JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + xy + y^2 + 2z^2 + zt + 2t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 308-310.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__308_0>

SUR LA FORME
$x^2 + xy + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

On demande une expression simple du nombre N des représentations d'un entier donné n, par la forme

$$x^2 + xy + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2,$$

c'est-à-dire du nombre N des solutions de l'équation

$$n = x^2 + xy + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Pour répondre à cette question, je pose d'abord

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

m désignant un entier impair non divisible par 3, et les exposants α, β pouvant se réduire à zéro; puis, je cherche la somme

$$\zeta_1(m)$$

des diviseurs de m, laquelle joue ici un rôle important. On a en effet

$$N = 6(3^{\beta+1} - 2)\zeta_1(m).$$

On voit que l'exposant α n'influe nullement sur la valeur de N qui pour toutes les valeurs possibles de α reste la même que si l'on avait $\alpha = 0$. L'exposant β au contraire a de l'influence.

Pour $n = 1$, notre formule donne $N = 6$; et dans ce cas il y a effectivement six représentations qui répondent à $z = 0$, $t = 0$, avec $x = \pm 1$, $y = 0$, ou $x = 0$, $y = \pm 1$, ou enfin $x = \pm 1$, $y = \mp 1$.

Pour $n = 2$, on a également $N = 6$. Pour $n = 3$, il vient $N = 42$, et ainsi de suite. Mais je n'insiste pas sur ces applications numériques.

Supposons maintenant qu'au lieu de chercher le nombre total N des solutions propres ou impropres de l'équation

$$2^\alpha 3^\beta m = x^2 + xy + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2,$$

on demande seulement le nombre total M des solutions propres, c'est-à-dire des solutions pour lesquelles x, y, z, t n'ont aucun facteur commun > 1. Il faudra d'abord observer que de telles solutions n'existent pas quand on a $\alpha > 1$, car alors x, y, z, t ont nécessairement le facteur commun 2, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer. Nous n'avons donc à nous occuper que de l'entier impair $3^\beta m$ et de l'entier impairement pair $2.3^\beta m$. La valeur de M est la même pour ces deux nombres. Pour en donner l'expression, introduisons au lieu de $\zeta_1(m)$ la fonction

$$Z_1(m)$$

définie, au moyen des facteurs premiers $a, b, \ldots$ de l'entier

$$m = a^\mu b^\nu \ldots,$$

par l'équation

$$Z_1(m) = (a^\mu + a^{\mu-1})(b^\nu + b^{\nu-1})\ldots,$$

et distinguons les trois cas de $\beta = 0$, $\beta = 1$, $\beta > 1$.

Quand $\beta = 0$, c'est-à-dire quand il s'agit de l'un des deux entiers

$$m, \; 2m,$$

on a

$$M = 6Z_1(m).$$

Quand $\beta = 1$, c'est-à-dire quand il s'agit d'un des deux entiers

$$3m, \; 6m,$$

on a

$$M = 42 Z_1(m).$$

Enfin, pour les entiers

$$3^\beta m, \quad 2.3^\beta m,$$

qui répondent à $\beta > 1$, on trouve

$$M = 16.3^\beta Z_1(m).$$

Je ne crois pas avoir besoin d'ajouter des exemples.