JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CAMILLE JORDAN

Lettre à M. Liouville sur la résolution algébrique des équations

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 12 (1867), p. 105-108.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1867_2_12__105_0>

Lettre à M. Liouville sur la résolution algébrique des équations;

PAR M. CAMILLE JORDAN,
Ingénieur des Mines.

« MONSIEUR,

» J'ai l'honneur de vous adresser, ainsi que vous avez bien voulu m'y engager, un extrait de mon Mémoire sur la résolution algébrique des équations. Je vous prie de me permettre d'y ajouter quelques indications sommaires sur le but et la portée de ces recherches.

» Galois a démontré dans un Mémoire célèbre, et dont nous vous devons la publication, que chaque équation algébrique est caractérisée par un certain groupe de substitutions dans lequel se reflètent ses principales propriétés : proposition capitale qui fait dépendre la théorie tout entière des équations de celle des substitutions.

» Dans la suite du même Mémoire, Galois passe au cas spécial des équations solubles par radicaux, et trouve un caractère général auquel on peut reconnaître les groupes qui correspondent à de semblables équations. Cela fait, il s'agissait de partir de ce critérium pour construire ces groupes explicitement.

» Après avoir traité cette nouvelle question dans le cas simple où les équations cherchées sont de degré premier, Galois a abordé le cas beaucoup plus difficile où ce degré est quelconque. Il a partagé les équations irréductibles en deux grandes classes, qu'il nomme équations *primitives* et équations *non primitives;* puis il a énoncé à l'égard des premières les deux théorèmes suivants :

» 1° Le degré de toute équation primitive et soluble par radicaux est une puissance exacte d'un nombre premier.

» 2° Les substitutions de son groupe sont toutes linéaires.

» Les démonstrations de ces deux propositions sont perdues; il n'en reste que quelques lambeaux sans suite, dont la restitution semble impossible.

» Mes recherches actuelles ont eu pour but et pour résultat la solution complète de la question ainsi ébauchée. Après avoir transformé le critérium de Galois de manière à en faciliter l'application, j'ai retrouvé sans beaucoup de peine les deux propositions de Galois auxquelles j'ai ajouté la suivante :

» 3° Le groupe de chaque équation irréductible non primitive, soluble par radicaux et de degré m, correspond à une certaine décomposition du nombre m en facteurs dont chacun soit une puissance de nombre premier. Soit $m = p^n p'^{n'} \ldots$ une de ces décompositions, on pourra écrire immédiatement les groupes des équations solubles par radicaux et correspondantes à cette décomposition, dès qu'on connaîtra les groupes des équations primitives et solubles par radicaux pour chacun des degrés p^n, $p'^{n'}$, etc.

» Le problème initial : *Déterminer les groupes de toutes les équations irréductibles, solubles par radicaux et de degré* m (que nous appellerons pour abréger le *problème* A), est ainsi ramené au suivant :

» Problème B. — *Déterminer les groupes de substitutions linéaires qui caractérisent des équations primitives, solubles par radicaux et d'un degré tel que* p^n.

» J'arrive ensuite au résultat suivant.

» Posons

$$n = \lambda \nu \pi^{\sigma} \pi_1^{\sigma_1} \ldots,$$

λ et ν étant des entiers et $\pi, \pi_1, \ldots$ des nombres premiers qui divisent $p^{\nu} - 1$: chacun des groupes qui font l'objet du problème B correspond à une décomposition de cette sorte, et pourra être formé sans difficulté si l'on connaît :

» 1° Les groupes des équations irréductibles et solubles par radicaux pour le degré λ;

» 2° Certains groupes spéciaux de substitutions linéaires, caractérisant des équations primitives et solubles par radicaux de degrés $\pi^{2\sigma}$, $\pi_1^{2\sigma_1}$, etc., et tels, que les coefficients de leurs substitutions soient liés entre eux par certaines relations exactement analogues à celles auxquelles satisfont les systèmes de seize lettres considérés par M. Hermite dans ses recherches sur la transformation des fonctions abéliennes.

» Si l'on appelle *problème* C celui qui consiste à déterminer les groupes spéciaux ci-dessus, on voit que le problème B se ramène aux deux problèmes A et C.

» Posons

$$\sigma = \lambda' \nu' \pi'^{\sigma'} \pi_1'^{\sigma_1'} \ldots,$$

λ', ν' étant des entiers et π', $\pi'_1, \ldots$, des nombres premiers qui divisent $\pi^{2\nu'} - 1$. Je démontre que tout groupe spécial répondant à une équation de degré $\pi^{2\sigma}$ correspond à une décomposition de cette sorte, et pourra être formé sans difficulté si l'on connaît :

» 1° Les groupes des équations irréductibles et solubles par radicaux pour le degré λ';

» 2° Les groupes spéciaux pour les degrés $\pi'^{2\sigma'}$, $\pi_1'^{2\sigma_1'}$, etc.

» Ainsi, les trois problèmes A, B, C sont liés entre eux de telle sorte que la solution de chacun d'eux, pour un degré donné, se ramène à celle des mêmes problèmes pour des degrés inférieurs. On pourra donc les résoudre pour un degré quelconque en abaissant progressivement ce degré par des réductions successives, jusqu'à ce qu'il soit assez petit pour que la solution devienne intuitive. L'abaissement est extrêmement rapide; ainsi quatre à cinq réductions au plus suffiront pour tout nombre inférieur au carré d'un milliard.

» Les groupes des équations solubles par radicaux étant ainsi formés pour un degré quelconque donné, il sera aisé de s'assurer si une équation numérique donnée est soluble ou non par radicaux. Il suffira, en effet, de s'assurer si son groupe est un de ceux que nous avions déterminés : ce qu'on reconnaîtra à cette circonstance, que l'équation auxiliaire d'où dépend une fonction de ses racines invariable par les substitutions du groupe proposé et variable par toute autre substitution, aura une racine rationnelle.

» On doit reconnaître que ce critérium, satisfaisant au point de vue théorique, conduirait généralement dans l'application à des calculs impraticables; mais il existe des équations fort intéressantes (dans la théorie des fonctions elliptiques, par exemple), dont les coefficients ne sont pas immédiatement donnés et se déterminent avec beaucoup moins de facilité que le groupe lui-même. Dans ces circonstances-là, il est clair que l'inconvénient signalé n'existe pas.

» D'ailleurs, la méthode ci-dessus a un avantage bien plus considérable qu'une application plus ou moins facile à telle ou telle équation numérique, en ce qu'elle permet d'*énumérer* et de *classer* immédiatement, pour chaque degré donné, les divers types généraux d'équations solubles par radicaux, et de déterminer pour chacun d'eux le nombre et le degré des extractions de racine à opérer pour le résoudre.

» Galois avait annoncé que, sauf de rares exceptions, toutes les équations d'un degré donné, solubles par radicaux, appartenaient à un même type; mais cette propriété, vraie pour les équations de degré premier, est inexacte en général. Cela résulte immédiatement de notre manière de traiter le problème : on peut distinguer, en effet, autant de *classes* de types résolubles pour le degré m qu'il existe de manières de décomposer m en facteurs p^n, $p'^{n'}$,.... De même, on peut distinguer autant de *classes* de types primitifs et résolubles du degré p^n qu'il existe de décompositions de la forme $n = \lambda\nu\pi^\sigma\pi_1^{\sigma_1}$, etc.

» Les types résolubles de degré m et de la même classe $m = p^n p'^{n'}\ldots$ peuvent être repartis en *sous-classes*, suivant les classes auxquelles appartiennent les types primitifs et résolubles de degré p^n, $p'^{n'}$, etc.,..., dont les groupes servent à construire leurs groupes respectifs, etc.....

» En multipliant ainsi les subdivisions, on obtient un système complet de classification des types d'équations solubles par radicaux. Mais pour que cette classification soit juste, il est nécessaire que tous les types obtenus par notre méthode soient distincts. J'établis, en effet, qu'il en est ainsi, sauf un petit nombre d'exceptions que je détermine, et par suite desquelles certaines classes bien spécifiées doivent être rejetées comme faisant double emploi avec d'autres.

» Veuillez agréer, Monsieur, l'expression de mon profond respect.

» CAMILLE JORDAN. »