JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. MATHET

Solution d'un problème de géométrie

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 313-322.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__313_0>

SOLUTION D'UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. G. MATHET,
Professeur au lycée de Nîmes.

I.

Entre deux points fixes, M_0 et M_1, on trace une courbe quelconque dans l'espace. Soient R une fonction réelle des coordonnées d'un point quelconque M de la courbe par rapport à trois axes fixes, et φ un angle, fonction des mêmes coordonnées. Le point M décrivant la courbe, de M_0 en M_1, on multiplie la longueur de l'arc infiniment petit, compté à partir de chaque position du point M, par la valeur correspondante de R, et on fait tourner la ligne obtenue, d'un angle égal à φ, autour d'un axe normal à la courbe en M; on compose ensuite comme des forces les lignes infiniment petites ainsi obtenues: est-il possible de déterminer les fonctions R et φ, et la normale autour de laquelle se fait la rotation, de telle sorte que la résultante ne dépende que des coordonnées des points M_0 et M_1, quelle que soit la courbe qui les joint?

On connaît la solution de ce problème, pour le cas où l'on suppose que toutes les courbes qui vont de M_0 en M_1 sont dans un même plan, et que l'axe de rotation est constamment normal à ce plan. Si x et y sont des coordonnées par rapport à deux axes rectangulaires fixes pris dans ce plan; si l'on a

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{Y}{X},$$

X et Y étant des fonctions réelles de x et y; enfin si l'on pose

$$u = x + y\sqrt{-1}, \quad F(u) = X + Y\sqrt{-1},$$

la résultante considérée ci-dessus n'est autre que la ligne menée de l'origine des coordonnées au point qui représente la valeur de l'intégrale

$$\int_{u_0}^{u_1} \mathrm{F}(u)\,du,$$

prise avec la valeur initiale zéro. Or on sait que, pour que la valeur de cette intégrale ne dépende que de ses limites, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{d\mathrm{X}}{dx} = \frac{d\mathrm{Y}}{dy}, \quad \frac{d\mathrm{X}}{dy} = -\frac{d\mathrm{Y}}{dx},$$

pourvu que les diverses courbes qui conduisent de M_0 en M_1 ne comprennent entre elles aucun point où X et Y cessent d'être continues.

J'ai réussi à résoudre complétement le problème dont l'énoncé précède, sans faire aucune hypothèse sur la nature des courbes et sur la direction de l'axe de rotation, sauf qu'il soit en chaque point normal à la courbe décrite. J'ai trouvé les conditions suivantes, dont on remarquera l'analogie avec celles que l'on trouve dans le cas particulier indiqué ci-dessus.

Pour que la résultante ne dépende que des coordonnées des points M_0 et M_1, il faut et il suffit :

1° Que toutes les courbes tracées entre M_0 et M_1 soient situées sur une même surface, appartenant à la classe de celles qu'on appelle *surfaces d'étendue minimum*, et du reste quelconque;

2° Que l'axe autour duquel se fait la rotation soit, en chaque point, normal à cette surface;

3° Que R et φ, considérées comme des fonctions de coordonnées x et y, relatives à un certain système de trajectoires orthogonales de la surface, soient de la forme

$$\mathrm{R} = \sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2}, \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}},$$

X et Y étant des fonctions réelles de x et y, qui satisfont seulement aux conditions

$$\frac{d\mathrm{X}}{dx} = \frac{d\mathrm{Y}}{dy}, \quad \frac{d\mathrm{X}}{dy} = -\frac{d\mathrm{Y}}{dx}.$$

Il faut, en outre, que les diverses courbes tracées sur la surface entre M_0 et M_1 soient situées de telle sorte que l'une puisse se ramener à l'autre, par une déformation continue, sans passer par aucun point où X et Y cesseraient d'être continues.

Pour établir ces résultats, j'ai dû me servir de la notation et des règles du *Calcul des Quaternions* de M. Hamilton (*Lectures on Quaternions*, by sir W.-R. Hamilton; Dublin, 1853). J'indiquerai du reste brièvement les points de cette théorie qui m'ont servi pour le présent travail.

II.

La première chose à faire, c'est de trouver une expression analytique de la transformation que l'on fait subir à la courbe $M_0 M_1$ dans notre problème.

Nous appellerons *vecteur* une droite allant de l'origine à un point quelconque, et nous conviendrons que la somme de deux vecteurs est la diagonale du parallélogramme dont ils sont les côtés. Cela posé, soient i, j, k des longueurs égales à l'unité, prises respectivement, à partir de l'origine, sur les directions positives des trois axes coordonnés rectangulaires. L'expression

$$u = ix + jy + kz,$$

représentera le vecteur allant de l'origine au point dont les coordonnées sont x, y, z. Si ce point décrit la courbe, le vecteur du point infiniment voisin sera

$$u + du = i(x + dx) + j(y + dy) + k(z + dz),$$

et, par conséquent, un vecteur égal et parallèle à l'élément de courbe compris entre ces deux points aura pour expression

$$du = idx + jdy + kdz.$$

Soit maintenant une expression de la forme

$$\mathrm{W} + i\mathrm{X} + j\mathrm{Y} + k\mathrm{Z},$$

W, X, Y, Z étant des fonctions réelles de x, y, z. Cette expression, que M. Hamilton appelle un *quaternion,* prend, pour chaque valeur de u, une ou plusieurs valeurs déterminées, et peut dès lors être regardée comme une fonction de u. Si l'on pose

$$\frac{X}{\cos\alpha} = \frac{Y}{\cos\beta} = \frac{Z}{\cos\gamma},$$

on pourra l'écrire

$$F(u) = W + \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\,(i\cos\alpha + j\cos\beta + k\cos\gamma),$$

et la quantité entre parenthèses représente un vecteur, de longueur égale à l'unité, faisant avec les axes des angles α, β, γ; c'est l'*axe* du quaternion. Nous le désignerons par λ, de sorte que

$$F(u) = W + \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\,.\,\lambda.$$

La condition que λ est perpendiculaire au vecteur du est exprimée par

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

Si l'on pose maintenant

$$R = \sqrt{W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}{W},$$

si l'on multiplie le vecteur du par R, et si on le fait tourner, d'un angle égal à φ, autour de l'axe λ, on obtiendra un nouveau vecteur

$$ix' + jy' + kz'.$$

Or on démontre, dans la théorie des quaternions, que l'expression de ce nouveau vecteur est précisément celle que l'on obtient en multipliant $F(u)$ par du, c'est-à-dire

$$W + iX + jY + kZ \quad \text{par} \quad idx + jdy + kdz,$$

avec la condition $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$; pourvu que, en faisant cette multiplication, on ait soin de ne pas intervertir l'ordre des facteurs et de poser

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j. \end{cases}$$

La somme de ces produits, prise en faisant varier u de u_0 à u_1, exprimera la somme des vecteurs infiniment petits obtenus par la transformation de la courbe M_0M_1, c'est-à-dire la résultante considérée ci-dessus; son expression sera donc l'intégrale

$$\int_{u_0}^{u_1} F(u)\,du.$$

Nous avons maintenant à chercher les conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions W, X, Y, Z pour que cette intégrale prenne la même valeur lorsqu'on va du point M_0 au point M_1 en suivant deux courbes infiniment voisines, c'est-à-dire pour que la variation de l'intégrale, quand on y remplace x, y, z par $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, sans changer les limites, soit identiquement nulle. Or on a

$$\delta \int_{u_0}^{u_1} F(u)\,du = \int_{u_0}^{u_1} [\delta F(u).du + F(u).d\delta u];$$

il suffit donc qu'on ait

$$(1)\qquad \delta F(u).du = dF(u).\delta u,$$

ce qui réduit la variation de l'intégrale à

$$\int_{u_0}^{u_1} [dF(u).\delta u + F(u)\,d\delta u] = \int_{u_0}^{u_1} d[F(u)\,\delta u],$$

quantité identiquement nulle.

Développons la condition exprimée par l'équation (1). Si l'on pose

$$dF(u) = dW + i dX + j dY + k dZ,$$
$$\delta F(u) = \delta W + i\delta X + j\delta Y + k\delta Z,$$

et si l'on fait les multiplications en tenant compte de l'ordre des facteurs et des équations (α), on trouve, en égalant les coefficients de i, j, k et les termes indépendants dans les deux membres, les quatre équations suivantes

$$(2)\quad \begin{cases} dX\,\delta x + dY\,\delta y + dZ\,\delta z = \delta X\,dx + \delta Y\,dy + \delta Z\,dz, \\ dW\,\delta x + dY\,\delta z - dZ\,\delta y = \delta W\,dx + \delta Y\,dz - \delta Z\,dy, \\ dW\,\delta y + dZ\,\delta x - dX\,\delta z = \delta W\,dy + \delta Z\,dx - \delta X\,dz, \\ dW\,\delta z + dX\,\delta y - dY\,\delta x = \delta W\,dz + \delta X\,dy - \delta Y\,dx. \end{cases}$$

Il faut maintenant remplacer, dans ces équations,

$$dW \quad \text{par} \quad \frac{dW}{dx}dx + \frac{dW}{dy}dy + \frac{dW}{dz}dz,$$

$$\delta W \quad \text{par} \quad \frac{dW}{dx}\delta x + \frac{dW}{dy}\delta y + \frac{dW}{dz}\delta z,$$

et dX, δX, etc., par les expressions analogues. Si ensuite on substitue à dz et à δz leurs valeurs prises dans les équations

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0, \quad X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = 0,$$

on trouve, par un calcul facile, les quatre équations suivantes

$$(3)\quad Z\left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}\right) + Y\left(\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz}\right) + X\left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}\right) = 0,$$

$$(4)\quad Z\left(\frac{dW}{dy} + \frac{dZ}{dx}\right) + Y\left(\frac{dY}{dx} - \frac{dW}{dz}\right) - X\left(\frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}\right) = 0,$$

$$(5)\quad X\left(\frac{dW}{dz} - \frac{dX}{dy}\right) + Z\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dW}{dx}\right) - Y\left(\frac{dZ}{dz} + \frac{dX}{dx}\right) = 0,$$

$$(6)\quad Y\left(\frac{dW}{dx} - \frac{dY}{dz}\right) + X\left(\frac{dX}{dz} - \frac{dW}{dy}\right) - Z\left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy}\right) = 0.$$

Ces équations expriment toutes les conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions W, X, Y, Z. Il nous reste maintenant à les interpréter.

III.

L'équation (3) exprime que l'équation

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz = 0$$

est l'équation différentielle d'une surface. Si p et q sont les dérivées partielles de z par rapport à x et à y, tirées de l'équation de cette surface, on a identiquement

$$dz = pdx + qdy,$$

et par conséquent

$$\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Z}} = -p, \quad \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{Z}} = -q.$$

Les courbes tracées entre M_0 et M_1 doivent être situées sur cette surface, que les équations suivantes vont définir.

Si l'on multiplie les équations (4), (5) et (6) respectivement par X, Y, Z, et si l'on ajoute les produits, on élimine ainsi W, et il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{ZX}\frac{d\mathrm{Z}}{xd} + \mathrm{XY}\frac{d\mathrm{Y}}{dx} - \mathrm{X}^2\left(\frac{d\mathrm{Y}}{dy} + \frac{d\mathrm{Z}}{dz}\right) + \mathrm{XY}\frac{d\mathrm{X}}{dy} + \mathrm{ZY}\frac{d\mathrm{Z}}{dy} - \mathrm{Y}^2\left(\frac{d\mathrm{Z}}{dz} + \frac{d\mathrm{X}}{dx}\right)&\\ + \mathrm{ZY}\frac{d\mathrm{Y}}{dz} + \mathrm{ZX}\frac{d\mathrm{X}}{dz} - \mathrm{Z}^2\left(\frac{d\mathrm{X}}{dx} + \frac{d\mathrm{Y}}{dy}\right) = 0,&\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}\mathrm{X}\left(\mathrm{X}\frac{d\mathrm{X}}{dx} + \mathrm{Y}\frac{d\mathrm{Y}}{dx} + \mathrm{Z}\frac{d\mathrm{Z}}{dx}\right) - (\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2)\frac{d\mathrm{X}}{dx} + \mathrm{Y}\left(\mathrm{X}\frac{d\mathrm{X}}{dy} + \mathrm{Y}\frac{d\mathrm{Y}}{dy} + \mathrm{Z}\frac{d\mathrm{Z}}{dy}\right)&\\ - (\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2)\frac{d\mathrm{Y}}{dy} + \mathrm{Z}\left(\mathrm{X}\frac{d\mathrm{X}}{dz} + \mathrm{Y}\frac{d\mathrm{Y}}{dz} + \mathrm{Z}\frac{d\mathrm{Z}}{dz}\right)&\\ - (\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2)\frac{d\mathrm{Z}}{dz} = 0,&\end{aligned}$$

ou, enfin,

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{\mathrm{X}}{\sqrt{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2}} + \frac{d}{dy}\cdot\frac{\mathrm{Y}}{\sqrt{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2}} + \frac{d}{dz}\cdot\frac{\mathrm{Z}}{\sqrt{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2}} = 0.$$

Cette équation peut encore s'écrire ainsi

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\frac{d}{dy}\cdot\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}-\frac{d}{dz}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=0.$$

Si l'on convient que, z étant une fonction de x et y, on écrira

$$\left(\frac{d}{dx}\right)f(x,y,z)=\frac{d.f(x,y,z)}{dx}+\frac{d.f(x,y,z)}{dz}\cdot\frac{dz}{dx},$$

il vient

$$\left(\frac{d}{dx}\right)\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=\frac{d}{dx}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+p\frac{d}{dz}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\left(\frac{d}{dy}\right)\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=\frac{d}{dy}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+q\frac{d}{dz}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

L'équation ci-dessus devient alors

$$\left(\frac{d}{dx}\right)\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\left(\frac{d}{dy}\right)\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$
$$-p\frac{d}{dz}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}-q\frac{d}{dz}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}-\frac{d}{dz}\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=0,$$

ou bien

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\left(\frac{d}{dy}\right)\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right]$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dz}\frac{p^2}{1+p^2+q^2}+\frac{d}{dz}\frac{q^2}{1+p^2+q^2}+\frac{d}{dz}\frac{1}{1+p^2+q^2}\right]=0,$$

d'où

$$\left(\frac{d}{dx}\right)\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\left(\frac{d}{dy}\right)\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=0.$$

Cette équation, qui peut encore se mettre sous la forme

$$(1+p^2)\,t+(1+q^2)\,r-2pqs=0, \tag{7}$$

en posant

$$\frac{dp}{dx}=r,\quad \frac{dq}{dy}=t,\quad \frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx}=s,$$

définit les surfaces d'étendue minimum ; donc les courbes tracées entre M_0 et M_1 doivent être situées sur une de ces surfaces.

Il nous reste à déterminer Z et W. L'équation (4), si l'on y remplace X par $-pZ$ et Y par $-qZ$, devient successivement

$$\frac{dW}{dy} + q\frac{dW}{dz} + \frac{dZ}{dx} + p\frac{dZ}{dz} + p\frac{dY}{dy} - q\frac{dY}{dx} = 0,$$

$$\left(\frac{dW}{dy}\right) + \left(\frac{dZ}{dx}\right) + p\frac{dY}{dy} - q\frac{dY}{dx} = 0,$$

$$(8) \qquad \left(\frac{dW}{dy}\right) = pq\left(\frac{dZ}{dy}\right) - (1+q^2)\left(\frac{dZ}{dx}\right) - (qs - pt)Z,$$

et l'équation (5) donne de même

$$\left(\frac{dW}{dx}\right) = -pq\left(\frac{dZ}{dx}\right) + (1+p^2)\left(\frac{dZ}{dy}\right) + (ps - qr)Z.$$

Transformons ces deux équations, en considérant W et Z comme des fonctions de p et de q, et supprimant les parenthèses des dérivées totales, qui sont maintenant inutiles. Il vient

$$\begin{aligned} & s\frac{dW}{dp} + t\frac{dW}{dq} \\ = {} & pq\left(s\frac{dZ}{dp} + t\frac{dZ}{dq}\right) - (1+q^2)\left(r\frac{dZ}{dp} + s\frac{dZ}{dq}\right) - (qs - pt)Z, \\ & r\frac{dW}{dp} + s\frac{dW}{dq} \\ = {} & -pq\left(r\frac{dZ}{ap} + s\frac{dZ}{dq}\right) + (1+p^2)\left(s\frac{dZ}{dp} + t\frac{dZ}{dq}\right) + (ps - qr)Z. \end{aligned}$$

D'où l'on tire, en tenant compte de l'équation (7),

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dW}{dp} &= -pq\frac{dZ}{dp} - (1+q^2)\frac{dZ}{dq} - qZ, \\ \frac{dW}{dq} &= (1+p^2)\frac{dZ}{dp} + pq\frac{dZ}{dq} + pZ. \end{aligned} \right.$$

Enfin, si l'on pose

$$Z\sqrt{1+p^2+q^2} = -V,$$

ces équations se réduisent immédiatement à

$$\frac{dW}{dp} = \frac{pq}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\frac{dV}{dp} + \frac{1+q^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\frac{dV}{dq},$$

$$\frac{dW}{dq} = \frac{-(1+p^2)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\frac{dV}{dp} - \frac{pq}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\frac{dV}{dq}.$$

Nous allons maintenant remplacer les coordonnées p et q par de nouvelles variables, et nous choisirons celles qui ont été adoptées par M. Ossian Bonnet dans son Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des surfaces courbes (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 1860).

Soient

$$\operatorname{tang} x = \frac{q}{p}, \quad \sin iy = \frac{i}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

i étant l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$. On a

$$\frac{dx}{dp} = \frac{-q}{p^2+q^2}, \qquad \frac{dx}{dq} = \frac{p}{p^2+q^2},$$

$$\frac{dy}{dp} = \frac{-p}{(p^2+q^2)\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{dy}{dq} = \frac{-q}{(p^2+q^2)\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Il vient donc

$$\frac{q}{p^2+q^2}\frac{dW}{dx} + \frac{p}{(p^2+q^2)\sqrt{1+p^2+q^2}}\frac{dW}{dy}$$
$$= \frac{-p}{(p^2+q^2)\sqrt{1+p^2+q^2}}\frac{dV}{dx} + \frac{q}{p^2+q^2}\frac{dV}{dy},$$

$$\frac{p}{p^2+q^2}\frac{dW}{dx} - \frac{q}{(p^2+q^2)\sqrt{1+p^2+q^2}}\frac{dW}{dy}$$
$$= \frac{q}{(p^2+q^2)\sqrt{1+p^2+q^2}}\frac{dV}{dx} + \frac{p}{p^2+q^2}\frac{dV}{dy};$$

d'où l'on tire

$$\frac{dW}{dx} = \frac{dV}{dy}, \quad \frac{dW}{dy} = -\frac{dV}{dx},$$

ce qui achève de démontrer les résultats annoncés dans le § I^{er}.