JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

DE LA GOURNERIE

Note sur la surface engendrée par la révolution d'une conique autour d'une droite située d'une manière quelconque dans l'espace

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 52-56.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__52_0>

NOTE

Sur la surface engendrée par la révolution d'une conique autour d'une droite située d'une manière quelconque dans l'espace [*];

PAR M. DE LA GOURNERIE.

1° La surface engendrée par la révolution d'une conique autour d'une droite est du quatrième ordre, et possède un parallèle double qui peut se changer en un cercle isolé et même devenir imaginaire.

Nous supposons la droite verticale, et nous prenons pour plans de projection le plan horizontal qui passe par le centre de la conique et un plan vertical perpendiculaire à celui de cette courbe, considérée dans l'une quelconque de ses positions.

Nous appelons Γ la projection horizontale de la conique génératrice, et cette courbe elle-même (Γ, Γ'). Nous désignons par les lettres I et O le centre de Γ et la trace horizontale de l'axe de révolution.

Concevons, dans le plan horizontal, d'abord une conique Δ homofocale de Γ et passant par les extrémités du diamètre qui, dans cette courbe, est conjugué aux cordes perpendiculaires au plan vertical, ensuite deux droites parallèles à la ligne de terre et tangentes à Δ : le parallèle double est l'intersection de deux nappes réelles de la surface, quand le point O n'est pas du même côté des droites que Δ; il se change en un parallèle de rebroussement, quand le point O est sur une des deux droites; il devient un cercle isolé, quand le point O est dans la partie du plan comprise entre les droites et Δ; il se réduit à

[*] Cette Note contient les principaux résultats d'un Mémoire qui paraîtra dans le prochain Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

un point isolé quand le point O est sur Δ; enfin, quand le point O est dans l'intérieur de Δ, le parallèle double est imaginaire.

2° La surface peut être engendrée par la révolution d'une conique identique à (Γ, Γ') et placée symétriquement à celle-ci par rapport à un plan méridien quelconque; elle admet, par conséquent, deux séries distinctes de coniques génératrices égales à (Γ, Γ').

Toute surface du second ordre qui contient le parallèle double et l'une des coniques de ces deux séries, renferme une conique de l'autre série et touche la surface de révolution aux deux points où ces courbes se rencontrent. Tout plan contenant une conique de l'une des séries coupe la surface suivant une conique de l'autre série et la touche en deux points (réels ou imaginaires).

3° Tout plan qui touche la surface en deux points la coupe suivant deux coniques superposables.

La surface admet trois systèmes de plans bitangents (réels ou imaginaires). A chaque système correspondent deux séries de coniques génératrices identiques. Il passe ainsi par chaque point de la surface six coniques, non compris le parallèle.

4° Nous avons dit que les coniques des deux séries du premier système sont égales à (Γ, Γ').

Les projections horizontales des coniques des autres systèmes sont égales aux deux coniques homofocales de Γ qui se croisent au point O. Nous appellerons Γ_1 celle qui est du même genre que Γ, et Γ_2 celle qui est de genre différent. Nous considérerons les coniques génératrices (Γ_1, Γ'_1) et (Γ_2, Γ'_2) dans la position où leurs plans sont perpendiculaires au plan vertical.

5° Le second système, c'est-à-dire celui auquel correspond la conique (Γ_1, Γ'_1), est toujours réel. L'axe de révolution passe à l'intérieur des coniques de l'un des deux premiers systèmes, et à l'extérieur des coniques de l'autre. Les coniques de ces deux systèmes se confondent quand la courbe donnée (Γ, Γ') rencontre l'axe.

6° La différence des carrés des rayons des cercles décrits par les centres I et I_1 des coniques Γ et Γ_1 est égale et de signe contraire à la différence des carrés des moitiés des axes homologues de ces coniques, et aussi à la différence des carrés des moitiés des diamètres perpendiculaires au plan vertical.

7° Dans les deux coniques Γ et Γ_1, les projections sur l'un des axes, du diamètre perpendiculaire au plan vertical, sont proportionnelles aux longueurs de cet axe.

Les tangentes des angles que les plans des coniques (Γ, Γ') et (Γ_1, Γ'_1) font avec le plan horizontal, sont en raison inverse des segments interceptés sur la ligne de terre par les tangentes des courbes Γ et Γ_1, aux sommets situés sur l'axe des foyers.

Les coniques (Γ, Γ') et (Γ_1, Γ'_1) ont une même distance focale : si l'une d'elles est un cercle, l'autre est également un cercle.

Ces diverses relations permettent de construire facilement la conique (Γ_1, Γ'_1), lorsque la conique (Γ, Γ') et le point O sont donnés.

8° Les coniques du troisième système ont leur projection horizontale égale à une courbe réelle (art. 4), mais une, au moins, des coordonnées de leur centre est imaginaire, et ces courbes sont imaginaires, excepté dans un cas que nous indiquerons plus loin (art. 10). Leurs plans sont réels quand le parallèle double est réel. En d'autres termes, les plans bitangents du troisième système ne coupent pas la surface; ils sont imaginaires quand le parallèle double est lui-même imaginaire.

Les coniques imaginaires du troisième système ont, avec les coniques réelles des deux premiers, les mêmes relations que celles-ci ont entre elles. Lorsque les plans du troisième système sont réels, on les détermine par une construction analogue à celle qui fait trouver les plans du deuxième

9° Si l'axe se transporte parallèlement à lui-même, de manière que sa trace O décrive une conique homofocale de Γ, et de même genre que Γ, la conique (Γ_1, Γ'_1) se déplace sans se modifier, et son plan conserve la même inclinaison. On obtient ainsi une infinité de surfaces de révolution qui peuvent être engendrées par deux mêmes coniques non superposables.

Quant le point O se meut sur une conique homofocale de Γ et de genre différent, les coniques imaginaires du troisième système restent les mêmes, et leurs plans réels ou imaginaires continuent à avoir la même inclinaison.

10° Lorsque le point O est sur un des axes de Γ, les plans de l'un des deux derniers systèmes sont verticaux. Pour reconnaître si ce sont ceux du second système ou ceux du troisième, il faut voir si le segment de l'axe où se trouve le point O doit être considéré comme formant une homofocale de même genre que Γ ou de genre différent.

Quand le point O est à l'un des foyers de Γ, il se trouve à la limite de deux segments qui représentent des homofocales, l'une de même genre que Γ, l'autre de genre différent; les coniques des deux derniers systèmes se confondent alors. Les deux séries de chaque système se confondent également, et quatre des six coniques qui passent par un point de la surface sont ainsi réunies en une conique méridienne.

Les coniques du troisième système ne sont réelles que dans ce cas.

11° Les quatre normales (réelles ou imaginaires), abaissées du point O sur la conique Γ, sont égales aux quatre normales abaissées de ce même point sur la conique Γ_1.

[Quand on donne dans un plan une conique Γ et un point O non situé sur cette courbe, on peut toujours trouver une conique Γ_1 non superposable à Γ, et telle que les quatre normales abaissées du point O sur l'une de ces courbes soient égales aux quatre normales abaissées sur l'autre.]

12° Les tangences des plans des différents systèmes sont souvent idéales; ainsi, dans le tore ordinaire, les plans méridiens doivent être considérés comme bitangents, mais leurs points de contact sont imaginaires quand les cercles qu'ils contiennent ne rencontrent pas l'axe.

Si l'on cherche sur le plan horizontal le lieu des positions du point O pour lesquelles les deux points de contact des plans de l'un des systèmes sont réunis en un seul, positions qui correspondent à la limite des tangences idéales, on trouve une courbe du sixième ordre. Dans le cas où l'un des axes de la conique (Γ, Γ') décrit un plan, ce lieu est composé seulement de deux cercles; les tangences des plans sont réelles ou idéales, suivant que le point O est placé à l'intérieur ou à l'extérieur de ces cercles.

13° Le lieu des centres des surfaces du second ordre qui contiennent le parallèle double et qui touchent deux fois la surface, se compose de trois surfaces de révolution engendrées par des coniques tournant autour de l'axe de la surface considérée.

Dans le cas où l'un des axes de la conique (Γ, Γ') décrit un plan, le parallèle double est à l'infini, et les centres des surfaces du second ordre contenant ce parallèle et bitangentes, forment deux hyperboloïdes à une nappe et un hyperboloïde à deux nappes qui peut se changer en un ellipsoïde imaginaire.

14° Toute surface de révolution du quatrième ordre ayant un parallèle double admet trois systèmes de coniques génératrices (réelles ou imaginaires).

15° Les géomètres n'ont point, à notre connaissance, étudié dans toute sa généralité la surface engendrée par la révolution d'une conique, mais MM. Yvon Villarceau, Moutard, Mannheim et J.-A. Serret ont fait connaître, dans des cas particuliers, divers théorèmes qui se rapportent aux théories dont nous venons de présenter le résumé (*Comptes rendus*, second semestre 1848; *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XVIII et XIX).

En faisant une transformation homologique, on peut étendre plusieurs des propriétés que nous avons obtenues à une surface plus générale encore que celle que nous avons considérée.