JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3\left(z^2 + t^2\right)$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 225-226.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__225_0>

SUR LA FORME
$2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2)$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier quelconque n, on demande le nombre des représentations de n par la forme

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2),$$

c'est-à-dire le nombre

$$\mathrm{N}\,[n = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2)]$$

des solutions de l'équation indéterminée

$$n = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2),$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Nous avons enseigné quelques pages plus haut, dans ce cahier même, à calculer le nombre des représentations d'un entier donné, par la forme

$$x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2.$$

Nous répondrons donc complétement et de la manière la plus courte à la question qui nous est posée ici en disant que la valeur de

$$\mathrm{N}\,[n = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2)]$$

et celle de

$$\mathrm{N}\,(2n = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2)$$

sont égales entre elles.

2. On a

$$\mathrm{N}\,(2n = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2) = 0$$

quand n est de la forme $3q+1$, parce qu'alors $2n$ est $\equiv 2 \pmod{3}$. Il suit de là que

$$N[3q+1 = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2+t^2)] = 0.$$

Mais pour $n = 3q$ et pour $n = 3q+2$ on trouvera des nombres plus ou moins grands de représentations.

Pour $n=2$, on a

$$N(4 = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2) = 6,$$

comme le prouvent les équations

$$4 = (\pm 2)^2 + 3.0^2 + 6.0^2 + 6.0^2$$

et

$$4 = (\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2 + 6.0^2.$$

L'entier 2 doit donc être représenté six fois par la forme

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2+t^2).$$

Voici les valeurs de x, y, z, t pour ces six représentations :

$$\begin{array}{llll}
x = 1, & y = 0, & z = 0, & t = 0, \\
x = -1, & y = 0, & z = 0, & t = 0, \\
x = 0, & y = 1, & z = 0, & t = 0, \\
x = 0, & y = -1, & z = 0, & t = 0, \\
x = 1, & y = -1, & z = 0, & t = 0, \\
x = -1, & y = 1, & z = 0, & t = 0.
\end{array}$$

Pour $n=3$, on trouve

$$N[3 = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2+t^2)] = 4,$$

et ainsi de suite. Mais je n'insiste pas sur ces détails.