JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. MATHET

Étude sur un certain mode de génération des surfaces d'étendue minimum

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 323-334.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__323_0>

ÉTUDE

SUR

UN CERTAIN MODE DE GÉNÉRATION

DES

SURFACES D'ÉTENDUE MINIMUM;

Par M. G. MATHET,
Professeur au lycée de Nîmes.

Une courbe quelconque étant donnée, si l'on multiplie chaque arc infiniment petit par une certaine fonction des coordonnées de l'extrémité de cet arc, et si l'on fait tourner la ligne obtenue d'un certain angle, fonction des mêmes coordonnées, autour d'un axe normal à la courbe en ce point, on peut imaginer que l'on construise une seconde courbe dont les éléments sont respectivement égaux et parallèles aux lignes infiniment petites ainsi obtenues : cette courbe sera une *transformée* de la première, et dépendra en même temps de la nature de cette courbe, du choix de la normale prise pour axe, et de la forme des fonctions qui interviennent dans cette transformation. J'ai montré, dans une précédente étude, que toutes les courbes tracées sur une surface d'étendue minimum quelconque, et ayant leurs extrémités communes, ont pour transformées des courbes ayant aussi mêmes extrémités, lorsque, l'axe de rotation étant normal à la surface, le multiplicateur et l'angle de rotation sont des fonctions satisfaisant à deux conditions analytiques très-simples. Il est facile dès lors de prévoir que, ces conditions étant remplies, le lieu des transformées de toutes les courbes tracées sur une surface d'étendue minimum sera une nouvelle surface, et l'on est conduit à rechercher quelle peut être cette surface.

Je démontre, dans ce qui suit, que ce lieu est encore une surface d'étendue minimum. Ensuite, si les courbes que l'on transforme sont situées sur la surface d'étendue minimum engendrée par la révolution de la chaînette, et que l'on peut appeler la *caténoïde*, on peut, en choisissant convenablement les fonctions transformatrices, obtenir, pour le lieu des transformées, une surface quelconque d'étendue minimum; de telle sorte que toutes ces surfaces peuvent être regardées comme se déduisant géométriquement de la caténoïde, et peuvent se classer par conséquent d'après la forme des fonctions transformatrices. Enfin, de ce mode de génération j'ai déduit un moyen, qui paraît assez simple, de former l'équation de toutes les surfaces d'étendue minimum qui passent par une courbe plane donnée.

I.

En conservant les notations précédemment adoptées, il est facile de voir que le lieu de nos transformées n'est autre chose que le lieu des points correspondant aux vecteurs qui représentent les valeurs de l'intégrale

$$\int_{u_0}^{u} \mathrm{F}(u)\,du,$$

lorsque l'extrémité du vecteur u décrit la surface d'étendue minimum donnée. Soient ξ, η, ζ les coordonnées, par rapport à trois axes rectangulaires, du point auquel aboutit le vecteur u, et ξ', η', ζ' celles du point correspondant au vecteur v qui représente la valeur de l'intégrale. On doit avoir identiquement

$$\mathrm{F}(u)\,du = dv,$$

c'est-à-dire

$$[\mathrm{W} - \mathrm{Z}(ip + jq - k)](id\xi + jd\eta + kd\zeta) = id\xi' + jd\eta' + kd\zeta'.$$

Faisons la multiplication, en observant les règles posées ci-dessus et en remarquant que $pd\xi + qd\eta - d\zeta = 0$; égalons ensuite les coefficients de i, j, k dans les deux membres. Nous obtenons ainsi les trois équations suivantes

$$\begin{aligned}
d\xi' &= \mathrm{W}d\xi - \mathrm{Z}(qd\zeta + d\eta),\\
d\eta' &= \mathrm{W}d\eta + \mathrm{Z}(qd\zeta + d\xi),\\
d\zeta' &= \mathrm{W}d\zeta + \mathrm{Z}(qd\xi + pd\eta).
\end{aligned}$$

Remplaçons $d\zeta$ par $pd\xi + qd\eta$; il vient

$$(1) \qquad d\xi' = (W - pqZ)\,d\xi - Z(1 + q^2)\,d\eta,$$

$$(2) \qquad d\eta' = Z(1 + p^2)\,d\xi + (W + pqZ)\,d\eta,$$

$$(3) \qquad d\zeta' = (Wp + Zq)\,d\xi + (Wq - Zp)\,d\eta.$$

Les seconds membres des équations (1) et (2) sont les différentielles exactes de fonctions de ξ et η, c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{d(W - pqZ)}{d\eta} = -\frac{d[Z(1+q^2)]}{d\xi}, \quad \frac{d(W + pqZ)}{d\xi} = \frac{d[Z(1+p^2)]}{d\eta}.$$

La première de ces équations revient en effet à

$$\frac{dW}{d\eta} = pq\frac{dZ}{d\eta} - (1 + q^2)\frac{dZ}{d\xi} - (qs - pt)\,Z,$$

et la seconde à

$$\frac{dW}{d\xi} = -pq\frac{dZ}{d\xi} + (1 + p^2)\frac{dZ}{d\eta} + (ps - qr)\,Z,$$

et ces équations sont précisément la première forme, trouvée précédemment, des conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions Z et W. ξ' et η' sont donc des fonctions de ξ et η, dont les dérivées partielles sont

$$\frac{d\xi'}{d\xi} = W - pqZ, \quad \frac{d\xi'}{d\eta} = -Z(1 + q^2),$$

$$\frac{d\eta'}{d\xi} = Z(1 + p^2), \quad \frac{d\eta'}{d\eta} = W + pqZ.$$

Si l'on multiplie l'équation (1) par p, l'équation (2) par q, et si l'on ajoute les résultats, il vient

$$pd\xi' + qd\eta' = (Wp + Zq)\,d\xi + (Wq - Zp)\,d\eta,$$

ou, en vertu de l'équation (3),

$$d\zeta' = pd\zeta' + qd\eta'.$$

Or p et q, considérées comme des fonctions de ξ' et η', satisfont à la condition

$$\frac{dp}{d\eta'} = \frac{dq}{d\xi'}.$$

On a, en effet,

$$(4) \qquad s = \frac{dp}{d\xi'}\frac{d\xi'}{d\eta} + \frac{dp}{d\eta'}\frac{d\eta'}{d\eta} = -Z(1+q^2)\frac{dp}{d\xi'} + (W + pqZ)\frac{dp}{d\eta'},$$

$$(5) \qquad r = \frac{dp}{d\xi'}\frac{d\xi'}{d\xi} + \frac{dp}{d\eta'}\frac{d\eta'}{d\xi} = (W - pqZ)\frac{dp}{d\xi'} + Z(1+p^2)\frac{dp}{d\eta'},$$

d'où

$$(W - pqZ)s + Z(1+q^2)r = [W^2 + Z^2(1+p^2+q^2)]\frac{dp}{d\eta'}.$$

On a de même

$$(6) \qquad s = \frac{dq}{d\xi'}\frac{d\xi'}{d\xi} + \frac{dq}{d\eta'}\frac{d\eta'}{d\xi} = (W - pqZ)\frac{dq}{d\xi'} + Z(1+p^2)\frac{dq}{d\eta'},$$

$$(7) \qquad t = \frac{dq}{d\xi'}\frac{d\xi'}{d\eta} + \frac{dq}{d\eta'}\frac{d\eta'}{d\eta} = -Z(1+q^2)\frac{dq}{d\xi'} + (W + pqZ)\frac{dq}{d\eta'},$$

d'où

$$(W + pqZ)s - Z(1+p^2)t = [W^2 + Z^2(1+p^2+q^2)]\frac{dq}{d\xi'}.$$

On en déduit, par soustraction,

$$Z[(1+q^2)r + (1+p^2)t - 2pqs] = [W^2 + Z^2(1+p^2+q^2)]\left(\frac{dp}{d\eta'} - \frac{dq}{d\xi'}\right),$$

et, par conséquent,

$$\frac{dp}{d\eta'} - \frac{dq}{d\xi'} = 0.$$

L'équation

$$d\zeta' = p\,d\xi' + q\,d\eta'$$

a donc pour second membre la différentielle exacte d'une fonction de ξ' et η'; par conséquent elle définit une surface, et si l'on pose

$$\frac{d\zeta'}{d\xi'} = p', \quad \frac{d\zeta'}{d\eta'} = q',$$

on a

$$p = p' \quad \text{et} \quad q = q'.$$

Les normales aux points correspondants de la surface donnée et de sa transformée sont donc parallèles, ce que, du reste, on pouvait conclure du mode de génération de la seconde.

Cette surface est aussi une surface d'étendue minimum. En effet, si nous posons, pour abréger,

$$W^2 + Z^2(1 + p^2 + q^2) = T^2,$$

les équations (4) et (5) nous ont déjà donné

$$\frac{dp}{d\eta'} = \frac{dp'}{d\eta'} = s' = \frac{1}{T^2}[(W - pqZ)s + Z(1 + q^2)r];$$

elles donnent également

$$\frac{dp}{d\xi'} = \frac{dp'}{d\xi'} = r' = \frac{1}{T^2}[(W + pqZ)r - Z(1 + p^2)s].$$

De même, des équations (6) et (7), on tire

$$\frac{dq}{d\eta'} = \frac{dq'}{d\eta'} = t' = \frac{1}{T^2}[Z(1 + q^2)s + (W - pqZ)t].$$

Donc

$$\begin{aligned} &T^2[(1 + p'^2)t' + (1 + q'^2)r' - 2p'q's'] \\ &= Z(1 + p^2)(1 + q^2)s + (W - pqZ)(1 + p^2)t + (W + pqZ)(1 + q^2)r \\ &\quad - Z(1 + p^2)(1 + q^2)s - 2pq(W - pqZ)s - 2pqZ(1 + q^2)r, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} &T^2[(1 + p'^2)t' + (1 + q'^2)r' - 2p'q's'] \\ &= (W - pqZ)[(1 + q^2)r + (1 + p^2)t - 2pqs], \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$(1 + p'^2)t' + (1 + q'^2)r' - 2p'q's' = 0,$$

équation des surfaces d'étendue minimum.

II.

Supposons maintenant que la surface décrite par le point ξ, η, ζ soit la caténoïde. Son équation est

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{\zeta}{a}} + e^{-\frac{\zeta}{a}}\right).$$

De là on tire

$$\frac{\xi\, d\xi}{\rho} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\zeta}{a}} - e^{-\frac{\zeta}{a}}\right) d\zeta, \quad \frac{\eta\, d\eta}{\rho} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\zeta}{a}} - e^{-\frac{\zeta}{a}}\right) d\zeta,$$

$$p = \frac{2\xi}{\rho\left(e^{\frac{\zeta}{a}} - e^{-\frac{\zeta}{a}}\right)}, \quad q = \frac{2\eta}{\rho\left(e^{\frac{\zeta}{a}} - e^{-\frac{\zeta}{a}}\right)};$$

d'ou

$$\operatorname{tang} x = \frac{q}{p} = \frac{\eta}{\xi}, \quad \frac{\xi}{\cos x} = \frac{\eta}{\sin x} = \rho.$$

Donc

$$p = \frac{2\cos x}{e^{\frac{\zeta}{a}} - e^{-\frac{\zeta}{a}}} = \frac{i\cos x}{\sin i\frac{\zeta}{a}}, \quad q = \frac{2\sin x}{e^{\frac{\zeta}{a}} - e^{-\frac{\zeta}{a}}} = \frac{i\sin x}{\sin i\frac{\zeta}{a}}.$$

On a maintenant

$$\sin^2 iy = \frac{-1}{p^2 + q^2} = \sin^2 i\frac{\zeta}{a},$$

on peut donc poser

$$y = -\frac{\zeta}{a},$$

d'où

$$p = \frac{-i\cos x}{\sin iy}, \quad q = \frac{-i\sin x}{\sin iy}.$$

Les équations (1) et (2) deviennent alors

$$d\xi' = \left(W + Z\frac{\sin x\cos x}{\sin^2 iy}\right)d\xi - Z\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 iy}\right)d\eta,$$

$$d\eta' = Z\left(1 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 iy}\right)d\xi + \left(W - Z\frac{\sin x\cos x}{\sin^2 iy}\right)d\eta.$$

Introduisons la fonction V définie plus haut,

$$V = -Z\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{-Zi}{\operatorname{tang} iy}, \quad \text{d'où} \quad Z = iV \operatorname{tang} iy\,;$$

il vient

$$d\xi' = \left(W + iV\frac{\sin x \cos x}{\sin iy \cos iy}\right) d\xi - iV\frac{\sin^2 iy - \sin^2 x}{\sin iy \cos iy}\, d\eta,$$

$$d\eta' = iV\frac{\sin^2 iy - \cos^2 x}{\sin iy \cos iy}\, d\xi + \left(W - iV\frac{\sin x \cos x}{\sin iy \cos iy}\right) d\eta.$$

Or on a

$$\xi = \frac{a}{2}(e^y + e^{-y})\cos x = a \cos iy \cos x,$$

$$\eta = \frac{a}{2}(e^y + e^{-y})\sin x = a \cos iy \sin x\,;$$

donc

$$d\xi = -a(\cos iy \sin x dx + \sin iy \cos x \,.\, idy),$$
$$d\eta = \quad a(\cos iy \cos x dx - \sin iy \sin x \,.\, idy),$$

d'où, en substituant,

$$\frac{1}{a}d\xi' = \left(-W\cos iy \sin x - iV\frac{\sin^2 x \cos x}{\sin iy} - iV\frac{\sin^2 iy - \sin^2 x}{\sin iy}\cos x\right)dx$$
$$+ \left(-W \sin iy \cos x - iV\frac{\sin x \cos^2 x}{\cos iy} + iV\frac{\sin^2 iy - \sin^2 x}{\cos iy}\sin x\right) idy,$$

$$\frac{1}{a}d\eta' = \left(-iV\frac{\sin^2 iy - \cos^2 x}{\sin iy}\cos x + W\cos iy \cos x - iV\frac{\sin x \cos^2 x}{\sin iy}\right)dx$$
$$+ \left(-iV\frac{\sin^2 iy - \cos^2 x}{\cos iy}\cos x - W\sin iy \sin x + iV\frac{\sin^2 x \cos x}{\cos iy}\right) idy.$$

De là on tire, en simplifiant,

$$\frac{1}{a}d\xi' = -(W\cos iy \sin x + iV \sin iy \cos x)\,dx$$
$$-(W \sin iy \cos x + iV \cos iy \sin x)\,idy,$$
$$\frac{1}{a}d\eta' = \quad (W\cos iy \cos x - iV \sin iy \sin x)\,dx$$
$$-(W\sin iy \sin x - iV\cos iy \cos x)\,idy.$$

Introduisons maintenant les nouvelles variables

$$x + iy = x_1, \quad x - iy = y_1;$$

il vient

$$\begin{aligned}
\frac{2}{a}\,d\xi' &= -(\mathrm{W}\sin x_1 + \mathrm{W}\sin y_1 + i\mathrm{V}\sin x_1 - i\mathrm{V}\sin y_1)\,dx \\
&\quad - (\mathrm{W}\sin x_1 - \mathrm{W}\sin y_1 + i\mathrm{V}\sin x_1 + i\mathrm{V}\sin y_1)\,i\,dy, \\
\frac{2}{a}\,d\eta' &= (\mathrm{W}\cos x_1 + \mathrm{W}\cos y_1 - i\mathrm{V}\cos y_1 + i\mathrm{V}\cos x_1)\,dx \\
&\quad - (\mathrm{W}\cos y_1 - \mathrm{W}\cos x_1 - i\mathrm{V}\cos x_1 - i\mathrm{V}\cos y_1)\,i\,dy,
\end{aligned}$$

ou enfin

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{2}{a}\,d\xi' &= -(\mathrm{W} + i\mathrm{V})\sin x_1\,dx_1 - (\mathrm{W} - i\mathrm{V})\sin y_1\,dy_1, \\
\frac{2}{a}\,d\eta' &= (\mathrm{W} + i\mathrm{V})\cos x_1\,dx_1 + (\mathrm{W} - i\mathrm{V})\cos y_1\,dy_1.
\end{aligned}\right.$$

Maintenant on a

$$d\zeta' = p\,d\xi' + q\,d\eta';$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{2}{a}\,d\zeta' &= i(\mathrm{W} + i\mathrm{V})\,\frac{\cos x \sin x_1 - \sin x \cos x_1}{\sin iy}\,dx_1 \\
&\quad + i(\mathrm{W} - i\mathrm{V})\,\frac{\sin y_1 \cos x - \cos y_1 \sin x}{\sin iy}\,dy_1,
\end{aligned}$$

ou bien

$$(9)\qquad d\zeta' = \frac{ai}{2}\left[(\mathrm{W} + i\mathrm{V})\,dx_1 - (\mathrm{W} - i\mathrm{V})\,dy_1\right].$$

Remarquons que $\mathrm{W} + i\mathrm{V}$ est une fonction de x_1 seulement, et $\mathrm{W} - i\mathrm{V}$ une fonction de y_1; car on doit avoir

$$\frac{d\mathrm{W}}{dx} = \frac{d\mathrm{V}}{dy}, \quad \frac{d\mathrm{W}}{dy} = -\frac{d\mathrm{V}}{dx};$$

or

$$x = \frac{x_1 + y_1}{2}, \quad y = \frac{x_1 - y_1}{2i},$$

d'où

$$\frac{dW}{dx_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{dW}{dx} - i\frac{dW}{dy}\right), \quad \frac{dW}{dy_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{dW}{dx} + i\frac{dW}{dy}\right),$$
$$\frac{dV}{dx_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{dV}{dx} - i\frac{dV}{dy}\right), \quad \frac{dV}{dy_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{dV}{dx} + i\frac{dV}{dy}\right),$$

et par conséquent

$$\frac{d(W + iV)}{dy_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{dW}{dx} + i\frac{dW}{dy} + i\frac{dV}{dx} - \frac{dV}{dy}\right) = 0,$$
$$\frac{d(W - iV)}{dx_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{dW}{dx} - i\frac{dW}{dy} - i\frac{dV}{dx} - \frac{dV}{dy}\right) = 0.$$

L'équation (9) s'intègre donc par deux quadratures, et donne l'équation générale des surfaces d'étendue minimum

$$\zeta' = \frac{ai}{2}[f(x+iy) - F(x-iy)],$$

ou, en évitant les fonctions imaginaires,

$$(10) \quad \zeta' = \frac{ai}{2}\{\varphi(x+iy) - \varphi(x-iy) + i[\psi(x+iy) + \psi(x-iy)]\},$$

φ et ψ étant des fonctions réelles.

III.

L'équation (9), ou son intégrale (10), fournit immédiatement le résultat énoncé ci-dessus, savoir : que toutes les surfaces d'étendue minimum peuvent être regardées comme des transformées de la caténoïde. En effet, l'une quelconque de ces surfaces étant donnée, et son équation étant mise sous la forme (10), si l'on détermine deux fonctions réelles de x et y, W et V, de telle sorte que

$$W + iV = \varphi'(x+iy) + i\psi'(x+iy),$$
$$W - iV = \varphi'(x-iy) - i\psi'(x-iy),$$

ou bien

$$2W = \varphi'(x+iy) + \varphi'(x-iy),$$
$$2V = \psi'(x+iy) + \psi'(x-iy),$$

l'équation (9), qui est celle de la transformée de la caténoïde correspondant à ces deux fonctions W et V, représentera une surface identique à la surface donnée, aux constantes près d'intégration.

Sans chercher quelles sont les diverses conséquences auxquelles pourrait conduire cette remarque, nous nous bornerons ici à ce qui concerne la formation de l'équation d'une surface d'étendue minimum passant par une courbe plane donnée. Et d'abord, nous pouvons toujours choisir l'axe des ζ perpendiculaire au plan de cette courbe; supposons en outre, pour plus de facilité, que ce soit l'ellipse représentée par l'équation

$$\frac{\xi'^2}{\alpha^2} + \frac{\eta'^2}{\beta^2} = 1,$$

il sera facile de généraliser la méthode et de l'appliquer à une courbe quelconque.

Posons, pour abréger,

$$\mathrm{W} + i\mathrm{V} = f(x_1), \quad \mathrm{W} - i\mathrm{V} = \mathrm{F}(y_1).$$

Lorsque le point ξ', η', ζ' décrira l'ellipse, le point ξ, η, ζ décrira sur la caténoïde une certaine courbe telle, que pour chacun de ses points on ait

$$(11) \qquad f(x_1)\,dx_1 = \mathrm{F}(y_1)\,dy_1,$$

puisque ζ' doit rester constant, et qu'en même temps les équations (8) soient vérifiées, ou, ce qui revient au même, la première de ces équations (8) avec la condition $pd\xi' + qd\eta' = d\zeta'$.

On aura donc, pour $d\zeta' = 0$,

$$pd\xi' + qd\eta' = 0, \quad \text{d'où} \quad \tan x = \frac{q}{p} = \frac{-d\xi'}{d\eta'}.$$

Mais de l'équation de l'ellipse, on tire

$$\frac{d\eta'}{d\xi'} = \frac{-\beta^2\xi'}{\alpha^2\eta'};$$

donc

$$\frac{\alpha^2\eta'}{\beta^2\xi'} = \tan x, \quad \frac{\frac{\eta'}{\beta}}{\beta\sin x} = \frac{\frac{\xi'}{\alpha}}{\alpha\cos x} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2\cos^2 x + \beta^2\sin^2 x}},$$

d'où

$$\xi' = \frac{\alpha^2 \cos x}{\sqrt{\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x}}, \qquad \eta' = \frac{\beta^2 \sin x}{\sqrt{\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x}},$$

$$d\xi' = \frac{-\alpha^2 \beta^2 \sin x dx}{(\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}, \quad d\eta' = \frac{\alpha^2 \beta^2 \cos x dx}{(\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Donc, en vertu de la première des équations (8) et de l'équation (11), on doit avoir, lorsque le point ξ', η', ζ' décrit l'ellipse,

$$\frac{2\alpha^2 \beta^2 \sin x dx}{a(\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} = f(x_1) dx_1 (\sin x_1 + \sin y_1) = 2 \sin x \cos iy f(x_1) dx_1$$

ou bien

$$\frac{\alpha^2 \beta^2 dx}{a \cos iy (\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} = f(x_1) dx_1 = \mathrm{F}(y_1) dy_1.$$

Cette équation devant avoir lieu quand le point ξ, η, ζ décrit une certaine courbe sur la caténoïde, nous pouvons nous donner arbitrairement cette courbe, en posant $y = \varphi(x)$, d'où

$$x_1 = x + i\varphi(x), \quad y_1 = x - i\varphi(x),$$

et, par suite,

$$x = \varpi(x_1) = \theta(y_1),$$

les fonctions ϖ et θ ne différant que par le signe de i. On a par conséquent aussi

$$iy = x_1 - \varpi(x_1) = \theta(y_1) - y_1.$$

Maintenant, si l'on prend pour $f(x_1)$ et $\mathrm{F}(y_1)$ les deux fonctions suivantes

$$f(x_1) = \frac{\alpha^2 \beta^2 \varpi'(x_1)}{a \cos[x_1 - \varpi(x_1)][\alpha^2 \cos^2 \varpi(x_1) + \beta^2 \sin^2 \varpi(x_1)]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\mathrm{F}(y_1) = \frac{\alpha^2 \beta^2 \theta'(y_1)}{a \cos[y_1 - \theta(y_1)][\alpha^2 \cos^2 \theta(y_1) + \beta^2 \sin^2 \theta(y_1)]^{\frac{3}{2}}},$$

l'équation

$$d\zeta' = \frac{ai}{2}[f(x_1) dx_1 - \mathrm{F}(y_1) dy_1]$$

représentera une certaine surface d'étendue minimum, et il est évident que lorsqu'on posera, dans l'équation de cette surface, $\varpi(x_1) = x$, ou, ce qui revient au même, $\theta(y_1) = x$, on obtiendra une courbe de niveau dont l'équation différentielle sera précisément celle de l'ellipse donnée. Cette surface passera donc par une courbe égale et parallèle à cette ellipse, et que l'on pourra amener à coïncider avec elle, par une détermination convenable des constantes d'intégration.

Proposons-nous, pour prendre un exemple simple, de déterminer la surface de telle sorte que, lorsque le point ξ', η', ζ' décrira l'ellipse, le point ξ, η, ζ décrive un parallèle de la caténoïde, défini par la condition $y = y_0$. On aura alors

$$x_1 = x + iy_0, \quad y_1 = x - iy_0,$$
$$x = x_1 - iy_0 = y_1 + iy_0.$$

Nous poserons donc

$$f(x_1) = \frac{\alpha^2\beta^2}{a\cos iy_0\left[\alpha^2\cos^2(x_1 - iy_0) + \beta^2\sin^2(x_1 - iy_0)\right]^{\frac{3}{2}}},$$
$$F(y_1) = \frac{\alpha^2\beta^2}{a\cos iy_0\left[\alpha^2\cos^2(y_1 + iy_0) + \beta^2\sin^2(y_1 + iy_0)\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

On voit par là que, réciproquement, si m, n, p, k représentent des nombres donnés, l'équation

$$d\zeta' = \frac{ki}{2}\left[\frac{dx_1}{(m^2\cos^2 x_1 + n^2\sin^2 x_1 + 2pi\sin x_1\cos x_1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{dy_1}{(m^2\cos^2 y_1 + n^2\sin^2 y_1 - 2pi\sin y_1\cos y_1)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

est celle d'une surface d'étendue minimum dont une des courbes de niveau est une ellipse. Les axes de cette ellipse, qui sont parallèles aux axes des ξ et des η, se détermineront aisément, en identifiant les fonctions de x_1 et de y_1 que renferme cette équation, avec celles qui sont écrites ci-dessus.