JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la fonction numérique qui exprime pour un déterminant négatif donné le nombre des classes de formes quadratiques dont un au moins des coefficients extrêmes et impair

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 12 (1867), p. 98-103.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1867_2_12__98_0>

Sur la fonction numérique qui exprime pour un déterminant négatif donné le nombre des classes de formes quadratiques dont un au moins des coefficients extrêmes est impair;

PAR M. J. LIOUVILLE.

J'ai présenté sous ce titre à l'Académie des Sciences, dans sa séance du 25 juin 1866, une Note que je crois bon de reproduire textuellement d'après les *Comptes rendus*.

« **1**. Je veux surtout m'occuper ici de la fonction numérique $F(k)$ qui exprime le nombre des classes de formes (binaires) quadratiques, primitives ou non, de déterminant $-k$, dont un au moins des coefficients extrêmes est impair. Comme ces formes sont les seules qui puissent représenter des nombres impairs, je prendrai la liberté de les désigner elles-mêmes sous le nom de *formes impaires*, et de dire en conséquence que $F(k)$ est le nombre des classes de formes quadratiques impaires, primitives ou non, de déterminant $-k$. Je ne considérerai que des valeurs positives de k. Ceci convenu, j'entre en matière; car il serait inutile de rappeler au lecteur les recherches de M. Kronecker, du P. Joubert et de notre ingénieux et profond confrère M. Hermite sur le même sujet. Leurs savants travaux sont connus de tous les géomètres. Je crois avoir à mon tour ajouté beaucoup de résultats nouveaux à ceux qu'ils ont obtenus, et cela sans sortir des procédés purement arithmétiques, au moyen de certaines *formules générales* que j'ai données dans le *Journal de Mathématiques* et dont la démonstration repose sur l'Algèbre la plus simple [*]. Je

[*] Un habile géomètre italien, M. Piuma, s'aidant de quelques indications recueillies çà et là dans le *Journal de Mathématiques,* a donné des formules de mes cinq premiers articles, et de cinq autres, dont les numéros varient de sept à onze, des démonstrations qui remplissent les conditions que je m'étais imposées; ces démonstra-

vais me borner, bien entendu, à énoncer un petit nombre de théorèmes; le Mémoire complet paraîtra dans un autre recueil.

» 2. Soient m un entier donné, impair et positif; α un entier positif ou nul, donné aussi; i un entier impair variable qui prenne les valeurs successives

$$1,\ 3,\ 5,\ldots,\ \omega,$$

ω étant le plus grand entier impair pour lequel on continue à avoir

$$2^{\alpha+2}m-\omega^2>0;$$

il est clair que les entiers

$$2^{\alpha+2}m-i^2$$

sont tous $\equiv 3 \pmod{4}$; mais ils sont $\equiv 3 \pmod{8}$ quand $\alpha=0$, $\equiv 7 \pmod{8}$ quand $\alpha>0$.

» On sait que dans les conditions indiquées, l'on a

$$\sum F(2^{\alpha+2}m-i^2)=2^\alpha\sum d-\sum \mathrm{D},$$

équation dans laquelle d représente un quelconque des diviseurs de m, et D un quelconque des diviseurs de $2^\alpha m$ pour lesquels

$$2^\alpha m=\mathrm{D}(\mathrm{D}+\Delta),$$

Δ étant un entier impair. Les diviseurs D n'existent que quand α est >0; si $\alpha=0$, les termes où on les fait figurer devront être supprimés.

» A la formule connue que je viens de rappeler, j'ajoute d'abord celle-ci :

$$(1)\qquad \sum i^2F(2^{\alpha+2}m-i^2)=2^\alpha m\left(2^\alpha\sum d-\sum \mathrm{D}\right)-\sum(\mathrm{D}^3),$$

qui n'a pas besoin d'explications nouvelles.

---

tions ne diffèrent pas au fond des miennes, encore inédites, et peuvent en tenir lieu, du moins quant aux formules dont M. Piuma s'est occupé.

» Mais voici une autre équation non moins curieuse. Considérez l'ensemble des classes de formes quadratiques impaires qui répondent aux divers déterminants négatifs fournis par l'expression

$$i^2 - 2^{\alpha+2} m.$$

Prenez successivement les représentantes de ces classes et pour chacune d'elles cherchez les deux plus petits entiers impairs a, a' qu'elle exprime proprement, a' étant supposé $> a$, puis calculez la somme

$$\sum a(a' - a)$$

des produits $a(a' - a)$ pour la totalité des formes indiquées. Vous aurez toujours

$$(2) \qquad \sum a(a' - a) = 2^{\alpha+1} m \left(2^{\alpha} \sum d - \sum \mathrm{D}\right) + 2 \sum (\mathrm{D}^3).$$

» On voit que

$$\sum a(a' - a) + 2 \sum i^2 F(2^{\alpha+2} m - i^2) = 2^{\alpha+2} m \sum F(2^{\alpha+2} m - i^2);$$

mais je ne m'arrête pas à ces détails.

» **3**. Soit m un nombre impair donné, positif et de l'une ou de l'autre des deux formes linéaires

$$12g + 7, \quad 12g + 11;$$

désignons par i un entier impair variable qui prenne les valeurs successives

$$1, 3, 5, \ldots, \omega,$$

ω étant le plus grand entier impair pour lequel on continue à avoir

$$2m - 3\omega^2 > 0;$$

enfin posons

$$m = d\delta,$$

d représentant un quelconque des diviseurs de m et δ le diviseur conjugué à d.

» On aura

$$(3)\qquad \sum F(2m-3i)^2 = \frac{1}{8}\left[3+\left(\frac{m}{3}\right)\right]\sum\left(\frac{3}{\delta}\right)d.$$

Nous avons employé au second membre et nous emploierons encore ci-après le signe

$$\left(\frac{a}{b}\right)$$

de Legendre, avec la signification plus étendue que lui attribue Jacobi. On a

$$\left(\frac{m}{3}\right) = 1$$

quand

$$m = 12g + 7,$$

mais

$$\left(\frac{m}{3}\right) = -1$$

quand

$$m = 12g + 11.$$

La formule (3) est susceptible d'une grande extension.

» **4**. Soient m un nombre impair donné, positif, premier à 5, quelconque du reste; α, β des entiers positifs ou nuls, donnés aussi; i un entier impair variable qui prenne les valeurs successives

$$1,\ 3,\ 5,\ldots,\ \omega,$$

ω étant le plus grand entier impair pour lequel on continue à avoir

$$8.2^\alpha 5^\beta m - 5\omega^2 > 0;$$

enfin d un quelconque des diviseurs de m et δ le diviseur conjugué à d.

» On aura

$$(4)\quad \sum F(8.2^{\alpha}5^{\beta}m - 5i^2) = 2^{\alpha-2}\left[5^{\beta+1} - (-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{5}\right)\right]\sum\left(\frac{5}{\delta}\right)d.$$

Cette formule est une de celles qui se rapportent au nombre 5, comme la précédente est une de celles qui se rapportent au nombre 3.

» **5.** Soient m un entier impair donné, positif et de la forme linéaire $24g + 11$; s un entier variable qui prenne les valeurs successives

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots,\ \omega,$$

ω étant le plus grand entier pour lequel on continue à avoir

$$m - 48s^2 > 0.$$

» On aura

$$(5)\qquad F(m) + 2\sum F(m - 48s^2) = \frac{1}{4}\sum\left(\frac{3}{\delta}\right)d.$$

Voilà encore une des formules qu'on peut regarder comme appartenant au nombre 3.

» **6.** Soit m un entier impair donné, positif et $\equiv 3 \pmod{4}$, en sorte que l'on ait

$$m = 4g + 3.$$

Soit ensuite s un entier variable prenant les valeurs successives

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ g;$$

posons

$$g - s = t,$$

en sorte que quand s croît de 0 à g, t décroisse de g à 0. Enfin, désignons par d un quelconque des diviseurs de m et par δ le diviseur conjugué à d, puis faisons, suivant notre usage,

$$\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^2 = \rho_2(m).$$

On aura

$$(6) \qquad \sum F(8s+3)\,F(8t+3) = \frac{1}{8}\rho_2(m).$$

» Je m'arrête, n'ayant eu l'intention de donner ici qu'un léger aperçu de mes recherches. Peut-être ajouterai-je quelques autres formules dans des communications subséquentes, mais sans jamais songer à épuiser la longue série de celles que j'espère publier prochainement dans le *Journal de Mathématiques.* »