui ne renferment que les angles du système et les vitesses réduites par le facteur $\sqrt{n}$; la constante HK^2 de la seule qui soit connue correspond à l'excentricité dans le cas de deux corps. Ces résultats s'accordent avec la classification des intégrales donnée par M. Bertrand. En effet, les intégrales des deux formes F = const. et nF = const. sont fournies par deux équations différentielles partielles à huit variables, $\frac{dF}{d\tau} = 0$ et $\frac{d\log F}{d\tau} + n'\sqrt{n} = 0$. Il y a donc sept intégrales de chacune de ces formes, et comme six de l'une se déduisent de sept de l'autre, nous pouvons dire que la forme nF = const. comprend sept intégrales, dont deux sont connues, et la forme F = const. une seule nouvelle, encore inconnue. Deux intégrales des aires et les deux quadratures qui donnent le temps et les nœuds complètent le nombre des douze intégrales du problème.

Lorsqu'on fait usage de la transformation de Jacobi, on a $\Theta = 0$, $L = 0$, $u = w$, $\lambda = i - i_1$, et les intégrales des aires donnent

$$f = -K\frac{\sin i_1}{\sin\lambda},\quad f_1 = K\frac{\sin i}{\sin\lambda},\quad \cos\lambda = \frac{K^2 - f^2 - f_1^2}{2ff_1},$$

de sorte qu'on peut exprimer T et U par les variables r, r', u, f, ou bien par p, q, ω, ϖ.

On a, dans ce cas,

$$(41)\qquad 2T = \frac{\omega^2 + \varpi^2}{\mu} + \frac{\omega_1^2 + \varpi_1^2}{\mu_1} = \frac{\gamma^2 + \frac{f^2}{r^2}}{\mu} + \frac{\gamma_1^2 + \frac{f_1^2}{r_1^2}}{\mu_1},$$

μ et μ_1 étant des masses fictives, et $\gamma = \mu r'$.

U renferme à présent les variables f (ou bien ω, ϖ), et si l'on fait $T - U = H$, on a les deux systèmes

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dH}{d\gamma}, \quad \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{dH}{dr}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{dH}{df}, \quad \frac{df}{dt} = -\frac{dH}{du},$$

et

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dH}{d\omega}, \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{dH}{dp}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{dH}{d\varpi}, \quad \frac{d\varpi}{dt} = -\frac{dH}{dq}.$$

Pour la théorie de la Lune, on pourrait employer une combinaison déjà indiquée par Jacobi, laquelle consiste à faire tourner les corps m, m_1 (Lune et Soleil) autour du centre de gravité de m et m_0 (Lune et Terre), en attribuant à la Lune la masse fictive $\mu = m(1+m) = 0{,}012$, au Soleil la masse fictive $\mu_1 = \dfrac{m_1(1+m)}{1+m+m_1} = 1{,}012$, celle de la Terre étant l'unité ($m_0 = 1$). On ferait, dans ce cas, $H = H_0 - R$, où

$$H_0 = \frac{1}{2\mu}\left(\gamma^2 + \frac{f^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2\mu_1}\left(\gamma_1^2 + \frac{f_1^2}{r_1^2}\right) - \frac{1}{r}\,\frac{km}{1+m} - \frac{km_1(1+m)}{r_1},$$

$$R = km_1\left(\frac{1}{\sqrt{r_1^2 + m^2r^2 + 2mrr_1\sigma}} + \frac{m}{\sqrt{r_1^2 + r^2 - 2rr_1\sigma}} - \frac{1+m}{r_1}\right),$$

et l'on intégrerait par deux ellipses avec les constantes arbitraires α (valeur réciproque du grand axe), β (racine carrée du paramètre), π (argument de la latitude du périgée), τ (passage au périgée). Les grands axes étant $2a$, $2a_1$, les paramètres $2p$, $2p_1$, et k toujours la constante de l'attraction, on prendrait

$$\alpha = \frac{1}{2a}\,\frac{km}{1+m}, \quad \alpha_1 = \frac{km_1(1+m)}{2a_1}, \quad \beta = m\sqrt{pk}, \quad \beta_1 = \frac{m_1(1+m)}{\sqrt{1+m+m_1}}\sqrt{p_1k}.$$

Dans la première approximation, on aurait $R = 0$, $f = \beta$, $f_1 = \beta_1$; la variation des constantes serait fournie par les équations

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{dR}{d\tau}, \quad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{dR}{d\alpha}, \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{dR}{d\pi}, \quad \frac{d\pi}{dt} = -\frac{dR}{d\beta},$$

et le principe des forces vives donnerait l'intégrale $R + \alpha + \alpha_1 + H = 0$. Le développement de R ne diffère pas sensiblement de celui de la fonction perturbatrice ordinaire. En désignant par A_1, A_2,... les coefficients des puissances de $\frac{r}{r_1}$ dans cette dernière, nous avons

$$R = kmm_1 \frac{r^2}{r_1^3}\left[(1+m)A_1 + (1-m^2)A_2\frac{r}{r_1} + (1+m^3)A_3\frac{r^2}{r_1^2} + \ldots\right],$$

mais les arguments ne renferment plus les nœuds, car on a simplement

$$\sigma = \cos u \cos u_1 + \sin u \sin u_1 \cos\lambda.$$

VIII.

Pour terminer, je ferai voir que la réduction des équations différentielles du mouvement peut encore s'obtenir d'une manière plus directe. Soient $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$, les coordonnées, les vitesses et les accélérations d'un point rapporté à trois axes mobiles, et soient x^0, y^0, z^0 les rotations de ces axes; nous aurons

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} + yz^0 - zy^0,\quad \frac{dy}{dt} = \dot{y} + zx^0 - xz^0,\quad \frac{dz}{dt} = \dot{z} + xy^0 - yx^0,$$
$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \ddot{x} + \dot{y}z^0 - \dot{z}y^0,\quad \frac{d\dot{y}}{dt} = \ddot{y} + \dot{z}x^0 - \dot{x}z^0,\quad \frac{d\dot{z}}{dt} = \ddot{z} + \dot{x}y^0 - \dot{y}x^0.$$

En supposant que les forces ne dépendent que des distances, si on élimine les rotations, ce système représente $6n$ équations différentielles entre les coordonnées et les vitesses de n points. Il n'en représente même que $6n-6$, si nous prenons pour x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$,... les coordonnées, les vitesses et les accélérations *relatives* des différents points. Pour éliminer les rotations, nous avons les trois équations $f'_1 = 0$, $f'_2 = 0$, $f'_3 = 0$, que l'on obtient en différentiant les équations des axes mobiles. Ces dernières nous permettent encore d'éliminer trois coordonnées, de sorte que le nombre des équations différentielles se réduit à $6n-9$, ou bien à $6n-10$, si nous chassons dt. Prenons, par exemple, l'origine des coordonnées au point m_0, faisons passer le plan des x, y par m_1, m_2, et l'axe des x par m_1; nous aurons

$$y_1 = z_1 = z_2 = 0,$$

et

$$\dot{y}_1 - x_1 z^0 = 0, \quad \dot{z}_1 + x_1 y^0 = 0, \quad \dot{z}_2 + x_2 y^0 - y_2 x^0 = 0,$$

de sorte que nous pourrons remplacer x^0, y^0, z^0 par des fonctions des variables x_1, x_2,.... Les équations différentielles se réduisent finalement à $6n - 12$ par les deux intégrales $\mathrm{H} = \text{const.}$ et $\mathrm{K}^2 = \text{const.}$, que fournissent les principes des forces vives et des aires. Le principe des aires donne encore deux intégrales qni déterminent la position des axes mobiles par rapport à l'axe polaire; le nœud du plan des x, y se trouve par une quadrature lorsqu'on connaît x^0, y^0.

On peut aussi se servir des intégrales des aires pour éliminer les rotations. Ces dernières s'expriment par deux angles et trois vitesses angulaires, ou, plus simplement, par un seul angle et deux dérivées ($x^0 = \mathrm{I}'$, $y^0 = \Omega' \sin \mathrm{I}$, $z^0 = \Omega' \cos \mathrm{I}$), si nous prenons pour axe des x le nœud même du plan des x, y mobiles. Dans le problème des trois corps, si nous désignons par x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3; z_1, z_2, z_3 les différences des coordonnées, nous avons

$$\Sigma x = \Sigma y = \Sigma z = 0, \quad \Sigma \dot{x} = \Sigma \dot{y} = \Sigma \dot{z} = 0,$$

et en prenant

$$z_1 = z_2 = z_3 = 0,$$

les intégrales des aires sont

$$\Sigma \frac{1}{m} y \dot{z} = 0, \quad \mathrm{m}^2 \Sigma \frac{1}{m} x \dot{z} = -\mathrm{K} \sin \mathrm{I}, \quad \mathrm{m}^2 \Sigma \frac{1}{m} (x \dot{y} - y \dot{x}) = \mathrm{K} \cos \mathrm{I}.$$

En les combinant avec les relations

$$z_1 + x_1 y^0 - x_1 y^0 = 0, \quad \dot{z}_2 + x_2 y^0 - y_2 x^0 = 0,$$

on a le moyen d'éliminer les quantités x^0, y^0, z^0, $\dot{z}_1$, $\dot{z}_2$ (*voir* p. 204). Si nous prenons le plan invariable pour plan des x, y, nous n'avons qu'une seule rotation $z^0 = \Omega'$, et si nous faisons passer le méridien de l'axe des x par le point m_1, en supposant $y_1 = 0$, la rotation peut s'éliminer par l'équation $x_1 z^0 = \dot{y}_1$. Il reste à éliminer $\dot{y}_1$ des dix équations qui déterminent les coordonnées relatives x_1, z_1, x_2, y_2, z_2 et les vitesses correspondantes; or on a pour cela les quatre intégrales

$$\Sigma\frac{y\dot{z}-z\dot{y}}{m}=0,\quad \Sigma\frac{z\dot{x}-x\dot{z}}{m}=0,$$
$$m^2\Sigma\frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{m}=K,\quad m^2\Sigma\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{m}=U+H,$$

qui permettent, en outre, d'éliminer trois autres variables.

On arrive encore au même résultat par les considérations suivantes. Soit r la distance d'une planète m au Soleil m_0, soit f la vitesse aréolaire relative : les composantes de la vitesse, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à r, seront r' et $\frac{f}{r}$; dans la direction de la normale à l'orbite la vitesse est nulle. J'appellerai R, F, N les accélérations relatives suivant les mêmes trois axes mobiles; les rotations correspondantes sont r^0, zéro et $\frac{f}{r^2}\cdot$ En substituant ces quantités dans les formules données plus haut, on trouve

$$r''=\mathrm{R}+\frac{f^2}{r^3},\quad f'=r\mathrm{F},\quad r^0f=r\mathrm{N}.$$

Les produits rF, rN sont les moments des forces perturbatrices, projetés sur l'orbite f et sur un plan perpendiculaire; ils sont, pour chacun des corps troublants, proportionnels aux projections du triangle Δ qu'il forme avec m, m_0; donc

$$f'=\Sigma m_1\left(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{r_1^3}\right)\Delta\cos\eta,\quad r^0f=\Sigma m_1\left(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{r_1^3}\right)\Delta\sin\eta,$$

comme à la page 217. Il s'ensuit que les dérivées des distances r et des vitesses r', f, ainsi que les rotations r^0 des orbites, s'expriment par les éléments du mouvement relatif. Or, on a vu plus haut que les dérivées des angles w, λ dépendent des rotations r^0; on peut donc former des systèmes qui ne déterminent que le mouvement relatif, et il est facile de voir que pour n corps il faut $6n-9$ équations. Elles se réduisent à $6n-10$, si nous chassons dt, et nous en connaissons deux intégrales ($H = \text{const.}$, $K^2 = \text{const.}$). Il ne resterait qu'une seule intégrale, si, pour diminuer encore d'une unité le nombre des variables, nous avions recours à l'artifice déjà expliqué, lequel consiste à diviser toutes les distances par une fonction homogène p d'une seule dimension. En faisant $r = p\rho$, $x = p\xi, \ldots$, on a évidemment

$$p = f(r, x, \ldots) = pf(\rho, \xi, \ldots), \quad \text{d'où} \quad f(\rho, \xi, \ldots) = 1,$$

de sorte qu'il existe entre les nouvelles variables une relation qui en diminue le nombre d'une unité.

Les forces étant des fonctions homogènes de la dimension ε, il faut en même temps remplacer les vitesses $r', x', \ldots$ par $\rho' p^{\frac{1+\varepsilon}{2}}$, $\xi' p^{\frac{1+\varepsilon}{2}}$, et dt par $p^{\frac{1-\varepsilon}{2}} d\tau$. Les dérivées des variables ρ, ξ, ρ', $\xi', \ldots$, prises par rapport au temps fictif τ, ne renferment alors aucune inconnue nouvelle, de sorte que l'ordre du système se trouve abaissé d'une unité. Mais la constante H se multiplie par $p^{1+\varepsilon}$, et K^2 par $p^{3+\varepsilon}$; on n'obtient une intégrale que par la combinaison $H^{\frac{3+\varepsilon}{2}} K^{-1-\varepsilon}$. Dans le cas de la nature, on a $\varepsilon = -2$, les carrés des temps réel et fictif sont proportionnels aux cubes des unités de longueur

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{p}{1}\right)^3.$$