JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Nouveaux théorèmes concernant les nombres triangulaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 73-84.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__73_0>

NOUVEAUX THÉORÈMES
CONCERNANT LES NOMBRES TRIANGULAIRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Nous avons vu (dans le cahier de novembre 1862) que tout entier n peut être exprimé non-seulement par la somme de trois nombres triangulaires, mais encore par la somme de deux nombres triangulaires plus le double d'un nombre triangulaire. Il va sans dire que zéro est compté parmi les nombres triangulaires. Ces nombres, dont l'expression générale est

$$\frac{x(x+1)}{2},$$

forment la suite

$$0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ldots;$$

désignons-les généralement par la lettre Δ affectée ou non d'accents, et les deux théorèmes que nous venons de rappeler pourront s'énoncer ainsi :

THÉORÈME I. — « Tout entier n est la somme de trois nombres » triangulaires : autrement dit, pour tout entier donné n, on peut » poser

$$n = \Delta + \Delta' + \Delta''. \text{ »}$$

THÉORÈME II. — « Tout entier n est la somme de deux nombres » triangulaires plus le double d'un nombre triangulaire : autrement » dit, pour tout entier donné n, on peut poser

$$n = \Delta + \Delta' + 2\Delta''. \text{ »}$$

Mais il y a d'autres théorèmes du même genre qu'il est bon d'ajouter à ceux-là. Par exemple, tout entier n est la somme de deux nombres triangulaires plus le quadruple d'un nombre triangulaire. En d'autres termes, on a toujours, en nombres entiers,

$$n = \frac{x(x+1)}{2} + \frac{y(y+1)}{2} + 4 \cdot \frac{z(z+1)}{2}.$$

En effet, Gauss a prouvé que le double d'un entier impair est toujours la somme de trois carrés. Nous avons donc en particulier le droit d'écrire

$$2(4n+3) = u^2 + v^2 + w^2.$$

Mais le premier membre est $\equiv 6 \pmod{8}$; il faut donc que des trois entiers u, v, w deux soient impairs et un impairement pair. De là

$$8n + 6 = (2x+1)^2 + (2y+1)^2 + 4(2z+1)^2.$$

Développez les carrés, retranchez 6 aux deux membres et divisez par 8 : il vous viendra

$$n = \frac{x(x+1)}{2} + \frac{y(y+1)}{2} + 4 \cdot \frac{z(z+1)}{2},$$

ce qu'il fallait démontrer. Ainsi :

Théorème III. — « Tout entier n est la somme de deux nombres » triangulaires plus le quadruple d'un nombre triangulaire : autre- » ment dit, pour tout entier donné n, on peut poser

$$n = \Delta + \Delta' + 4\Delta''. \text{ »}$$

On démontre avec une égale facilité les deux théorèmes que voici :

Théorème IV. — « Tout entier n est formé d'un nombre triangu- » laire plus le double de la somme de deux nombres triangulaires : » autrement dit, pour tout entier donné n, on peut poser

$$n = \Delta + 2\Delta' + 2\Delta''. \text{ »}$$

Théorème V. — « Tout entier n est formé d'un nombre triangu- » laire plus le double d'un nombre triangulaire et le quadruple d'un » pareil nombre : autrement dit, pour tout entier donné n, on peut

» poser

$$n = \Delta + 2\Delta' + 4\Delta''. \text{ »}$$

Pour établir le théorème IV, on partira de l'équation, démontrée par Gauss,

$$8n + 5 = u^2 + v^2 + w^2,$$

et on remarquera que le premier membre étant $\equiv 5$ (mod. 8), il faut que des trois entiers u, v, w un soit impair et les deux autres pairs, savoir: un de ces deux derniers impairement pair, et l'autre pairement pair. De là

$$8n + 5 = (2x + 1)^2 + 4(2s + 1)^2 + 16t^2,$$

partant

$$8n + 5 = (2x + 1)^2 + 2[(2s + 1 + 2t)^2 + (2s + 1 - 2t)^2],$$

ou bien

$$8n + 5 = (2x + 1)^2 + 2(2y + 1)^2 + 2(2z + 1)^2.$$

Développez les carrés, retranchez 5 aux deux membres et divisez par 8: il vous viendra enfin

$$n = \frac{x(x+1)}{2} + 2 \cdot \frac{y(y+1)}{2} + 2 \cdot \frac{z(z+1)}{2},$$

c'est-à-dire le théorème IV.

Pour établir le théorème V, on s'appuiera de nouveau sur Gauss, et on partira de l'équation

$$8n + 7 = u^2 + v^2 + 2w^2.$$

Le premier membre de cette équation étant $\equiv 7$ (mod. 8), il faut évidemment que w soit impair, et que des deux entiers u, v l'un soit impair, l'autre impairement pair. De là

$$8n + 7 = (2x + 1)^2 + 4(2z + 1)^2 + 2(2y + 1)^2,$$

ou bien, en intervertissant l'ordre des deux derniers termes,

$$8n + 7 = (2x + 1)^2 + 2(2y + 1)^2 + 4(2z + 1)^2.$$

Développez les carrés, retranchez 7 aux deux membres et divisez par 8:

il vous viendra

$$n = \frac{x(x+1)}{2} + 2 \cdot \frac{y(y+1)}{2} + 4 \cdot \frac{z(z+1)}{2},$$

c'est-à-dire le théorème V.

Jusqu'ici nous n'avons fait que revêtir d'un nouvel énoncé des théorèmes connus, qui s'y prêtaient si bien, qu'après comme avant cette transformation ce sont toujours des théorèmes de Gauss. Nous allons maintenant donner deux théorèmes faciles encore à démontrer et dérivés au fond de la même source, mais qui pourtant, je crois, peuvent être présentés comme vraiment nouveaux.

Théorème VI. — « Tout entier n est la somme de deux nombres » triangulaires plus le quintuple d'un nombre triangulaire : autre- » ment dit, pour tout entier donné n, on peut poser

$$n = \Delta + \Delta' + 5\Delta''. \text{ »}$$

Voici quelques exemples :

$$\begin{array}{ll}
1 = 1 + 0 + 5.0, & 2 = 1 + 1 + 5.0, \\
3 = 3 + 0 + 5.0, & 4 = 3 + 1 + 5.0, \\
5 = 0 + 0 + 5.1, & 6 = 6 + 0 + 5.0, \\
7 = 1 + 6 + 5.0, & 8 = 3 + 0 + 5.1, \\
9 = 3 + 6 + 5.0, & 10 = 10 + 0 + 5.0, \\
11 = 6 + 0 + 5.1, & 12 = 6 + 1 + 5.1, \\
13 = 10 + 3 + 5.0, & 14 = 6 + 3 + 5.1, \\
15 = 10 + 0 + 5.1, & 16 = 10 + 6 + 5.0, \\
17 = 6 + 6 + 5.1, & 18 = 3 + 0 + 5.3, \\
19 = 3 + 1 + 5.3, & 20 = 10 + 10 + 5.0.
\end{array}$$

On n'a mis partout (et sans choix) qu'une seule décomposition de chaque entier, bien qu'il puisse le plus souvent y en avoir plusieurs. Par exemple, à l'équation

$$9 = 3 + 6 + 5.0,$$

que nous donnons, on pourrait ajouter celle-ci :

$$9 = 3 + 1 + 5.1;$$

mais une seule décomposition suffit pour l'exactitude du théorème.

Passons à la démonstration du théorème VI, et à cet effet rappelons d'abord que le produit

$$5(8n+7)$$

étant de la forme $8\mu + 3$ peut être décomposé en une somme de trois carrés impairs, et qu'on peut même supposer la décomposition *propre*, c'est-à-dire telle, que les racines des trois carrés ne soient pas divisibles à la fois par un facteur > 1, comme serait par exemple le facteur 5. C'est sur une décomposition propre que nous établirons notre raisonnement. Dans les démonstrations précédentes, on ne s'est pas occupé de la nature des décompositions prises pour point de départ : elle n'influait pas sur la marche du calcul; il n'en est pas de même ici, et dès lors il est naturel d'opérer sur une décomposition propre, attendu que l'existence d'une décomposition de cette espèce est assurée, tandis que souvent il n'y a aucune décomposition impropre. Nous poserons donc

$$5(8n+7) = u^2 + v^2 + w^2,$$

u, v, w étant des entiers impairs qui ne soient pas, tous les trois, divisibles par 5. Mais u, v, w ne peuvent pas non plus être, tous les trois, premiers à 5, puisque l'on aurait alors

$$u^2 \equiv \pm 1, \quad v^2 \equiv \pm 1, \quad w^2 \equiv \pm 1 \pmod{5},$$

ce qui ne permettrait pas à la somme

$$u^2 + v^2 + w^2$$

d'être $\equiv 0 \pmod{5}$, comme elle doit l'être. Il est visible qu'un des entiers u, v, w doit être multiple de 5, et les deux autres premiers à 5.

Soit donc

$$w = 5(2z+1);$$

il en résultera

$$5(8n+7) = u^2 + v^2 + 25(2z+1)^2,$$

u et v étant premiers à 5.

Maintenant on voit que la somme $u^2 + v^2$ est divisible par 5 : le quotient sera, on le sait, une autre somme de deux carrés, et comme $u^2 + v^2$ était un entier impairement pair, il faudra que la somme nouvelle de deux carrés fasse de même un entier impairement pair, c'est-à-dire que les deux nouveaux carrés soient impairs. On est ainsi conduit (en divisant par 5) à l'équation

$$8n + 7 = (2x + 1)^2 + (2y + 1)^2 + 5(2z + 1)^2.$$

Développez les carrés, retranchez 7 aux deux membres et divisez par 8 : vous en conclurez

$$n = \frac{x(x+1)}{2} + \frac{y(y+1)}{2} + 5 \cdot \frac{z(z+1)}{2},$$

c'est-à-dire le théorème VI.

Théorème VII. — « Tout entier n est formé d'un nombre triangu-
» laire plus le double d'un nombre triangulaire et le triple d'un
» pareil nombre : autrement dit, pour tout entier donné n, on peut
» poser

$$n = \Delta + 2\Delta' + 3\Delta''. \text{ »}$$

Voici quelques exemples :

$$\begin{array}{ll}
1 = 1 + 2.0 + 3.0, & 2 = 0 + 2.1 + 3.0, \\
3 = 3 + 2.0 + 3.0, & 4 = 1 + 2.0 + 3.1, \\
5 = 3 + 2.1 + 3.0, & 6 = 6 + 2.0 + 3.0, \\
7 = 1 + 2.3 + 3.0, & 8 = 6 + 2.1 + 3.0, \\
9 = 0 + 2.0 + 3.3, & 10 = 10 + 2.0 + 3.0, \\
11 = 0 + 2.1 + 3.3, & 12 = 1 + 2.1 + 3.3, \\
13 = 10 + 2.0 + 3.1, & 14 = 3 + 2.1 + 3.3, \\
15 = 15 + 2.0 + 3.0, & 16 = 1 + 2.6 + 3.1, \\
17 = 15 + 2.1 + 3.0, & 18 = 15 + 2.0 + 3.1, \\
19 = 10 + 2.0 + 3.3, & 20 = 15 + 2.1 + 3.1.
\end{array}$$

Cette fois encore on n'a indiqué pour chaque entier qu'une décomposition.

Passons à la démonstration du théorème VII, et à cet effet observons que le produit

$$3(4n+3)$$

étant de la forme $4\mu+1$ peut être représenté par une somme de trois carrés : il y a même des représentations propres, c'est-à-dire telles, que les racines des trois carrés ne soient pas divisibles à la fois par un même facteur > 1, comme serait par exemple le facteur 3. Je pose donc

$$3(4n+3) = u^2 + v^2 + w^2,$$

les entiers u, v, w n'étant pas à la fois divisibles par 3, d'où l'on conclura sans peine qu'aucun d'eux ne peut l'être, vu qu'autrement la somme

$$u^2 + v^2 + w^2$$

ne pourrait pas être $\equiv 0$ (mod. 3), tandis qu'il faut qu'elle le soit. Le produit $3(4n+3)$ étant, d'un autre côté $\equiv 1$ (mod. 4), un des entiers u, v, w devra être impair et les deux autres pairs. Je supposerai donc désormais u impair, v et w pairs. Ceci convenu, je multiplie par 2 l'équation

$$3(4n+3) = u^2 + v^2 + w^2,$$

et j'en conclus

$$6(4n+3) = (u+v)^2 + (u-v)^2 + 2w^2.$$

Les entiers $u+v$ et $u-v$ sont impairs. De plus, u et v étant premiers à 3, on a

$$u \equiv \pm 1, \quad v \equiv \pm 1 \pmod{3},$$

d'où il suit que des deux entiers $u+v$, $u-v$ un est divisible par 3 et l'autre non divisible par 3. Je représenterai par t celui qui est premier à 3 et par $3(2z+1)$ celui qui est divisible par 3. J'aurai donc

$$6(4n+3) = t^2 + 2w^2 + 9(2z+1)^2,$$

t et w étant premiers à 3. Maintenant on voit que l'entier impair

$$t^2 + 2w^2$$

est divisible par 3. Le quotient (impair aussi) sera à son tour formé d'un carré (impair) plus le double d'un carré. En conséquence j'écris

$$2(4n+3) = (2x+1)^2 + 2s^2 + 3(2z+1)^2.$$

Mais le premier membre étant $\equiv 2 \pmod{4}$, il faut évidemment que l'entier s soit impair. Nous avons donc enfin

$$8n+6 = (2x+1)^2 + 2(2y+1)^2 + 3(2z+1)^2.$$

Développez les carrés, retranchez 6 aux deux membres et divisez par 8 : il vous viendra

$$n = \frac{x(x+1)}{2} + 2.\frac{y(y+1)}{2} + 3.\frac{z(z+1)}{2},$$

c'est-à-dire le théorème VII.

Ce qui me fait attacher quelque prix aux théorèmes VI et VII, c'est qu'ils complètent la série des théorèmes qu'on avait à trouver dans le sujet tout spécial qui nous occupe ici. Je veux dire que nous avons épuisé les expressions de la forme

$$a\Delta + b\Delta' + c\Delta'',$$

où a, b, c sont des entiers donnés, qui peuvent représenter *sans exception* tous les nombres 1, 2, 3, 4, etc.

Pour que l'expression

$$a\Delta + b\Delta' + c\Delta''$$

puisse représenter l'unité, il faut qu'un au moins des coefficients a, b, c soit égal à 1. Prenons donc $a = 1$, et dans l'expression qui reste,

$$\Delta + b\Delta' + c\Delta'',$$

supposons, comme cela est évidemment permis, $c \geqq b$. Il est clair qu'on ne pourra représenter le nombre 2, qui n'est pas triangulaire, que si l'on a $b = 1$ ou $b = 2$. De là deux expressions distinctes :

$$\Delta + \Delta' + c\Delta'', \quad c = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots,$$

et

$$\Delta + 2\Delta' + c\Delta'', \qquad c = 2, 3, 4, 5, \ldots,$$

qu'il faut examiner séparément.

Pour la première expression

$$\Delta + \Delta' + c\Delta'',$$

on ne peut pas aller au delà de $c = 5$; car en prenant $c > 5$, on ne pourrait pas représenter le nombre 5, qui n'est ni triangulaire ni somme de deux triangulaires. La valeur $c = 3$ doit d'ailleurs être écartée ; car l'expression

$$\Delta + \Delta' + 3\Delta''$$

ne peut pas représenter le nombre 8 par exemple, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer numériquement. Mais pour mieux mettre en évidence la cause générale qui rend la formule dont nous parlons impropre à notre objet, observons que l'équation

$$n = \Delta + \Delta' + 3\Delta''$$

entraînerait celle-ci

$$8n + 5 = i^2 + i'^2 + 3i''^2,$$

i, i', i'' étant des entiers impairs. Si n est quelconque, nous pouvons prendre comme cas particulier

$$8n + 5 = 3(8g + 7),$$

g restant à volonté. Il nous viendra ainsi

$$3(8g + 7) = i^2 + i'^2 + 3i''^2,$$

de sorte que $i^2 + i'^2$ sera divisible par 3, ce qui exige que séparément

$$i = 3j, \qquad i' = 3j',$$

et donne

$$8g + 7 = i''^2 + 3(j^2 + j'^2).$$

Si donc on prend g tel, que $8g + 7$ soit $\equiv 2$ (mod. 3), l'équation de-viendra impossible. Cela arrive en prenant $g = 2$, d'où $8g + 7 = 23$, c'est-à-dire en faisant

$$8n + 5 = 3.23 = 69,$$

d'où $n = 8$, ce qui est la valeur indiquée plus haut; mais on voit qu'il y a une infinité d'autres valeurs de n non décomposables sous la forme $\Delta + \Delta' + 3\Delta''$.

Quant aux formules qui répondent à $c = 1, 2, 4, 5$, savoir :

$$\begin{gathered}\Delta + \Delta' + \Delta'', \\ \Delta + \Delta' + 2\Delta'', \\ \Delta + \Delta' + 4\Delta'', \\ \Delta + \Delta' + 5\Delta'',\end{gathered}$$

elles répondent à nos théorèmes I, II, III, VI, et chacune de ces formules représente tous les nombres entiers, sans aucune exception.

J'arrive à la seconde expression générale

$$\Delta + 2\Delta' + c\Delta''.$$

On peut y prendre $c = 2, 3, 4$, d'où naissent les trois expressions

$$\begin{gathered}\Delta + 2\Delta' + 2\Delta'', \\ \Delta + 2\Delta' + 3\Delta'', \\ \Delta + 2\Delta' + 4\Delta'',\end{gathered}$$

qui répondent respectivement à nos théorèmes IV, VII et V. Mais on ne peut pas y faire $c > 4$; car alors on ne représenterait pas le nombre 4 qui n'est pas exprimable par la formule binôme $\Delta + 2\Delta'$.

Les sept théorèmes que nous avons mentionnés plus haut sont donc les seuls qui existent dans le cercle limité où nous nous renfermons.

L'expression

$$a\Delta + b\Delta' + c\Delta''$$

a sur la forme

$$ax^2 + by^2 + cz^2$$

l'avantage de pouvoir, pour certains systèmes de valeurs des entiers donnés a, b, c, représenter tous les nombres. De quelque manière qu'on la particularise, la forme

$$ax^2 + by^2 + cz^2$$

ne jouit jamais d'une telle propriété. En effet, pour que

$$ax^2 + by^2 + cz^2$$

représente l'unité, il faut qu'un des coefficients a, b, c soit égal à 1. Prenons donc $a = 1$, et supposons de plus, comme nous en avons le droit, $c \geqq b$, puis discutons la formule

$$x^2 + by^2 + cz^2,$$

qui se décompose en ces deux-ci

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 + cz^2, \qquad c = 1, 2, 3, 4,\ldots, \\ &x^2 + 2y^2 + cz^2, \qquad c = 2, 3, 4,\ldots, \end{aligned}$$

attendu qu'on ne peut représenter 2 qu'en posant $b = 1$ ou $b = 2$. Dans la première, on ne peut pas aller au delà de $c = 3$, sans quoi on ne représenterait pas le nombre 3. On n'en tire donc que les trois expressions suivantes

$$x^2 + y^2 + z^2, \quad x^2 + y^2 + 2z^2, \quad x^2 + y^2 + 3z^2,$$

lesquelles sont elles-mêmes à rejeter, car la première ne représente pas le nombre 7, la seconde le nombre 14, la troisième le nombre 6.

Quant à la formule

$$x^2 + 2y^2 + cz^2,$$

on ne peut pas y prendre $c > 5$, car alors on ne représenterait pas le nombre 5. Il ne reste donc à discuter que les valeurs $c = 2, 3, 4, 5$, d'où naissent quatre formules particulières :

$$\begin{aligned} &x^2 + 2y^2 + 2z^2, \\ &x^2 + 2y^2 + 3z^2, \\ &x^2 + 2y^2 + 4z^2, \\ &x^2 + 2y^2 + 5z^2; \end{aligned}$$

or aucune de ces formules particulières ne peut être admise : la première ne représente pas le nombre 7, la seconde le nombre 10, la troisième le nombre 14, la quatrième le nombre 10.

Ainsi la forme

$$ax^2 + by^2 + cz^2$$

ne convient jamais à notre objet, tandis que l'expression

$$a\Delta + b\Delta' + c\Delta''$$

donne quelques solutions.

Mais on pourrait aussi considérer des formules à trois termes, contenant à la fois des carrés et des nombres triangulaires, comme

$$a\square + b\Delta + c\Delta',$$

$$a\square + b\square' + c\Delta,$$

où $\square$ et $\square'$ représentent des carrés; et là on trouverait pareillement des expressions propres à représenter tous les nombres. Nous pourrons un jour traiter cette question nouvelle qui n'est pas sans intérêt et qui a ses difficultés.