JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

EDMOND BOUR

Mémoire sur les mouvements relatifs

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 1-51.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__1_0>

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

APPLICATIONS DE MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

MÉMOIRE
SUR
LES MOUVEMENTS RELATIFS;

PAR M. EDMOND BOUR.

Présenté à l'Académie des Sciences le 25 février 1856.

A l'époque où je rédigeais ce Mémoire, les questions qui y sont traitées pouvaient offrir un certain intérêt d'actualité. Il n'en est plus de même aujourd'hui, tous ces problèmes ayant été surabondamment résolus par les méthodes les plus variées, et figurant depuis longtemps dans les traités les plus élémentaires d'analyse et de mécanique, voire même de physique.

Cependant je ne pense pas que les publications anciennes ou récentes sur cette matière soient de nature à faire du tort à un ouvrage tel que celui-ci, qui s'adresse avant tout aux géomètres, et où l'on se propose de développer certaines applications très-simples, mais dignes de quelque attention, à des problèmes intéressants, des belles méthodes de la *Mécanique analytique*.

La science des Lagrange et des Jacobi mérite bien, en effet, d'être cultivée pour elle-même; et il ne paraît pas inutile d'en multiplier les applications, car je sais par expérience qu'en écrivant sur ce sujet on s'expose à ne pas être compris, même de ceux qui, par l'*intitulé* de leurs travaux, sembleraient devoir être plus particulièrement au courant de la question.

Comme je tiens à ne me jamais rien attribuer au delà de ce que j'ai fait, je déclare d'avance, pour qu'on ne s'y trompe pas, que ce Mémoire ne renferme aucun principe vraiment nouveau : il est uniquement destiné à montrer comment la plupart des problèmes ordinaires de la dynamique se trouvent résolus, aussitôt qu'ils sont posés, par l'emploi des procédés de l'analyse transcendante. Avec ces méthodes, en effet, tous les détails intermédiaires, toutes les difficultés accessoires qui sont relatives à l'intégration des équations du mouvement ont été élucidées une fois pour toutes, lors de l'établissement de la théorie générale; et l'on n'a plus absolument à s'en préoccuper quand on aborde les applications particulières.

Chargé depuis quelque temps de l'enseignement de la Mécanique rationnelle à l'École Polytechnique, je crois à peine utile de dire que je n'ai point eu un seul instant la pensée d'introduire, même à titre d'essai, de pareilles méthodes dans des leçons élémentaires.

La clarté et la simplicité de l'exposition exigent impérieusement que, dans un cours de ce genre, tous les intermédiaires soient avec soin conservés et mis en lumière, chacun avec le jour qui lui convient; elles exigent qu'à côté de chaque propriété du mouvement on aperçoive pour ainsi dire sa raison d'être, de manière à saisir immédiatement dans les différents problèmes ce qu'ils ont de commun et ce par quoi ils diffèrent; elles exigent, en un mot, qu'en traitant de la mécanique, on laisse à l'analyse ce qui appartient à l'analyse, et que, tout en faisant largement appel aux secours de celle-ci, l'on n'envie pas aux géomètres purs le plaisir de contempler de haut et d'embrasser d'un coup d'œil le magnifique ensemble de toutes les branches de la science mathématique, dans leur harmonieuse corrélation.

Gray, 1862.

On sait qu'on peut considérer les mouvements relatifs comme des mouvements absolus, en ajoutant aux forces réellement agissantes deux forces fictives dont Coriolis a donné les expressions : ces forces sont des fonctions des coordonnées et des vitesses relatives des points mobiles, ainsi que des quantités qui définissent le mouvement du système mobile de comparaison.

Cette manière d'envisager les mouvements relatifs est celle qui se prête le mieux à une étude géométrique. Si l'on veut, au contraire, la traduire en analyse, comme les composantes des forces fictives contiennent les dérivées des coordonnées relatives, les équations différentielles prennent une forme toute différente de celle qu'on rencontre ordinairement dans la mécanique analytique, où les forces sont toujours supposées fonctions des coordonnées seulement.

Il suit de là que les méthodes générales paraissent ne pas s'appliquer à ces équations, au moins telles qu'elles sont immédiatement obtenues.

Pour les faire rentrer dans la règle commune, il n'y aurait évidemment qu'à recourir aux formules générales de Lagrange, qui donnent les équations différentielles du mouvement dans un système de variables quelconque.

Par une transformation de coordonnées, on exprimerait la fonction des forces et la demi-force vive absolue au moyen des coordonnées apparentes et du temps, et l'on obtiendrait indirectement les équations différentielles auxquelles satisfont les coordonnées relatives.

La théorie analytique et géométrique des mouvements relatifs n'est donc plus à faire : on a dès à présent tout ce qu'il faut pour traiter tous les problèmes qui peuvent se rencontrer, et pour achever la solution de ceux qui ne présentent pas de difficultés analytiques trop considérables; je crois cependant que l'exposition de la méthode que je propose ne sera pas entièrement dénuée d'intérêt, surtout au point de vue des applications. Il est d'ailleurs évident qu'au fond elle ne peut que rentrer dans celle de Lagrange, à un léger artifice près.

A l'exemple de Coriolis, je suppose que l'on considère le mouvement comme un mouvement absolu; et je montre comment on en obtient les équations sous la forme *canonique*, en ajoutant, à la fonction des forces, des termes qui dépendent seulement des coordonnées apparentes et du temps. Ces termes additionnels, qui jouent ici un rôle analogue à celui des forces fictives de Coriolis, se divisent également en deux parties : la première dépend du déplacement de l'origine, et la seconde du changement de direction des axes.

L'utilité de mon travail ressortira d'ailleurs de quelques applications aux problèmes les plus célèbres en ce genre, problèmes jusqu'ici assez incomplétement étudiés ou résolus par approximation, tandis que ma méthode en fournit avec la plus grande facilité les intégrales rigoureuses.

Cette méthode se prête tout naturellement à l'application de la théorie de la variation des arbitraires, sous l'influence de certaines actions perturbatrices. En regardant comme termes perturbateurs ceux qui proviennent de la non-fixité des axes coordonnés, on pourra, dans plusieurs cas, se dispenser de tout calcul pour effectuer l'intégration du problème troublé, si l'on suppose connue celle du mouvement absolu correspondant.

Par exemple dans le problème, pourtant assez compliqué, de la rotation d'un corps quelconque autour de son centre de gravité, on reconnaît immédiatement qu'il suffit, pour obtenir les intégrales du mouvement relatif, d'ajouter un terme à l'une des intégrales données par Jacobi pour le cas du mouvement absolu, et de changer la valeur des constantes arbitraires qui figurent dans ces intégrales : il n'y a donc aucun nouveau calcul d'intégration. Dans le cas des problèmes plus rebelles, tels que celui du pendule, même à l'équateur, on trouve du moins avec une très-grande facilité la seule solution rationnelle de cette question célèbre ; c'est-à-dire le développement des intégrales en séries ordonnées suivant les puissances de la rotation de la terre, considérée comme quantité très-petite du premier ordre.

Un premier chapitre est consacré à l'étude du mouvement d'un ou de plusieurs points libres, je passe ensuite au cas d'un système à liaisons quelconques; je termine par les applications qui ont pour objet le mouvement des projectiles ainsi que celui du pendule simple dans le vide, et les différents cas de la rotation des corps solides autour de leur centre de gravité.

CHAPITRE PREMIER.

MOUVEMENT RELATIF D'UN ENSEMBLE DE POINTS LIBRES.

1. Soient Ox, Oy, Oz, trois axes rectangulaires mobiles auxquels on rapporte le mouvement d'un système de points libres; m_i, x_i, y_i, z_i, la masse et les coordonnées de l'un quelconque de ces points; enfin X_i, Y_i, Z_i, les composantes de la force motrice qui sollicite ce même point. Si les axes coordonnés étaient fixes, les équations du mouvement seraient

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= x'_i, \quad m_i\frac{dx'_i}{dt} = X_i,\\ \frac{dy_i}{dt} &= y'_i, \quad m_i\frac{dy'_i}{dt} = Y_i,\\ \frac{dz_i}{dt} &= z'_i, \quad m_i\frac{dz'_i}{dt} = Z_i. \end{aligned}\right.$$

Je considère seulement les cas où les composantes X_i, Y_i, Z_i, sont les dérivées partielles d'une même fonction U des coordonnées x_i, y_i, z_i, des divers points mobiles : U est ce que l'on appelle la *fonction des forces;* de plus, je désigne par T la demi-somme des forces vives apparentes du système

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i(x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i);$$

enfin si je pose, avec M. Hamilton,

$$U - T = H,$$

on sait que la forme (1) peut être remplacée par la suivante :

$$(2)\qquad \frac{dx_i}{dt} = -\frac{dH}{d.m_i x'_i}, \quad \frac{d.m_i x'_i}{dt} = \frac{dH}{dx_i}.$$

Si les axes sont mobiles, en désignant par u_i, v_i, w_i, les projections sur ces axes de l'accélération totale absolue du point dont la masse est m_i, on a toujours

$$(3)\qquad m_i u_i = \frac{dU}{dx_i}, \quad m_i v_i = \frac{dU}{dy_i}, \quad m_i w_i = \frac{dU}{dz_i};$$

mais on n'a plus

$$u_i = \frac{dx'_i}{dt}, \quad v_i = \frac{dy'_i}{dt}, \quad w_i = \frac{dz'_i}{dt}.$$

Je vais commencer par calculer les nouvelles expressions des quantités u_i, v_i, w_i, quand les axes auxquels on rapporte le mouvement du système sont eux-mêmes animés d'un mouvement que je supposerai connu.

2. Soient CP, CQ, CR, trois axes rectangulaires fixes; p, q, r, les coordonnées par rapport à ces axes d'un point dont la masse est m; p', q', r', celles de l'origine mobile O; et enfin a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'', respectivement les cosinus des angles faits par les axes mobiles avec CP, CQ, CR : les formules de transformation qui servent à passer du système (Ox, Oy, Oz) au système (CP, CQ, CR) sont

$$(4) \qquad \begin{cases} p = p' + ax + a'y + a''z, \\ q = q' + bx + b'y + b''z, \\ r = r' + cx + c'y + c''z; \end{cases}$$

d'où, en différentiant,

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{dp'}{dt} + a\dfrac{dx}{dt} + a'\dfrac{dy}{dt} + a''\dfrac{dz}{dt} + x\dfrac{da}{dt} + y\dfrac{da'}{dt} + z\dfrac{da''}{dt}, \\ \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{dq'}{dt} + b\dfrac{dx}{dt} + b'\dfrac{dy}{dt} + b''\dfrac{dz}{dt} + x\dfrac{db}{dt} + y\dfrac{db'}{dt} + z\dfrac{db''}{dt}, \\ \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{dr'}{dt} + c\dfrac{dx}{dt} + c'\dfrac{dy}{dt} + c''\dfrac{dz}{dt} + x\dfrac{dc}{dt} + y\dfrac{dc'}{dt} + z\dfrac{dc''}{dt}. \end{cases}$$

Désignons par P, Q, R; P', Q', R', les projections sur les axes mobiles des vitesses absolues du point que l'on considère et de l'origine O, c'est-à-dire posons

$$(6) \qquad \begin{cases} P = a\dfrac{dp}{dt} + b\dfrac{dq}{dt} + c\dfrac{dr}{dt}, \\ Q = a'\dfrac{dp}{dt} + b'\dfrac{dq}{dt} + c'\dfrac{dr}{dt}, \\ R = a''\dfrac{dp}{dt} + b''\dfrac{dq}{dt} + c''\dfrac{dr}{dt}; \end{cases}$$

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} P' &= a\frac{dp'}{dt} + b\frac{dq'}{dt} + c\frac{dr'}{dt},\\ Q' &= a'\frac{dp'}{dt} + b'\frac{dq'}{dt} + c'\frac{dr'}{dt},\\ R' &= a''\frac{dp'}{dt} + b''\frac{dq'}{dt} + c''\frac{dr'}{dt},\end{aligned}\right.$$

et tirons des équations (5) les valeurs de P, Q, R : il suffit pour cela d'ajouter ces équations après les avoir multipliées respectivement par a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''.

Si je fais, pour abréger,

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} a''\frac{da'}{dt} + b''\frac{db'}{dt} + c''\frac{dc'}{dt} &= \alpha,\\ a\frac{da''}{dt} + b\frac{db''}{dt} + c\frac{dc''}{dt} &= \beta,\\ a'\frac{da}{dt} + b'\frac{db}{dt} + c'\frac{dc}{dt} &= \gamma\ [*],\end{aligned}\right.$$

il vient

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} P &= P' + \frac{dx}{dt} + \beta z - \gamma y,\\ Q &= Q' + \frac{dy}{dt} + \gamma x - \alpha z,\\ R &= R' + \frac{dz}{dt} + \alpha y - \beta x.\end{aligned}\right.$$

3. En continuant les calculs, qui n'offrent ni intérêt ni difficulté d'aucune espèce, on arriverait aux équations différentielles du mouvement. Ces équations sont du second ordre, et on peut, si l'on veut, les remplacer par un nombre double d'équations du premier ordre, en prenant pour variables auxiliaires les premières dérivées des inconnues x, y, z, c'est-à-dire en faisant

$$x' = \frac{dx}{dt},\quad y' = \frac{dy}{dt},\quad z' = \frac{dz}{dt}.$$

---

[*] On sait que ces quantités sont les composantes suivant les trois axes mobiles de la rotation instantanée du système de comparaison lié à ces axes.

Il est évident qu'il y a une infinité de systèmes de variables auxiliaires conduisant à un résultat du même genre. Or l'artifice dont j'ai fait usage consiste simplement à employer au lieu des dérivées, pour opérer la réduction au premier ordre, les quantités suivantes qui sont des fonctions linéaires de ces dérivées :

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{dx}{dt} + \beta z - \gamma y, \\ \eta &= \frac{dy}{dt} + \gamma x - \alpha z, \\ \zeta &= \frac{dz}{dt} + \alpha y - \beta x. \end{aligned}\right.$$

J'introduis immédiatement ces nouvelles variables dans les équations (5), à la place de $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$; et ces équations deviennent

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{dp'}{dt} + a\xi + a'\eta + a''\zeta, \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{dq'}{dt} + b\xi + b'\eta + b''\zeta, \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{dr'}{dt} + c\xi + c'\eta + c''\zeta. \end{aligned}\right.$$

Comme elles sont maintenant tout à fait pareilles aux équations (4), il est évident qu'une deuxième différentiation conduira à une série d'équations de même forme que les précédentes; et si l'on désigne de même par u, v, w; u', v', w', les projections sur les axes mobiles des accélérations absolues du point que l'on considère et de l'origine O, on devra trouver en définitive

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= u' + \frac{d\xi}{dt} + \beta\zeta - \gamma\eta, \\ v &= v' + \frac{d\eta}{dt} + \gamma\xi - \alpha\zeta, \\ w &= w' + \frac{d\zeta}{dt} + \alpha\eta - \beta\xi. \end{aligned}\right.$$

Rétablissons maintenant l'indice i; remplaçons u_i, v_i, w_i, par leurs valeurs tirées des équations (3), et nous aurons les équations différentielles du mouvement

$$
(\mathrm{I}) \qquad \left\{
\begin{aligned}
m_i \frac{d\xi_i}{dt} &= \frac{d\mathrm{U}}{dx_i} - m_i u' + \gamma m_i \eta_i - \beta m_i \zeta_i, \\
m_i \frac{d\eta_i}{dt} &= \frac{d\mathrm{U}}{dy_i} - m_i v' + \alpha m_i \zeta_i - \gamma m_i \xi_i, \\
m_i \frac{d\zeta_i}{dt} &= \frac{d\mathrm{U}}{dz_i} - m_i w' + \beta m_i \xi_i - \alpha m_i \eta_i,
\end{aligned}
\right.
$$

auxquelles il faut adjoindre le système (10), qui donne les dérivées par rapport au temps des variables principales x_i, y_i, z_i :

$$
(\mathrm{II}) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dx_i}{dt} &= \xi_i + \gamma y_i - \beta z_i, \\
\frac{dy_i}{dt} &= \eta_i + \alpha z_i - \gamma x_i, \\
\frac{dz_i}{dt} &= \zeta_i + \beta x_i - \alpha y_i.
\end{aligned}
\right.
$$

4. Or ces équations, (I) et (II), se ramènent facilement à la forme canonique des équations (2), en déterminant convenablement la fonction H qui figure dans ces équations, et qui ne doit plus être ici la fonction d'Hamilton.

En effet, la demi-somme des forces vives apparentes est

$$
\mathrm{T} = \frac{1}{2} \sum m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 \right],
$$

ou, en remplaçant les dérivées par leurs valeurs en fonction de ξ_i, η_i, ζ_i :

$$
(13) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{T} = {} & \frac{1}{2} \sum m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) \\
& + \sum m_i [(\gamma y_i - \beta z_i)\xi_i + (\alpha z_i - \gamma x_i)\eta_i + (\beta x_i - \alpha y_i)\zeta_i] \\
& + \frac{1}{2} \sum m_i [(\gamma y_i - \beta z_i)^2 + (\alpha z_i - \gamma x_i)^2 + (\beta x_i - \alpha y_i)^2)];
\end{aligned}
\right.
$$

et l'on voit déjà que le système (II) revient à

$$
(14) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{d\mathrm{T}}{d.m_i\xi_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = \frac{d\mathrm{T}}{d.m_i\eta_i}, \quad \frac{dz_i}{dt} = \frac{d\mathrm{T}}{d.m_i\zeta_i}.
$$

Je pose maintenant

$$(15)\quad \begin{cases} \mathrm{K} = -u'\sum m_i x_i - v'\sum m_i y_i - w'\sum m_i z_i, \\ \mathrm{G} = \frac{1}{2}\sum m_i[(\gamma y_i - \beta z_i)^2 + (\alpha z_i - \gamma x_i)^2 + (\beta x_i - \alpha y_i)^2]\ [^*]; \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} \mathrm{U} + \mathrm{K} + \mathrm{G} = \mathrm{U}_1, \\ \mathrm{U}_1 - \mathrm{T} = \mathrm{H}. \end{cases}$$

Si l'on se rappelle que, d'après mes hypothèses, les quantités u', v', w'; α, β, γ, sont des fonctions données du temps t, indépendantes des coordonnées x_i, y_i, z_i, on verra facilement que la valeur (I) de $m_i \frac{d\xi_i}{dt}$ n'est autre chose que la dérivée de H par rapport à x_i. D'un autre côté, comme U_1 ne contient ni les dérivées x'_i, y'_i, z'_i, ni par suite les variables auxiliaires ξ_i, η_i, ζ_i, on a

$$\frac{d\mathrm{T}}{d.m_i\xi_i} = -\frac{d\mathrm{H}}{d.m_i\xi_i};$$

et l'on peut enfin remplacer les équations différentielles (I) et (II), ou (I) et (14), par les suivantes, où l'on reconnaît la forme canonique des équations ordinaires de la dynamique :

$$(\mathrm{III})\quad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = -\dfrac{d\mathrm{H}}{d.m_i\xi_i}, & \dfrac{d.m_i\xi_i}{dt} = \dfrac{d\mathrm{H}}{dx_i}, \\ \dfrac{dy_i}{dt} = -\dfrac{d\mathrm{H}}{d.m_i\eta_i}, & \dfrac{d.m_i\eta_i}{dt} = \dfrac{d\mathrm{H}}{dy_i}, \\ \dfrac{dz_i}{dt} = -\dfrac{d\mathrm{H}}{d.m_i\zeta_i}, & \dfrac{d.m_i\zeta_i}{dt} = \dfrac{d\mathrm{H}}{dz_i}. \end{cases}$$

De là le théorème fondamental que voici :

THÉORÈME. — *Les équations différentielles du mouvement relatif*

---

[*] Je ferai remarquer que la quantité G est la demi-force vive que possède, en vertu de la rotation instantanée du système de comparaison, l'ensemble des points de ce système qui coïncident avec les divers points mobiles, à l'instant que l'on considère.

d'un système de points libres sont de même forme que celles d'un mouvement absolu, pourvu qu'à la fonction des forces on ajoute deux fonctions nouvelles que j'ai désignées par les lettres K *et* G :

La première dépend du mouvement de l'origine ; elle est homogène et du premier degré par rapport aux coordonnées apparentes des points mobiles ;

La deuxième est introduite par le changement de direction des axes ; elle est homogène et du deuxième degré par rapport aux coordonnées.

CHAPITRE II.

MOUVEMENT RELATIF D'UN SYSTÈME A LIAISONS QUELCONQUES.

5. On sait qu'on peut remplacer les liaisons par des forces convenables, et considérer alors tous les points du système comme libres. Les équations différentielles que j'ai données dans le premier chapitre peuvent donc être conservées, à la condition d'introduire dans leurs deuxièmes membres des termes dont Lagrange a donné la forme, et qui représentent les composantes des forces provenant des liaisons du système. Si l'on désigne par p le nombre des équations qui expriment ces liaisons, par $L_k = 0$ l'une quelconque d'entre elles, et enfin par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, des coefficients indéterminés, les équations différentielles du mouvement peuvent s'écrire :

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} m_i\frac{d\xi_i}{dt} &= \frac{d(U_1-T)}{dx_i} + \sum_{k=1}^{k=p}\lambda_k\frac{dL_k}{dx_i},\\ m_i\frac{d\eta_i}{dt} &= \frac{d(U_1-T)}{dy_i} + \sum_{k=1}^{k=p}\lambda_k\frac{dL_k}{dy_i},\\ m_i\frac{d\zeta_i}{dt} &= \frac{d(U_1-T)}{dz_i} + \sum_{k=1}^{k=p}\lambda_k\frac{dL_k}{dz_i}\ [*]. \end{aligned}\right.$$

[*] *Mécanique analytique*, 3e édition, revue, corrigée et annotée par M. J. Bertrand. Tome Ier, note VI, page 409. Le calcul qui va suivre offre la plus grande analogie avec celui qui se trouve développé dans la note que je rappelle, pour le cas d'un mouvement absolu. C'est ce qui me dispensera d'insister sur quelques détails d'algèbre, qui ne présentent d'ailleurs aucune difficulté.

Les quantités L_k sont supposées données en fonction des coordonnées apparentes seulement.

Supposons maintenant, toujours avec Lagrange, qu'on ait profité des équations de liaison pour exprimer ces coordonnées apparentes en fonction d'autres inconnues,

$$q_1, \quad q_2, \ldots, \quad q_n,$$

réduites au plus petit nombre possible, et partant tout à fait indépendantes; et proposons-nous de chercher les équations différentielles auxquelles ces nouvelles variables doivent satisfaire.

Pour cela je multiplie les équations (17) respectivement par $\frac{dx_i}{dq_m}$, $\frac{dy_i}{dq_m}$, $\frac{dz_i}{dq_m}$ (m étant l'un des nombres entiers $1, 2, \ldots, n$); et je les ajoute à toutes les équations analogues qu'on obtiendrait en attribuant à l'indice i toutes les valeurs dont il est susceptible. Le premier membre de l'équation résultante est

$$\sum m_i \left(\frac{d\xi_i}{dt}\frac{dx_i}{dq_m} + \frac{d\eta_i}{dt}\frac{dy_i}{dq_m} + \frac{d\zeta_i}{dt}\frac{dz_i}{dq_m}\right);$$

quant au deuxième membre, il se compose de trois parties, et d'abord de

$$\sum \left(\frac{dU_1}{dx_i}\frac{dx_i}{dq_m} + \frac{dU_1}{dy_i}\frac{dy_i}{dq_m} + \frac{dU_1}{dz_i}\frac{dz_i}{dq_m}\right),$$

somme qui n'est autre chose que

$$\frac{dU_1}{dq_m}:$$

en effet, U_1 ne contient pas d'autres variables que les coordonnées x_i, y_i, z_i; plus les quantités qui dépendent du mouvement des axes, et qui sont considérées dans toutes ces transformations comme des constantes.

Une réduction du même genre n'a pas lieu pour T : le $\frac{dT}{dx_i}$ des équations (17) a été pris en supposant T exprimé en fonction de x_i, y_i, z_i; ξ_i, η_i, ζ_i, comme l'indique l'équation (13); or, dans la transformation actuelle, je remplace x_i et ξ_i par leurs valeurs en fonction des nouvelles variables q_m et des dérivées q'_m de ces variables; on a donc

$$\frac{dT}{dq_m} = \sum \frac{dT}{dx_i}\frac{dx_i}{dq_m} + \sum \frac{dT}{d\xi_i}\frac{d\xi_i}{dq_m}, \tag{18}$$

en supposant, pour abréger l'écriture, que le signe $\sum$ indique non-seulement une sommation par rapport à l'indice i, mais encore la réunion des trois sommes analogues relatives à chacun des trois axes coordonnés.

On tire de l'équation (18)

$$\sum \frac{dT}{dx_i}\frac{dx_i}{dq_m} = \frac{dT}{dq_m} - \sum \frac{dT}{d\xi_i}\frac{d\xi_i}{dq_m}:$$

telle est la valeur de la deuxième partie du second membre de l'équation que nous cherchons à former; et il ne reste plus à considérer, dans les équations (17), que les termes qui contiennent les facteurs indéterminés λ_k; or ces termes, comme on le sait, disparaissent tous dans la somme. Il vient donc en définitive :

$$\sum m_i \frac{d\xi_i}{dt}\frac{dx_i}{dq_m} + \frac{dT}{dq_m} - \sum \frac{dT}{d\xi_i}\frac{d\xi_i}{dq_m} = \frac{dU_1}{dq_m}. \tag{19}$$

6. Mais on a identiquement

$$\sum m_i \frac{d\xi_i}{dt}\frac{dx_i}{dq_m} = \frac{d}{dt}\cdot\sum m_i \xi_i \frac{dx_i}{dq_m} - \sum m_i \xi_i \frac{d}{dt}\cdot\frac{dx_i}{dq_m}: \tag{20}$$

d'un autre côté si, comme je l'ai supposé, les liaisons ne dépendent pas du temps, on trouvera facilement [*]

$$\frac{dx_i}{dq_m} = \frac{dx'_i}{dq'_m} = \frac{d\xi_i}{dq'_m}$$

et

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{dx_i}{dq_m} = \frac{dx'_i}{dq_m} = \frac{d}{dq_m}\cdot\frac{dT}{d.m_i\xi_i},$$

---

[*] *Mécanique analytique,* 3e édition, tome Ier, note VI, page 410.

en se rappelant que les équations (14) donnent

$$x'_i = \frac{dT}{d.m_i\xi_i};$$

on conclut de là

$$(21)\qquad \sum m_i\xi_i \frac{dx_i}{dq_m} = \sum m_i\xi_i \frac{d\xi_i}{dq'_m},$$

et

$$(22)\quad \sum m_i\xi_i \frac{d}{dt}\cdot\frac{dx_i}{dq_m} = \sum m_i\xi_i \frac{d}{dq_m}\cdot\frac{dT}{d.m_i\xi_i} = \frac{d}{dq_m}\sum \xi_i\frac{dT}{d\xi_i} - \sum\frac{dT}{d\xi_i}\frac{d\xi_i}{dq_m}.$$

En ayant égard aux relations (21) et (22), l'équation (20) devient

$$(23)\quad \sum m_i \frac{d\xi_i}{dt}\frac{dx_i}{dq_m} = \frac{d}{dt}\cdot\sum m_i\xi_i\frac{d\xi_i}{dq'_m} - \frac{d}{dq_m}\cdot\sum\xi_i\frac{dT}{d\xi_i} + \sum\frac{dT}{d\xi_i}\frac{d\xi_i}{dq_m};$$

et l'équation (19)

$$(24)\qquad \frac{d}{dt}\cdot\sum m_i\xi_i\frac{d\xi_i}{dq'_m} - \frac{d}{dq_m}\cdot\sum\xi_i\frac{dT}{d\xi_i} + \frac{dT}{dq_m} = \frac{dU}{dq_m}.$$

7. Si l'on se reporte maintenant à l'expression (13) de T, on reconnaît que cette fonction peut se décomposer en trois parties : la première est homogène et du second degré par rapport à ξ_i, η_i, ζ_i, je la désigne par T_2; j'appelle T_1 l'ensemble des termes qui sont du premier degré par rapport aux mêmes variables; c'est-à-dire que je fais

$$(25)\qquad T_2 = \frac{1}{2}\sum m_i(\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2),$$

$$(26)\quad T_1 = \sum m_i[(\gamma y_i - \beta z_i)\xi_i + (\alpha z_i - \gamma x_i)\eta_i + (\beta x_i - \alpha y_i)\zeta_i];$$

quant à la troisième partie de T, c'est précisément la fonction G des équations (15), en sorte que l'on a

$$T = T_2 + T_1 + G.$$

L'introduction de ces notations permet de simplifier l'équation (24); en effet, d'une part,

$$\sum m_i\xi_i\frac{d\xi_i}{dq'_m} = \frac{dT_2}{dq'_m},$$

et, d'autre part, en vertu du théorème des fonctions homogènes,

$$\sum \xi_i \frac{dT}{d\xi_i} = 2T_2 + T_1.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (24), et supprimant les termes qui se détruisent, il vient

$$(27) \qquad \frac{d}{dt} \cdot \frac{dT_2}{dq'_m} - \frac{d}{dq_m}(T_2 - G) = \frac{dU_1}{dq_m},$$

équation qu'on peut aussi écrire

$$(\text{IV}) \qquad \frac{d}{dt} \cdot \frac{dT_2}{dq'_m} - \frac{dT_2}{dq_m} = \frac{d(U+K)}{dq_m}.$$

On obtiendra n équations de même forme, en attribuant successivement à l'indice m chacune des valeurs $1, 2, \ldots, n$; et l'on formera ainsi les équations différentielles du mouvement relatif dans un système d'inconnues quelconque $q_1, q_2, \ldots, q_n$, inconnues que nous supposons seulement réduites au plus petit nombre possible par le moyen des équations de liaison.

Les équations que nous venons de trouver remplissent, dans notre manière d'étudier les mouvements relatifs, le même rôle que les équations célèbres de Lagrange, dans la théorie ordinaire du mouvement absolu.

J'ai déjà dit que ces équations de Lagrange, qui servent pour des variables quelconques, s'appliquent évidemment au cas où les variables sont les coordonnées relatives ou des fonctions de ces coordonnées; et il est à peine nécessaire de faire remarquer que, si nos équations (27) ou (IV) ont une forme différente de la forme connue, c'est que T est ici la demi-force vive relative. On aurait toujours, avec l'illustre géomètre,

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{dT'}{dq'_m} - \frac{dT'}{dq_m} = \frac{dU}{dq_m},$$

si l'on désignait par T' la demi-somme des forces vives réelles de tout le système.

8. Pour passer de la forme (IV) à la forme canonique, il n'y a qu'à faire subir aux équations précédentes une transformation tout à fait pareille à celle que Poisson et Hamilton ont appliquée aux équations de Lagrange. Posons donc

$$\frac{dT_2}{dq'_m} = p_m, \tag{28}$$

et profitons des n équations qu'on obtient en faisant successivement dans la précédente $m = 1, 2, \ldots, n$, pour éliminer $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$. En remplaçant ainsi ces dérivées par des expressions qui contiennent à la fois $p_1, p_2, \ldots, p_n$ et $q_1, q_2, \ldots, q_n$, il est clair qu'on altérera les valeurs des dérivées de T_2 par rapport à ces dernières variables. Le calcul suivant va nous donner entre les dérivées, prises dans les deux systèmes de variables, les relations qui nous sont nécessaires pour achever la transformation.

La quantité T, considérée comme fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_n;\ q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, est homogène et du deuxième degré par rapport aux dérivées; et l'on a

$$2T = \sum \frac{dT}{dq'_k} q'_k,$$

ce que l'on peut écrire

$$T = \sum \frac{dT}{dq'_k} q'_k - T.$$

Prenons la variation des deux membres en faisant varier toutes les variables à la fois; il vient

$$\delta T = \sum q'_k \delta . \frac{dT}{dq'_k} + \sum \frac{dT}{dq'_k} \delta q'_k - \sum \frac{dT}{dq_k} \delta q_k - \sum \frac{dT}{dq'_k} \delta q'_k,$$

ou, en supprimant les termes qui se détruisent,

$$\delta T = \sum q'_k \delta \frac{dT}{dq'_k} - \sum \frac{dT}{dq_k} \delta q_k. \tag{29}$$

Cela posé, rappelons-nous que nous avons fait

$$T = T_2 + T_1 + G,$$

d'où, en remarquant que G ne contient pas les dérivées des inconnues, et que $\frac{dT_2}{dq'_k}$ est égal à p_k,

$$\frac{dT}{dq'_k} = p_k + \frac{dT_1}{dq'_k};$$

d'où enfin

$$(30) \qquad \delta.\frac{dT}{dq'_k} = \delta p_k + \delta.\frac{dT_1}{dq'_k}.$$

D'un autre côté, T_1 est du premier degré par rapport aux dérivées q'_k; par suite les quantités $\frac{dT_1}{dq'_k}$ en sont indépendantes, et ne contiennent pas d'autres variables que $q_1, q_2, \ldots, q_n$, donc

$$\delta.\frac{dT_1}{dq'_k} = \delta q_1 \frac{d}{dq_1}\cdot\frac{dT_1}{dq'_k} + \ldots + \delta q_n \frac{d}{dq_n}\cdot\frac{dT_1}{dq'_k}.$$

L'équation (30) devient ainsi :

$$\delta.\frac{dT}{dq'_k} = \delta p_k + \delta q_1 \frac{d}{dq_1}\cdot\frac{dT_1}{dq'_k} + \ldots + \delta q_n \frac{d}{dq_n}\cdot\frac{dT_1}{dq'_k}:$$

et l'on a enfin pour la variation de T

$$(31) \quad \delta T = \sum q'_m \delta p_m + \sum\left(-\frac{dT}{dq_m} + q'_1 \frac{d}{dq_m}\cdot\frac{dT_1}{dq'_1} + \ldots + q'_n \frac{d}{dq_m}\cdot\frac{dT_1}{dq'_n}\right)\delta q_m,$$

le signe $\sum$ se rapportant à l'indice m.

Tel est le développement de δT suivant les variations des quantités p_m et q_m. Si donc on considère T comme une fonction de $p_1, p_2, \ldots, p_n; q_1, q_2, \ldots, q_n$, le coefficient de chacune des variations δp_m, δq_m fera connaître la dérivée partielle de T, prise par rapport à la variable correspondante : donc

$$(32) \qquad \frac{\mathrm{d}T}{dp_m} = q'_m,$$

$$(33) \qquad \frac{\mathrm{d}T}{dq_m} = -\frac{dT}{dq_m} + \frac{d}{dq_m}\cdot\sum q'_k \frac{dT_1}{dq'_k}.$$

Reportons-nous maintenant à l'expression (26) de T_1, et remplaçons

ξ_i, η_i, ζ_i, par leurs valeurs en fonction de x'_i, y'_i, z'_i ; il vient

$$(34)\quad \mathrm{T}_1 = \sum m_i[(\gamma y_i - \beta z_i)x'_i + (\alpha z_i - \gamma x_i)y'_i + (\beta x_i - \alpha y_i)z'_i] - 2\mathrm{G}.$$

Donc $\mathrm{T}_1 + 2\mathrm{G}$ est une fonction homogène du premier degré de x'_i, y'_i, z'_i, et partant de q'_1, q'_2, .., q'_n; de plus

$$\frac{d\mathrm{T}_1}{dq'_k} = \frac{d(\mathrm{T}_1 + 2\mathrm{G})}{dq'_k},$$

donc

$$\sum q'_k \frac{d\mathrm{T}_1}{dq'_k} = \sum q'_k \frac{d(\mathrm{T}_1 + 2\mathrm{G})}{dq'_k} = \mathrm{T}_1 + 2\mathrm{G},$$

et l'on peut écrire l'équation (33)

$$(35)\qquad \frac{\mathrm{d}\mathrm{T}}{dq_m} = -\frac{d\mathrm{T}}{dq_m} + \frac{d(\mathrm{T}_1 + 2\mathrm{G})}{dq_m} = -\frac{d(\mathrm{T}_2 - \mathrm{G})}{dq_m}.$$

La dérivée par rapport à q_m, qui figure dans le premier membre de cette équation, est prise en supposant T exprimé en fonction des variables p_m et q_m ; celle du troisième, au contraire, a été formée avant la substitution de $p_1, p_2, \ldots, p_n$, à la place de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$; c'est donc la même que celle qui entre dans l'équation (27). Si je remplace cette quantité par sa valeur, l'équation (27) devient

$$\frac{dp_m}{dt} = \frac{\mathrm{d}\mathrm{H}}{dq_m}.$$

Quant aux dérivées par rapport au temps des variables q_m, elles sont données par l'équation (32), que l'on peut écrire

$$\frac{dq_m}{dt} = -\frac{\mathrm{d}\mathrm{H}}{dp_m},$$

puisque

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{T}}{dp_m} = -\frac{\mathrm{d}\mathrm{H}}{dp_m}.$$

En donnant à l'indice m toutes les valeurs dont il est susceptible, et supprimant la caractéristique spéciale d, qui n'a plus de raison d'être, on arrive enfin aux équations du mouvement, réduites à la forme canonique

$$
(\mathrm{V}) \quad \begin{cases}
\dfrac{dq_1}{dt} = -\dfrac{d\mathrm{H}}{dp_1}, & \dfrac{dp_1}{dt} = \dfrac{d\mathrm{H}}{dq_1}, \\
\dfrac{dq_2}{dt} = -\dfrac{d\mathrm{H}}{dp_2}, & \dfrac{dp_2}{dt} = \dfrac{d\mathrm{H}}{dq_2}, \\
\dots\dots\dots\dots, \\
\dfrac{dq_n}{dt} = -\dfrac{d\mathrm{H}}{dp_n}, & \dfrac{dp_n}{dt} = \dfrac{d\mathrm{H}}{dq_n}.
\end{cases}
$$

9. Avant de passer aux applications, récapitulons en quelques mots la série des opérations à effectuer pour mettre en équations chaque problème particulier.

L'expression générale de T_2 est

$$
\mathrm{T}_2 = \frac{1}{2}\sum m(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = \frac{1}{2}\sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2)
$$
$$
+ \sum m[(\beta z - \gamma y)x' + (\gamma x - \alpha z)y' + (\alpha y - \beta x)z'] + \mathrm{G}.
$$

On aura d'abord à introduire, s'il y a lieu, dans cette équation les quantités $q_1, q_2, \ldots, q_n$; $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, à la place des coordonnées et des vitesses; on posera ensuite :

$$
\frac{d\mathrm{T}_2}{dq'_1} = p_1, \quad \frac{d\mathrm{T}_2}{dq'_2} = p_2, \ldots, \quad \frac{d\mathrm{T}_2}{dq'_n} = p_n.
$$

Il ne restera plus enfin qu'à profiter de ces relations pour éliminer les dérivées $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, et à poser

$$
\mathrm{H} = \mathrm{U} + \mathrm{K} + \mathrm{G} - \mathrm{T},
$$

pour avoir les équations différentielles du mouvement sous la forme canonique

$$
\frac{dq_i}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dp_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dq_i}.
$$

10. Ainsi que je l'ai annoncé, l'objet principal de ce Mémoire est de montrer, par la résolution de quelques problèmes un peu plus compliqués que les problèmes ordinaires des Traités de mécanique rationnelle, l'utilité des méthodes de la mécanique analytique, et les avantages multiples qui résultent de la réduction des équations du mouvement à la forme canonique d'Hamilton et de Jacobi.

Dans toutes les applications qui vont suivre, on ne trouvera pas un seul exemple de l'intégration d'une équation différentielle : tout se réduira à des calculs algébriques, relatifs à la préparation de mon système de variables, et à une simple quadrature.

On sait en effet que, dès que l'on possède la moitié des intégrales d'un système d'équations de la forme (V), si ces intégrales satisfont à certaines conditions indiquées par M. Liouville [*], on trouve immédiatement par quadrature les intégrales en pareil nombre qui complètent la solution du problème.

Or, dans tous les problèmes sans exception qu'on est parvenu jusqu'ici à résoudre rigoureusement ou par approximation, cette première moitié des intégrales exactes ou approchées s'obtient à la simple inspection des équations différentielles du mouvement, ou plutôt de la fonction H qui définit à elle seule un problème de mécanique d'une manière complète. Il n'y a donc pas lieu, dans les questions qui vont nous occuper, d'intégrer des équations différentielles, encore moins de négliger des termes qui gênent pour achever la solution de la question, comme sont obligés de le faire la plupart des auteurs qui ont traité ces problèmes-là par les procédés ordinaires, puisqu'au moyen des méthodes de la mécanique analytique, tout se réduit à une quadrature fort simple.

11. Soient

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= \varphi\,(p_1, q_1,\ldots, p_n, q_n, t),\\ \alpha_1 &= \varphi_1(p_1, q_1,\ldots, p_n, q_n, t),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_{n-1} &= \varphi_{n-1}(p_1, q_1,\ldots, p_n, q_n, t),\end{aligned}\right.$$

les intégrales connues, dont on suppose que le nombre soit égal à n; si l'on désigne avec Poisson par (α, β) la fonction

$$\sum\nolimits_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\alpha}{dq_i}\frac{d\beta}{dp_i} - \frac{d\alpha}{dp_i}\frac{d\beta}{dq_i}\right),$$

[*] *Journal de Mathématiques*, t. XX, p. 137.

les conditions qui doivent être remplies par les intégrales s'expriment en écrivant qu'on a identiquement

$$(\alpha_m, \alpha_{m'}) = 0, \tag{37}$$

pour toutes les combinaisons deux à deux des intégrales (36); il faut de plus qu'on puisse tirer de ces intégrales les valeurs de $p_1, p_2, \ldots, p_n$, en $q_1, q_2, \ldots, q_n, t$; et alors la quantité

$$\mathrm{H}dt + p_1 dq_1 + p_2 dq_2, \ldots + p_n dq_n,$$

ne peut manquer d'être une différentielle exacte $d\mathrm{V}$. La quantité V une fois connue par quadrature, on a pour les n intégrales qui restaient à trouver :

$$\beta = -\frac{d\mathrm{V}}{d\alpha}, \quad \beta_1 = -\frac{d\mathrm{V}}{d\alpha_1}, \ldots, \quad \beta_{n-1} = -\frac{d\mathrm{V}}{d\alpha_{n-1}}. \tag{38}$$

Les intégrales (36) et (38) constituent ce qu'on appelle un *système canonique;* c'est-à-dire qu'elles vérifient, outre les conditions (37), les suivantes

$$(\alpha_m, \beta_m) = 1, \quad (\alpha_m, \beta_{m'}) = 0, \quad (\beta_m, \beta_{m'}) = 0. \tag{39}$$

La solution étant ainsi préparée, si l'on suppose une *perturbation* dans le phénomène, perturbation dont l'effet soit d'ajouter à la fonction H une certaine fonction Ω, les quantités α_i, β_i, ne seront plus des constantes. On trouvera leurs variations en exprimant Ω en $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n, t$, et intégrant le système :

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{d\Omega}{d\beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = \frac{d\Omega}{d\alpha_i}.$$

12. Observons enfin que, dans le cas de mouvements relatifs terrestres, les quantités u', v', w'; α, β, γ, sont des constantes; si donc la question qu'on cherche à résoudre est une de celles auxquelles s'applique le principe des forces vives, le mouvement étant supposé absolu, le même principe ne cesse pas d'être applicable au cas du mouvement relatif. En d'autres termes, la quantité H ne contenant pas le temps explicitement, on aura évidemment toujours une première intégrale des équations (V), en égalant cette quantité à une constante arbitraire α, c'est-à-dire en posant

$$\alpha = \mathrm{H}. \tag{40}$$

CHAPITRE III.

APPLICATIONS.

§ Ier. — *Mouvement des projectiles dans le vide.*

13. Comme il s'agit, dans cette question, de déterminer le mouvement d'un point libre, je ferai usage des équations (III) du chapitre I[er].

Ayant fait choix d'une origine quelconque, je prends le plan méridien pour plan des xz, je dirige l'axe des z suivant la parallèle à la partie nord de l'axe du globe, et je place Oy sur la tangente au parallèle, dans le sens de la rotation diurne.

Ce système de coordonnées donne pour les composantes de la rotation des axes :

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = n;$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= x' - ny, \\ \eta &= y' + nx, \\ \zeta &= z'; \end{aligned}\right. \tag{1}$$

et

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - n(x\eta - y\xi) + \mathrm{G}. \tag{2}$$

Enfin, si je désigne par ω l'angle de la verticale avec l'axe Oz, angle qui est le complément de la latitude du lieu, et si je suppose que la masse du mobile soit égale à l'unité, j'ai pour les composantes de la pesanteur à l'origine (c'est-à-dire de la force qui sollicite un point matériel en équilibre relatif, placé au point précis qui a été pris pour origine des coordonnées) :

$$\left\{\begin{aligned} \left(\frac{d\mathrm{U}}{dx}\right)_0 - u' &= -g \sin\omega, \\ \left(\frac{d\mathrm{U}}{dy}\right)_0 - v' &= 0, \\ \left(\frac{d\mathrm{U}}{dz}\right)_0 - w' &= -g \cos\omega. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

J'admettrai que ces équations donnent aussi les composantes de la pesanteur en un point quelconque (x, y, z), c'est-à-dire que, dans toute l'étendue de l'espace parcouru par le projectile, la pesanteur reste constante en intensité et en direction.

Alors, si l'on n'a pas oublié que $-u'$, $-v'$, $-w'$, sont respectivement égaux à $\frac{dK}{dx}$, $\frac{dK}{dy}$, $\frac{dK}{dz}$, on pourra écrire les équations (3) ainsi :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d(U+K)}{dx} = -g\sin\omega,\\ &\frac{d(U+K)}{dy} = 0,\\ &\frac{d(U+K)}{dz} = -g\cos\omega;\end{aligned}\right.$$

d'où

$$(5)\qquad U + K = -g(x\sin\omega + z\cos\omega).$$

On a d'ailleurs

$$U_1 = U + K + G,\quad H = U_1 - T;$$

donc

$$(6)\qquad H = -g(x\sin\omega + z\cos\omega) - \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + n(x\eta - y\xi);$$

et les équations différentielles du mouvement sont :

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = \xi + ny, &&\frac{d\xi}{dt} = -g\sin\omega + n\eta,\\ &\frac{dy}{dt} = \eta - nx, &&\frac{d\eta}{dt} = -n\xi,\\ &\frac{dz}{dt} = \zeta, &&\frac{d\zeta}{dt} = -g\cos\omega.\end{aligned}\right.$$

On connaît déjà une intégrale de ces équations; c'est celle des forces vives :

$$(8)\qquad \alpha = H.$$

Pour en trouver deux autres, nous remarquerons que les trois dernières équations différentielles contiennent seulement les variables ξ,

η, ζ; de sorte qu'on peut considérer séparément le système

$$(9) \qquad \frac{d\xi}{g\sin\omega - n\eta} = \frac{d\eta}{n\xi} = \frac{d\zeta}{g\cos\omega},$$

dont les intégrales sont :

$$(10) \qquad \alpha_1 = \sqrt{\xi^2 + \left(\eta - \frac{g\sin\omega}{n}\right)^2},$$

$$(11) \qquad \alpha_2 = \frac{n\zeta}{g\cos\omega} - \text{arc tang}\,\frac{\eta - \frac{g\sin\omega}{n}}{\xi}.$$

14. Pour achever la solution du problème, il faudrait maintenant résoudre les équations (8), (10) et (11), par rapport à ξ, η, ζ, et former la quantité

$$V = \int(\xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz + H\,dt).$$

Comme, ainsi qu'il est facile de le vérifier, les trois intégrales (α), (α_1), (α_2) satisfont aux conditions de M. Liouville, l'expression qui figure dans l'équation précédente sous le signe $\int$ est une différentielle exacte, et l'intégration de cette différentielle exacte ferait connaître la fonction V.

Comme il n'est pas *algébriquement* possible de tirer ξ, η, ζ des équations (8), (10) et (11), on pourrait résoudre ces mêmes équations par rapport à ξ, η, z, et remplacer V par la quantité

$$\int(\xi\,dx + \eta\,dy - z\,d\zeta + H\,dt),$$

qui jouit de propriétés analogues; mais l'intégration s'achève élégamment comme il suit.

Les équations (10) et (11) peuvent s'écrire, en introduisant un angle auxiliaire θ :

$$(12) \qquad \begin{cases} \xi = \alpha_1\cos\theta, \\ \eta = \frac{g\sin\omega}{n} + \alpha_1\sin\theta, \\ \zeta = \frac{g\cos\omega}{n}(\alpha_2 + \theta). \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de V, on trouve:

$$(13)\qquad V = \int\left[\alpha_1\cos\theta dx + \left(\frac{g\sin\omega}{n} + \alpha_1\sin\theta\right)dy + \frac{g\cos\omega}{n}(\alpha_2+\theta)dz + \alpha dt\right],$$

d'où, en intégrant par parties,

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} V = \alpha_1(x\cos\theta + y\sin\theta) + \frac{gy\sin\omega}{n} + \frac{gz\cos\omega}{n}(\alpha_2+\theta) + \alpha t \\ -\int\left[\alpha_1(y\cos\theta - x\sin\theta) + \frac{gz\cos\omega}{n}\right]d\theta. \end{aligned}\right.$$

Mais on tire de l'équation $\alpha = \mathrm{H}$, en y mettant les valeurs (12) de ξ, η, ζ:

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha_1(y\cos\theta - x\sin\theta) + \frac{gz\cos\omega}{n} \\ &= -\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{2}\frac{\alpha_1^2}{n} - \frac{1}{2}\frac{g^2\sin^2\omega}{n^3} - \frac{\alpha_1 g\sin\omega\sin\theta}{n^2} - \frac{1}{2}\frac{g^2\cos^2\omega}{n^3}(\alpha_2+\theta)^2; \end{aligned}\right.$$

multipliant les deux membres par $d\theta$ et intégrant, il vient

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\left[\alpha_1(y\cos\theta - x\sin\theta) + \frac{gz\cos\omega}{n}\right]d\theta \\ &= -\left(\alpha + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\frac{g^2\sin^2\omega}{n^2}\right)\frac{\theta}{n} + \frac{\alpha_1 g\sin\omega\cos\theta}{n^2} - \frac{1}{2}\frac{g^2\cos^2\omega}{n^3}\frac{(\alpha_2+\theta)^3}{3}. \end{aligned}\right.$$

La quadrature qui se trouve dans le premier membre de cette équation est précisément celle qui figure dans l'expression (14) de V; et en la remplaçant par sa valeur, on a

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} V = \alpha\left(t+\frac{\theta}{n}\right) + \alpha_1\left[\left(x - \frac{g\sin\omega}{n^2}\right)\cos\theta + y\sin\theta\right] + \frac{1}{2}\alpha_1^2\frac{\theta}{u} \\ + \frac{gz\cos\omega}{n}(\alpha_2+\theta) + \frac{1}{2}\frac{g^2\cos^2\omega}{n^3}\frac{(\alpha_2+\theta)^3}{3} + \frac{gy\sin\omega}{n} + \frac{1}{2}\frac{g^2\sin^2\omega}{n^3}\theta. \end{aligned}\right.$$

15. Il suffit maintenant de différentier cette fonction V par rapport aux constantes α, α_1, α_2, pour obtenir les trois dernières intégrales

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &\beta = -t - \frac{\theta}{n},\\ &\beta_1 = -\alpha_1\frac{\theta}{n} - \left[\left(x - \frac{g\sin\omega}{n^2}\right)\cos\theta + y\sin\theta\right],\\ &\beta_2 = -\frac{gz\cos\omega}{n} - \frac{1}{2}\frac{g^2\cos^2\omega}{n^3}(\alpha_2+\theta)^2. \end{aligned}\right.$$

Sous cette forme, les intégrales sont disposées de telle sorte que chacune des nouvelles est la *conjuguée* de celle des premières qui porte le même indice, c'est-à-dire que l'on a

$$(\alpha_i, \beta_i) = 1;$$

en d'autres termes, les intégrales α, α_1, α_2; β, β_1, β_2, forment un système *canonique;* et c'est sous cette forme qu'il faudrait les conserver si l'on voulait faire varier les constantes arbitraires, pour étudier par exemple les influences perturbatrices de la résistance de l'air ou de la variation de la pesanteur sur le mouvement.

Je puis aussi écrire les dernières intégrales, en désignant par γ, γ_1, γ_2, trois nouvelles constantes arbitraires :

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\theta = \gamma - nt,\\ &\left(x - \frac{g\sin\omega}{n^2}\right)\cos\theta + y\sin\theta = \frac{\alpha_1}{n}(\gamma_1 - \theta),\\ &(\alpha_2+\theta)^2 = \frac{2n^2}{g\cos\omega}(\gamma_2 - z); \end{aligned}\right.$$

enfin je mets l'équation (15) des forces vives sous la forme

$$(20)\quad y\cos\theta - \left(x - \frac{g\sin\omega}{n^2}\right)\sin\theta = C,$$

en ayant égard aux équations (19), et posant

$$-\alpha_1 C = \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{2}\frac{\alpha_1^2}{n} + \frac{1}{2}\frac{g^2\sin^2\omega}{n^3} + \gamma_2\frac{g\cos\omega}{n}.$$

16. La première des équations (19) indique que l'angle auxiliaire θ

décroît avec le temps d'une quantité proportionnelle à la rotation de la terre; les autres, jointes à l'équation (20), sont les équations de la trajectoire.

Prenons sur l'axe des x et dans le sens positif une longueur $OA = \frac{g\sin\omega}{n^2}$; par le point A ainsi déterminé menons un axe Ax_1 qui fasse avec Ox un angle θ compté, en ayant égard à son signe, dans le sens de la rotation de la terre; traçons un deuxième axe Ay_1 perpendiculaire à Ax_1, en continuant à tourner dans le sens de la rotation de la terre; prenons enfin le troisième axe Az_1 parallèle à Oz et rapportons la trajectoire aux trois axes mobiles Ax_1, Ay_1, Az_1.

Les formules de transformation sont

$$(21)\qquad \begin{cases} x_1 = y\sin\theta + \left(x - \frac{g\sin\omega}{n^2}\right)\cos\theta, \\ y_1 = y\cos\theta - \left(x - \frac{g\sin\omega}{n^2}\right)\sin\theta, \\ z_1 = z. \end{cases}$$

Les équations de la trajectoire deviennent dans ce système d'axes :

$$(22)\qquad \begin{cases} x_1 = \frac{\alpha_1}{n}(\gamma_1 - \theta), \\ y_1 = C, \\ z_1 = \gamma_2 + \frac{1}{2}\frac{g\cos\omega}{n^2}(\alpha_2 + \theta)^2; \end{cases}$$

ou, en éliminant l'angle auxiliaire θ,

$$(23)\qquad \begin{cases} y_1 = C, \\ z_1 = \gamma_2 + \frac{1}{2}\frac{g\cos\omega}{n^2}\left(\alpha_2 + \gamma_1 - n\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^2, \end{cases}$$

équations d'une parabole dont le plan tourne uniformément, ainsi que le plan x_1Az_1, avec une vitesse égale et contraire à celle de la terre, en restant à une distance invariable de ce plan x_1Az_1.

§ II. — *Mouvement d'un corps solide de révolution complètement libre de tourner autour de son centre de gravité maintenu fixe sur la terre.*

17. Je rapporte le mouvement aux axes que j'ai déjà employés dans le problème précédent, de sorte que les valeurs des quantités α, β, γ; ξ, η, ζ, restent les mêmes. Quant à la fonction T_2 dont j'ai donné l'expression générale au n° **9**, elle devient, en ayant égard aux valeurs de α, β, γ,

$$T_2 = T + n\sum m(xy' - yx') + G. \tag{1}$$

Cela posé, on sait que les liaisons du système permettent d'exprimer les coordonnées de chaque point mobile au moyen de quantités constantes, et de trois angles variables θ, φ, ψ, dont voici la définition.

Si je désigne par Ox_1, Oy_1, Oz_1 les trois axes principaux d'inertie qui se croisent au centre de gravité du solide considéré :

θ est l'angle de Oz_1, avec Oz;

$\psi - 90^\circ$ est l'angle que la projection de Oz_1 sur le plan xOy fait avec Ox;

φ est l'angle que Ox_1 fait avec la partie de l'intersection des plans x_1Oy_1 et xOy, déterminée par l'angle ψ.

Le solide dont nous étudions le mouvement est supposé de révolution autour de Oz_1; ou, plus généralement, les moments d'inertie autour des axes Ox_1 et Oy_1 ont une valeur commune A, C étant le moment qui se rapporte au troisième axe Oz_1.

Les quantités qui entrent dans le deuxième membre de l'équation (1) ont alors les expressions suivantes, dont le calcul ne présente aucune difficulté, et qui sont d'ailleurs bien connues :

$$\left\{\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\left[A(\theta'^2 + \sin^2\theta\,.\,\psi'^2) + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2\right]. \\ \sum m(xy' - yx') &= A\sin^2\theta.\psi' + C\cos\theta(\varphi' + \psi'\cos\theta), \\ G &= \frac{1}{2}n^2(A\sin^2\theta + C\cos^2\theta); \end{aligned}\right. \tag{2}$$

d'où

$$(3)\qquad \begin{cases} T_2 = \frac{1}{2}\left[A(\theta'^2 + \sin^2\theta\,.\,\psi'^2) + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2\right] \\ \quad + n\left[A\sin^2\theta.\psi' + C\cos\theta\,(\varphi' + \psi'\cos\theta)\right] + G. \end{cases}$$

On déduit de cette équation les valeurs des variables conjuguées de θ, ψ, φ, qu'il faut introduire à la place de θ', ψ', φ', pour l'application de la méthode ; ce sont :

$$(4)\qquad \begin{cases} \Theta = \dfrac{dT_2}{d\theta'} = A\theta', \\ \Psi = \dfrac{dT_2}{d\psi'} = A\sin^2\theta.\psi' + C\cos\theta\,(\varphi' + \psi'\cos\theta) + An\sin^2\theta + Cn\cos^2\theta, \\ \Phi = \dfrac{dT_2}{d\varphi'} = C\,(\varphi' + \psi'\cos\theta) + Cn\cos\theta. \end{cases}$$

Je tire de ces équations

$$\theta' = \frac{\Theta}{A},$$

$$\psi' = \frac{\Psi - \Phi\cos\theta}{A\sin^2\theta} - n,$$

$$\varphi' + \psi'\cos\theta = \frac{\Phi}{C} - n\cos\theta;$$

je substitue ces valeurs dans l'expression de T, et il vient

$$(5)\qquad T = \frac{1}{2}\left[\frac{\Theta^2}{A} + \frac{(\Psi - \Phi\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta} + \frac{\Phi^2}{C}\right] - n\Psi + G.$$

D'ailleurs, comme le centre de gravité est maintenu fixe, la pesanteur est détruite ; or nous avons trouvé pour les composantes de cette force supposée constante :

$$\frac{dU}{dx_i} - m_i u' = \frac{d(U+K)}{dx_i},$$

$$\frac{dU}{dy_i} - m_i v' = \frac{d(U+K)}{dy_i},$$

$$\frac{dU}{dz_i} - m_i w' = \frac{d(U+K)}{dz_i}:$$

donc l'équation qui exprime que la pesanteur est détruite est

$$U + K = 0.$$

Dans cette hypothèse, on a simplement :

$$U_1 = G,$$

d'où

$$(6) \qquad H = G - T = -\frac{1}{2}\left[\frac{\Theta^2}{A} + \frac{(\Psi - \Phi\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta} + \frac{\Phi^2}{C}\right] + n\Psi.$$

18. Sans qu'il soit besoin d'écrire les équations différentielles du problème, il suffit de se rappeler leur forme, et de remarquer que H ne contient ni ψ, ni φ, pour voir que deux de ces équations

$$\frac{d\Psi}{dt} = 0, \qquad \frac{d\Phi}{dt} = 0,$$

sont immédiatement intégrables.

En réunissant aux intégrales ainsi obtenues sans grand effort de calcul l'intégrale connue des forces vives, et remarquant que les conditions d'intégrabilité sont satisfaites, on a de suite tout ce qu'il faut pour former la fonction V et par conséquent pour achever l'intégration. Nos trois intégrales sont :

$$(7) \qquad \begin{cases} \alpha = H, \\ \alpha_1 = \Psi, \\ \alpha_2 = \Phi. \end{cases}$$

La résolution de ces équations par rapport à Ψ, Φ et Θ ne présente non plus aucune difficulté. En effet, on a d'abord

$$\Psi = \alpha_1, \qquad \Phi = \alpha_2;$$

et une fois ces valeurs connues, en ayant égard à l'expression (6) de H, on tire de l'équation $H = \alpha$:

$$\Theta = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{-(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + 2\alpha_1\alpha_2\cos\theta + \left[2A(n\alpha_1 - \alpha) - \left(\frac{A}{C} - 1\right)\alpha_2^2\right]\sin^2\theta},$$

relation que j'écrirai ainsi :

$$(8)\quad \Theta = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{-(\Phi^2+\Psi^2)+2\Phi\Psi\cos\theta+[2A(n\Psi-H)-(\mu-1)\Phi^2]\sin^2\theta},$$

en faisant $\mu = \frac{A}{C}$, et remplaçant les constantes α, α_1, α_2, par les quantités H, Ψ, Φ, qui leur sont égales, et dont la signification est mieux indiquée.

De là l'expression suivante pour la fonction V :

$$(9)\quad \begin{cases} V = Ht + \Psi\psi + \Phi\varphi, \\ + \displaystyle\int \frac{d\theta}{\sin\theta}\sqrt{-(\Phi^2+\Psi^2)+2\Phi\Psi\cos\theta+[2A(n\Psi-H)-(\mu-1)\Phi^2]\sin^2\theta}. \end{cases}$$

La quadrature qui se trouve dans cette expression étant effectuée, il suffira de différentier la fonction V par rapport aux constantes α, α_1, α_2, ou aux quantités H, Ψ, Φ, qui tiennent la place de ces constantes, pour avoir les trois dernières intégrales :

$$(10)\qquad \begin{cases} \beta = -\dfrac{dV}{dH}, \\ \beta_1 = -\dfrac{dV}{d\Psi}, \\ \beta_2 = -\dfrac{dV}{d\Phi}. \end{cases}$$

On peut aussi déterminer chacune de ces intégrales séparément, en appliquant à l'équation (9) les règles de la différentiation sous le signe somme : c'est ce dernier mode de calcul que je choisis, et je commence par former l'intégrale qui contient le temps.

19. On trouve pour cette intégrale

$$(\beta + t) = A\int \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{-(\Phi^2+\Psi^2)+2\Phi\Psi\cos\theta+[2A(n\Psi-H)-(\mu-1)\Phi^2]\sin^2\theta}};$$

ou, en posant $\cos\theta = x$,

$$(11)\quad \beta+t = -A\int \frac{dx}{\sqrt{2A(n\Psi-H)-\Psi^2-\mu\Phi^2+2\Phi\Psi x-[2A(n\Psi-H)-(\mu-1)\Phi^2]x^2}}.$$

Pour intégrer cette expression, je remarque que la quantité

$$2A(n\Psi - H) - (\mu - 1)\Phi^2$$

est toujours positive : elle est même toujours plus grande que Φ^2 et que Ψ^2. Pour s'assurer de ce fait, il suffit de substituer à H sa valeur (6); on trouve en effet :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} 2A(n\Psi - H) - (\mu - 1)\Phi^2 &= \Phi^2 + \Theta^2 + \frac{(\Psi - \Phi\cos\theta)^2}{\sin^2\theta},\\ &= \Psi^2 + \Theta^2 + \frac{(\Phi - \Psi\cos\theta)^2}{\sin^2\theta},\end{aligned}\right.$$

équations qui démontrent ce que j'ai avancé.

Le coefficient de x^2 sous le radical étant ainsi toujours négatif, je puis représenter ce radical par

$$(13)\qquad M\sqrt{1 - \cos^2\omega} = M\sin\omega,$$

en désignant par ω un angle auxiliaire donné par une équation de la forme

$$(14)\qquad \cos\omega = ax - b = a\cos\theta - b.$$

J'introduis ainsi trois coefficients indéterminés M, a et b, qui nous permettront d'identifier notre radical avec l'expression (13); en effet, on doit avoir

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} 2A(n\Psi - H) - \Psi^2 - \mu\Phi^2 + 2\Phi\Psi x - [2A(n\Psi - H) - (\mu - 1)\Phi^2]x^2\\ = M^2[1 - (ax - b)^2],\end{aligned}\right.$$

pour toutes les valeurs de x. Or ceci entraîne les trois équations :

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} M^2a^2 &= 2A(n\Psi - H) - (\mu - 1)\Phi^2,\\ M^2ab &= \Phi\Psi,\\ M^2(1 - b^2) &= 2A(n\Psi - H) - \Psi^2 - \mu\Phi^2,\end{aligned}\right.$$

qui font connaître nos trois indéterminées M, α et b.

On peut alors substituer dans l'intégrale (11), à la place de x, la variable ω définie par l'équation (14); et l'expression du temps devient, par un calcul très-simple,

$$\beta + t = \frac{A}{Ma}\omega, \tag{17}$$

ce qui donne pour la valeur de l'angle auxiliaire ω

$$\omega = K(t+\beta), \tag{18}$$

en posant

$$\frac{Ma}{A} = K.$$

L'équation qui donne θ en fonction du temps s'obtient en éliminant ω entre les équations (14) et (18); on a :

$$a\cos\theta - b = \cos K(t+\beta),$$

ou, en remplaçant a et b par leurs valeurs tirées des équations (16),

$$A^2K^2\cos\theta = \Phi\Psi + \sqrt{A^2K^2 - \Phi^2}\sqrt{A^2K^2 - \Psi^2}\cos K(t+\beta). \tag{19}$$

20. Passons au calcul des deux dernières intégrales, et cherchons les valeurs de $\frac{dV}{d\Psi}$ et $\frac{dV}{d\Phi}$.

On a

$$\left\{\begin{aligned} \beta_1 = -\frac{dV}{d\Psi} = -\psi + \int\frac{(\Psi - \Phi\cos\theta)\,d\theta}{\sin\theta\sqrt{-(\Phi^2+\Psi^2)+2\Phi\Psi\cos\theta + A^2K^2\sin^2\theta}} \\ - An\int\frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{-(\Phi^2+\Psi^2)+2\Phi\Psi\cos\theta+A^2K^2\sin^2\theta}}, \end{aligned}\right. \tag{20}$$

$$\left\{\begin{aligned} \beta_2 = -\frac{dV}{d\Phi} = -\varphi + \int\frac{(\Phi - \Psi\cos)\,d\theta}{\sin\theta\sqrt{-(\Phi^2+\Psi^2)+2\Phi\Psi\cos\theta + A^2K^2\sin^2\theta}} \\ +(\mu-1)\Phi\int\frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{-(\Phi^2+\Psi^2)+2\Phi\Psi\cos\theta+A^2K^2\sin^2\theta}}. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Dans l'expression de β_1 entrent deux quadratures; je représente la première par ψ_1, je vais la calculer tout à l'heure; la deuxième est, à un facteur constant près, celle qui est égale à $\beta + t$, de sorte que l'on a

$$(22) \qquad \beta_1 + \psi = \psi_1 - n(\beta + t);$$

on trouverait de même

$$(23) \qquad \beta_2 + \varphi = \varphi_1 + (\mu - 1)\frac{\Phi}{A}(\beta + t) = \varphi_1 + K'(\beta + t),$$

en désignant par φ_1 la première quadrature qui figure dans la valeur de β_2, et posant

$$K' = (\mu - 1)\frac{\Phi}{A}.$$

Il ne reste plus qu'à trouver les valeurs de ψ_1 et φ_1; or ces valeurs sont données par les équations

$$(24) \qquad \cos\psi_1 = \frac{\Phi - \Psi\cos\theta}{\sin\theta\sqrt{A^2K^2 - \Psi^2}},$$

$$(25) \qquad \cos\varphi_1 = \frac{\Psi - \Phi\cos\theta}{\sin\theta\sqrt{A^2K^2 - \Phi^2}},$$

comme il est facile de le vérifier.

21. Les équations (19), (24) et (25) s'interprètent géométriquement d'une manière remarquable. Posons en effet, en introduisant deux angles constants γ_1 et γ_2 :

$$(26) \qquad \begin{cases} \Psi = AK\cos\gamma_1, \\ \Phi = AK\cos\gamma_2, \end{cases}$$

ce qui est permis, puisque j'ai prouvé que M^2a^2 ou A^2K^2 est toujours plus grand que Φ^2 et que Ψ^2; on peut alors écrire les équations dont il s'agit sous la forme :

$$(27) \qquad \begin{cases} \cos\theta = \cos\gamma_1\cos\gamma_2 + \sin\gamma_1\sin\gamma_2\cos K(t + \beta), \\ \cos\gamma_1 = \cos\gamma_2\cos\theta + \sin\gamma_2\sin\theta\cos\varphi_1, \\ \cos\gamma_2 = \cos\gamma_1\cos\theta + \sin\gamma_1\sin\theta\cos\psi_1; \end{cases}$$

c'est-à-dire que $K(t + \beta)$, φ_1 et ψ_1 sont les trois angles d'un triangle sphérique dont les côtés respectivement opposés sont, θ, γ_1, γ_2.

22. Concevons que du point O comme centre on décrive une sphère de rayon quelconque; soient x, y, z, x_1, y_1, z_1, les points où cette sphère est percée par les trois axes coordonnés et les axes principaux d'inertie du corps; supposons enfin, pour un instant, qu'on néglige le terme $-n(\beta+t)$ dans la valeur (22) de ψ.

Je mène un arc de grand cercle zA, qui fasse avec zx un angle égal à $-(90^\circ+\beta_1)$; je prends $z\mathrm{A}=\gamma_1$, et je dis que le triangle zz_1A est précisément celui dont j'ai parlé au n° **21**. En effet, le côté zA est égal à γ_1, le côté zz_1 est égal à θ, et quant à l'angle compris entre ces deux côtés, on a :

$$z_1z\mathrm{A}=\psi-90^\circ-(-90^\circ-\beta_1)=\beta_1+\psi=\psi_1,$$

puisque je supprime provisoirement le terme $-n(\beta+t)$.

Il suit de là que les autres éléments du triangle ont les valeurs que j'ai indiquées ci-dessus; ainsi l'angle dont le sommet est en A se trouve égal à $\mathrm{K}(t+\beta)$, et le côté Az_1 est égal à γ_2. Donc

Si l'on conçoit un arc de grand cercle égal à γ_2 qui tourne uniformément autour de son extrémité fixe A, *avec une vitesse angulaire égale à* K, *l'extrémité mobile de cet arc de grand cercle sera à chaque instant le lieu du point z_1. En d'autres termes, l'axe de figure du corps décrit un cône de révolution qui a pour axe* OA, *et pour demi-angle au sommet γ_2.*

Pour se faire une idée complète du mouvement du corps, il faut supposer que, pendant que son axe de figure décrit le cône que j'ai défini, les axes Ox_1 et Oy_1 tournent eux-mêmes autour de cet axe de figure avec une vitesse constante égale à K'. Les éléments constants du mouvement K, K', γ_1, γ_2, etc., sont des fonctions des constantes arbitraires qu'introduit l'intégration; ils se déterminent au moyen des circonstances du mouvement initial, qui doivent être connues.

On déduirait facilement de tout ceci que, si l'on fait toujours abstraction du terme $-n(\beta+t)$, le mouvement peut être considéré comme produit par le roulement d'un cône de révolution lié au corps, sur un autre cône de révolution qui serait fixe par rapport à la terre, et dont l'axe serait OA; mais je ne m'arrête pas à développer ces résultats bien connus.

23. On a reconnu dans les lois qui précèdent celles qui régissent le mouvement de rotation des corps de révolution, rapportés à des axes coordonnés immobiles. Ainsi, tant qu'on ne tient pas compte du terme que nous avons supprimé dans l'expression de ψ, les lois du mouvement relatif ont absolument la même forme que celles du mouvement absolu.

Si l'on analyse maintenant l'influence de la rotation de la terre, on trouve que cette influence est double.

1° Elle modifie d'abord les intégrales premières (7), mais sans rien changer aux lois du mouvement, comme le prouve la discussion précédente. Seulement les éléments de ce mouvement ne sont plus les mêmes; en effet, les constantes arbitraires H, Φ et Ψ ont pour valeurs

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} H &= \tfrac{1}{2}n^2(A\sin^2\theta_0 + C\cos^2\theta_0) \\ &\qquad -\tfrac{1}{2}[A(\theta_0'^2+\sin^2\theta_0\,\psi_0'^2)+C(\varphi_0'+\psi_0'\cos\theta_0)^2], \\ \Psi &= A\sin^2\theta_0\,\psi_0' + C\cos\theta_0(\varphi_0'+\psi_0'\cos\theta_0) + n(A\sin^2\theta_0 + C\cos^2\theta_0), \\ \Phi &= C(\varphi_0' + \psi_0'\cos\theta_0) + Cn\cos\theta_0, \end{aligned}\right.$$

comme on le trouve en faisant $t = 0$ dans les équations (4) et (6). Si n était nul, on aurait simplement :

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} H &= -\tfrac{1}{2}[A(\theta_0'^2+\sin^2\theta_0\,\psi_0'^2)+C(\varphi_0'+\psi_0'\cos\theta_0)^2], \\ \Psi &= A\sin^2\theta_0\,\psi_0' + C\cos\theta_0(\varphi_0'+\psi_0'\cos\theta_0), \\ \Phi &= C(\varphi_0' + \psi_0'\cos\theta_0). \end{aligned}\right.$$

2° Cette même influence se manifeste encore en introduisant le terme $-n(\beta+t)$ dans l'équation (22), ce qui modifie les lois précédentes. Pour passer d'ailleurs du cas fictif que j'ai considéré d'abord au cas du mouvement tel qu'il a réellement lieu, il suffit de supposer que le point A, au lieu d'être fixe, tourne lui-même autour de Oz, avec une vitesse constante égale à $-n$. La combinaison des trois mouvements de rotation que j'ai définis et qui ont lieu autour de Oz, OA, Oz_1, avec des vitesses respectivement égales à $-n$, K, K', résout le problème que je m'étais proposé.

24. *Note de l'Auteur* (1862). — La solution que je viens d'exposer est pour ainsi dire exclusivement géométrique; elle revient en définitive à rapporter un mouvement bien connu à un système particulier d'axes coordonnés, et elle est parfaitement rigoureuse, si l'on néglige les variations de la pesanteur.

Plusieurs auteurs, et entre autres mon ami M. Resal [*], ont traité la même question par la méthode de Coriolis, en cherchant le couple résultant des forces apparentes et appliquant ensuite la théorie ordinaire de la rotation des corps solides.

Sans développer les calculs auxquels conduit cette méthode, je donnerai ici les composantes du couple terrestre, suivant trois axes qui sont respectivement : l'axe de figure du corps, l'intersection de l'équateur de ce corps avec notre plan des xy, et enfin un troisième axe perpendiculaire aux deux premiers [**].

Je conserve les mêmes notations que précédemment; de plus, je désigne par n_1 *la projection de la rotation instantanée du corps sur son axe de figure;* c'est-à-dire que je fais, pour simplifier,

$$n_1 = \varphi' + \psi' \cos\theta.$$

Cela posé, les trois couples composants sont respectivement :

1° Sur l'axe de figure,

$$\mathrm{N} = \mathrm{C}n \sin\theta \frac{d\theta}{dt};$$

2° Sur la ligne des nœuds,

$$\mathrm{N}_1 = -\mathrm{C}nn_1 \sin\theta + (\mathrm{A}-\mathrm{C})\, n^2 \sin\theta\cos\theta + \mathrm{A}n\sin\theta\cos\theta \frac{d\psi}{dt};$$

3° Enfin sur le troisième axe,

$$\mathrm{N}_2 = -\mathrm{A}n\cos\theta \frac{d\theta}{dt}.$$

---

[*] *Annales des Mines*, 5e série, passim, et *Traité de Cinématique pure*, 1 volume; Mallet-Bachelier; 1862.

[**] Ces axes, dont l'idée fort ingénieuse est due à M. Resal, sont mobiles à la fois dans le corps et dans l'espace. L'emploi de ce système de coordonnées simplifie beaucoup l'exposition élémentaire de la théorie de la rotation des corps, qui ont deux de leurs moments d'inertie principaux égaux.

Si l'axe du corps est maintenu fixe sur la terre, on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = 0;$$

les couples N et N_2 sont nuls, et le couple N_1 devient

$$N'_1 = -Cnn_1 \sin\theta + (A - C)n^2 \sin\theta \cos\theta,$$

soit sensiblement

$$N'_1 = -Cnn_1 \sin\theta,$$

en négligeant le terme multiplié par n^2.

Dans ce cas, l'influence de la rotation de la terre se traduit par une sorte de pesanteur qui tend à entraîner l'axe de figure (lequel est aussi axe de rotation effectif) dans la direction de l'axe terrestre; c'est probablement là ce que l'on a appelé la *tendance des axes de rotation au parallélisme*.

Mais une chose qu'il importe bien de remarquer, chose caractéristique de ces forces apparentes qui dépendent des vitesses, c'est que, dès que l'axe du corps se déplace, cet axe se trouve immédiatement soumis à trois nouveaux couples; tout comme un corps qui tombe obéit à la force centrifuge composée, tandis qu'un corps en équilibre n'est soumis à aucune action de ce genre.

Réduire le couple terrestre au seul couple N'_1, c'est en quelque façon négliger la force centrifuge composée dans l'étude des mouvements pendulaires ou autres; et mes formules montrent bien que l'erreur commise n'est pas du second ordre, mais bien du premier ordre par rapport à la quantité très-petite n. Cette erreur pourra très-bien d'ailleurs être sans aucune importance dans certains cas particuliers, mais elle pourra aussi en avoir une très-grande dans d'autres; il sera donc prudent de prendre ses précautions.

J'ai traité la question qui fait l'objet de ce paragraphe avec d'assez grands développements, d'abord à cause de l'importance du problème, et ensuite afin de faire voir combien ma méthode conduit facilement à une solution analytique élégante.

Je vais montrer mieux encore combien cette nouvelle méthode est naturelle, et comment il semble qu'elle constitue la véritable manière de réduire les mouvements relatifs aux mouvements absolus. Dans certaines questions, en effet (et par exemple dans celle que je viens d'étudier), mon analyse, ou plutôt celle de Lagrange, fait connaître immédiatement, et sans différentiation ni quadrature, toutes les intégrales du mouvement relatif, quand on connaît celles du mouvement absolu.

C'est ce qui résultera de la résolution du problème que je traite dans le paragraphe suivant, problème dont celui qui vient de m'occuper n'est d'ailleurs qu'un cas particulier.

§ III. — *Mouvement d'un corps solide quelconque autour de son centre de gravité.*

25. Je conserve les mêmes axes et les mêmes notations que dans le problème précédent, en supposant seulement que les trois moments d'inertie principaux aient maintenant des valeurs différentes A, B, C.

Désignons par p, q, r, les composantes de la rotation instantanée du corps suivant les trois axes Ox_1, Oy_1, Oz_1; c'est-à-dire posons :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} p &= \sin\varphi\sin\theta\,.\,\psi' + \cos\varphi\,.\,\theta',\\ q &= \cos\varphi\sin\theta\,.\,\psi' - \sin\varphi\,.\,\theta',\\ z &= \varphi' + \cos\theta\,.\,\psi'.\end{aligned}\right.$$

On a toujours

$$(2)\qquad T_2 = T + n\sum m(xy' - yx') + G,$$

les trois quantités qui constituent le deuxième membre de cette équation ayant les valeurs connues suivantes :

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2),\\ \sum m(xy' - yx') &= Ap\sin\varphi\sin\theta + Bq\cos\varphi\sin\theta + Cr\cos\theta,\\ G &= \tfrac{1}{2}n^2\left[(A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi)\sin^2\theta + C\cos^2\theta\right].\end{aligned}\right.$$

On conclut de là

$$(4)\ T_2 = \tfrac{1}{2}\left[Ap(p + 2n\sin\varphi\sin\theta) + Bq(q + 2n\cos\varphi\sin\theta) \right.$$
$$\left. + Cr(r + 2n\cos\theta)\right] + G,$$

d'où, en différentiant par rapport aux variables θ', φ', ψ' :

$$(5)\ \begin{cases} \Theta = Ap\cos\varphi - Bq\sin\varphi + n(A - B)\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta, \\ \Phi = C(r + n\cos\theta), \\ \Psi = \Phi\cos\theta + \sin\theta(Ap\sin\varphi + Bq\cos\varphi) + n(A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi)\sin^2\theta. \end{cases}$$

On tire de ces équations, résolues par rapport à p, q, r :

$$(6)\ \begin{cases} Cr = \Phi - Cn\cos\theta, \\ Ap\sin\theta = \Theta\cos\varphi\sin\theta + (\Psi - \Phi\cos\theta)\sin\varphi - An\sin\varphi\sin^2\theta, \\ Bq\sin\theta = (\Psi - \Phi\cos\theta)\cos\varphi - \Theta\sin\varphi\sin\theta - Bn\cos\varphi\sin^2\theta. \end{cases}$$

Il faut maintenant substituer ces valeurs dans l'expression (3) de T, opération qui donne naissance à trois groupes de termes :

1° Ceux qui ne contiennent pas n; ils ont la même *forme* [*] que si le mouvement que j'étudie était un mouvement absolu : je représente leur somme par T';

2° Ceux qui contiennent en facteur la première puissance de n : ces termes se réduisent à $-n\Psi$;

3° Enfin ceux qui sont multipliés par n^2; et il est facile de reconnaître que ceux-ci constituent précisément la quantité G.

---

[*] Mais non la même *valeur*, car les lettres Φ, Θ, Ψ ne représentent pas les mêmes quantités dans le mouvement relatif et dans le mouvement absolu. Pour faire $n = 0$ dans les équations différentielles que nous allons trouver, il faudrait, d'une part, supprimer tous les termes qui sont multipliés par n ou par une puissance de n, et, d'autre part, changer la signification des lettres qui renferment n pour ainsi dire à l'état latent.

L'utilité de l'artifice que j'ai introduit dans cette théorie résulte précisément de ce que la signification des variables qui figurent dans un système d'équations différentielles est absolument sans influence sur les calculs relatifs à l'intégration de ces équations.

J'ai donc en définitive

$$(7) \qquad T = T' - n\Psi + G;$$

d'ailleurs, comme la pesanteur est détruite, on a $U + K = 0$, et partant $H = G - T$, donc

$$(8) \qquad H = n\Psi - T'.$$

26. Négligeons d'abord le terme $n\Psi$, c'est-à-dire prenons simplement $H = -T'$; nous aurons à intégrer un système d'équations différentielles dont la forme ne différera pas de celle des équations du mouvement absolu de rotation d'un corps quelconque, rapporté à des axes immobiles. Les intégrales de notre système d'équations auront donc aussi la même forme que celles des équations du mouvement absolu, puisqu'il n'y a pas à se préoccuper, dans l'intégration, de la signification des variables Θ, Φ, Ψ, laquelle n'est pas la même dans les deux cas.

Soient

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} (\alpha), & (\beta), \\ (\alpha_1), & (\beta_1), \\ (\alpha_2), & (\beta_2), \end{array} \right.$$

ces intégrales mises sous la forme *canonique* (nº **25**). On sait que si, à la fonction H qui caractérise un problème quelconque dont on possède les intégrales (9), on ajoute une fonction perturbatrice Ω, les équations différentielles du mouvement troublé sont

$$(10) \qquad \frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{d\Omega}{d\beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = \frac{d\Omega}{d\alpha_i},$$

en supposant Ω exprimé en fonction des variables α_i et β_i, et du temps t.

Dans le problème actuel, comparé à celui qui résulte de la supposition $H = -T'$, on a

$$(11) \qquad \Omega = n\Psi;$$

mais comme les équations (6) sont indépendantes de l'angle ψ, il est évident qu'il en sera de même de T et de T'; et que par suite une des intégrales du mouvement absolu devra être

$$\alpha_1 = \Psi.$$

Donc l'expression (11) de Ω, transformée en fonction des quantités α_i et β_i et du temps, est simplement

$$\Omega = n\alpha_1; \tag{12}$$

et les équations différentielles (10) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= 0, & \frac{d\beta}{dt} &= 0, \\ \frac{d\alpha_1}{dt} &= 0, & \frac{d\beta_1}{dt} &= n, \\ \frac{d\alpha_2}{dt} &= 0, & \frac{d\beta_2}{dt} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Ces équations admettent pour intégrales

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \alpha', & \beta &= \beta', \\ \alpha_1 &= \alpha'_1, & \beta_1 &= nt + \beta'_1, \\ \alpha_2 &= \alpha'_2, & \beta_2 &= \beta'_2; \end{aligned}\right. \tag{14}$$

c'est-à-dire qu'il suffit, pour avoir les intégrales du mouvement relatif, de retrancher nt du deuxième membre de l'intégrale (β_1), et de conserver les autres intégrales telles qu'elles sont.

§ IV. — *Mouvement d'un corps solide de révolution dont l'axe est assujetti à rester sur la surface d'un cône, fixe par rapport à la terre.*

27. Je place encore l'origine au centre de gravité du corps, lequel est toujours supposé fixe; je prends l'axe du cône directeur pour axe des z, le plan de cet axe et de la parallèle à l'axe du monde pour plan des zx; je dirige enfin l'axe des x suivant la projection de la partie nord de l'axe de la terre, et l'axe des y à gauche de Ox.

Ce nouveau système de coordonnées donne

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= n\sin\omega,\\ \beta &= 0,\\ \gamma &= n\cos\omega;\end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad T_2 = T + n\cos\omega\sum m(xy' - yx') + n\sin\omega\sum m(yz' - zy') + G,$$

ω étant l'angle de l'axe du cône directeur avec celui de la rotation de la terre.

Je commence par calculer les différentes quantités qui entrent dans la valeur de T_2, en introduisant les trois angles, θ, ψ, φ, définis comme au n° **17**. Remarquons seulement qu'ici θ est constamment égal au demi-angle au sommet du cône directeur, c'est-à-dire que $\theta' = 0$.

Cela posé, on a

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}[A\sin^2\theta.\psi'^2 + C(\varphi' + \cos\theta.\psi')^2],\\ \sum m(xy' - yx') &= A\sin^2\theta.\psi' + C\cos\theta(\varphi' + \cos\theta.\psi'),\\ \sum m(yz' - zy') &= -A\sin\theta\cos\theta\sin\psi.\psi' + C\sin\theta\sin\psi(\varphi' + \cos\theta.\psi'),\\ G &= \tfrac{1}{2}n^2A + \tfrac{1}{2}n^2(C - A)(\cos\omega\cos\theta + \sin\omega\sin\theta\sin\psi)^2;\end{aligned}\right.$$

expressions d'où l'on conclut

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} T_2 = \tfrac{1}{2}&[A\sin^2\theta.\psi'^2 + C(\varphi' + \cos\theta.\psi')^2]\\ &+ An\sin\theta(\cos\omega\sin\theta - \sin\omega\cos\theta\sin\psi)\psi'\\ &+ Cn(\cos\omega\cos\theta + \sin\omega\sin\theta\sin\psi)(\varphi' + \cos\theta.\psi')\\ &+ G;\end{aligned}\right.$$

et enfin

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \Phi &= C(\varphi' + \cos\theta.\psi') + Cn(\cos\omega\cos\theta + \sin\omega\sin\theta\sin\psi),\\ \Psi &= \Phi\cos\theta + A\sin^2\theta.\psi' + An\sin\theta(\cos\omega\sin\theta - \sin\omega\cos\theta\sin\psi).\end{aligned}\right.$$

Il faut maintenant, conformément à la marche que j'ai déjà suivie bien des fois, tirer des équations (5) les valeurs de ψ' et de $\varphi' + \cos\theta.\psi'$, substituer ces valeurs dans l'expression (3) de T; et enfin, comme on a toujours $U + K = 0$, poser $H = G - T$. On obtient ainsi

$$(6)\quad \begin{cases} H = -\frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{C} - \frac{1}{2}\frac{(\Psi - \Phi\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta} + n\Phi(\cos\omega\cos\theta + \sin\omega\sin\theta\sin\psi) \\ \qquad + n\frac{\Psi - \Phi\cos\theta}{\sin\theta}(\cos\omega\sin\theta - \sin\omega\cos\theta\sin\psi) + \frac{1}{2}n^2 A\sin^2\omega\cos^2\psi. \end{cases}$$

28. Je connais encore immédiatement deux intégrales du problème, savoir

$$(7)\quad \begin{cases} \alpha = H, \\ \alpha_1 = \Phi; \end{cases}$$

la première est celle des forces vives, la deuxième résulte de ce que H ne contient pas l'angle φ.

Comme nous n'avons actuellement que deux variables indépendantes, φ et ψ, ces deux intégrales suffisent pour ramener l'intégration aux quadratures. De ces deux équations, la deuxième est toute résolue par rapport à Φ, et la première donne

$$(8)\quad \begin{cases} \Psi = \Phi\cos\theta \pm \sin\theta\sqrt{\Phi^2(1-\mu) - 2AH + A^2n^2 - [\Phi - An(\cos\omega\cos\theta + \sin\omega\sin\theta\sin\psi)]^2} \\ \qquad + An\sin\theta(\cos\omega\sin\theta - \sin\omega\cos\theta\sin\psi). \end{cases}$$

Dans cette équation, tout comme dans celles du problème du § II, j'ai posé $\frac{A}{C} = \mu$, et j'ai mis partout H et Φ à la place de α et de α_1.

Il n'y a plus qu'à former la quantité

$$(9)\qquad V = Ht + \Phi\varphi + \int \Psi d\psi,$$

ou, si l'on veut, à calculer directement, par des différentiations sous le signe somme, les deux dernières intégrales

$$(10)\quad \begin{cases} \beta = -\frac{dV}{dH}, \\ \beta_1 = -\frac{dV}{d\Phi}. \end{cases}$$

La première, qui donne l'angle ψ en fonction du temps, est

$$\beta+t=\pm \mathrm{A}\sin\theta\int\frac{d\psi}{\sqrt{\Phi^2(1-\mu)-2\mathrm{AH}+\mathrm{A}^2n^2-[\Phi-\mathrm{A}n(\cos\omega\cos\theta+\sin\omega\sin\theta\sin\psi)]^2}}.$$

ou, en remplaçant ψ par l'angle $\chi=\psi-90^\circ$ (nº **17**) que fait avec $\mathrm{O}x$ la projection de l'axe de figure sur le plan $x\mathrm{O}y$,

$$(11)\quad \beta+t=\pm \mathrm{A}\sin\theta\int\frac{d\chi}{\sqrt{\Phi^2(1-\mu)-2\mathrm{AH}+\mathrm{A}^2n^2-[\Phi-\mathrm{A}n(\cos\omega\cos\theta+\sin\omega\sin\theta\cos\chi)]^2}}.$$

29. Pour effectuer l'intégration, remarquons que la quantité

$$\Phi^2(1-\mu)-2\mathrm{AH}+\mathrm{A}^2n^2$$

est une constante positive; en effet, si l'on a égard à la valeur de H, on trouve

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}&\Phi^2(1-\mu)-2\mathrm{AH}+\mathrm{A}^2n^2\\&=\mathrm{A}^2\sin^2\theta\,\chi'^2+[\Phi-\mathrm{A}n(\cos\omega\cos\theta+\sin\omega\sin\theta\cos\chi)]^2,\end{aligned}\right.$$

ce qui démontre ce que j'ai avancé.

Ceci me permet de poser

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{\Phi^2(1-\mu)-2\mathrm{AH}+\mathrm{A}^2n^2}{\mathrm{A}^2n^2\sin^2\omega\sin^2\theta}=a^2,\\&\frac{\Phi-\mathrm{A}n\cos\omega\cos\theta}{\mathrm{A}n\sin\omega\sin\theta}=b,\end{aligned}\right.$$

a et b étant deux constantes arbitraires, dont la première sera, si l'on veut, essentiellement positive. J'introduis dans les calculs subséquents ces nouvelles constantes, à la place des quantités Φ et H.

L'intégrale (11) devient alors

$$(14)\quad \beta+t=\pm\frac{1}{n\sin\omega}\int\frac{d\chi}{\sqrt{a^2-(b-\cos\chi)^2}}=\pm\frac{1}{n\sin\omega}\int\frac{d\chi}{\sqrt{(p-\cos\chi)(q+\cos\chi)}},$$

en faisant

$$a+b=p,\quad a-b=q.$$

Posons enfin

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\chi = x,$$

il vient

$$(15)\qquad \beta + t = \pm\frac{2}{n\sin\omega}\int\frac{dx}{\sqrt{[p-1+(p+1)x^2][q+1+(q-1)x^2]}}.$$

La quadrature qui figure dans le deuxième membre de cette équation dépend des fonctions elliptiques de première espèce; on l'obtient sous la forme ordinaire en posant

$$(16)\qquad x = y\sqrt{\frac{1-p}{1+p}},\quad m^2 = \frac{(1-p)(1-q)}{(1+p)(1+q)};$$

en effet, on trouve ainsi

$$\beta + t = \pm\frac{2}{n\sin\omega\sqrt{-(1+p)(1+q)}}\int\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-m^2y^2)}},$$

d'où, en intégrant,

$$(17)\qquad y = \sin am\left[\frac{n\sin\omega\sqrt{-(1+p)(1+q)}}{2}(\beta+t),\ m\right],$$

la constante arbitraire β, jointe à t, permettant de supprimer le double signe $\pm$.

Je puis transformer l'équation (17) au moyen de la relation bien connue

$$\sin am(iu, m) = i\operatorname{tang} am(u, m'),$$

où, comme l'on sait,

$$i = \sqrt{-1},\quad m' = \sqrt{1-m^2}.$$

Si je pose

$$(18)\qquad n_1 = \frac{1}{2}n\sin\omega\sqrt{(1+p)(1+q)},$$

il vient

$$y = i\operatorname{tang} am[n_1(t+\beta),\ m'],$$

d'où

$$(19) \qquad x = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\chi = \sqrt{\frac{p-1}{p+1}} \operatorname{tang} am[n_1(t+\beta), m'].$$

30. Avant de discuter cette expression, c'est-à-dire de faire diverses hypothèses sur les signes et les grandeurs des quantités p et q, il faut commencer par examiner quelles sont celles de ces hypothèses qu'on devra rejeter. On verra par les remarques suivantes que les divers cas particuliers se réduisent à deux principaux : celui du mouvement continu et celui du mouvement oscillatoire.

1° Je dis d'abord que $1+p$ et $1+q$ ne peuvent ni l'un ni l'autre être négatifs.

Si l'on avait, en effet,

$$q < -1 \quad \text{ou} \quad a - b < -1,$$

on en conclurait

$$b > a + 1,$$

d'où

$$p > 2a + 1,$$

et à fortiori

$$p > 1,$$

puisque a est essentiellement positif.

Des deux inégalités

$$q < -1, \quad p > 1,$$

on déduirait

$$q + \cos\chi < 0, \quad p - \cos\chi > 0,$$

c'est-à-dire que le radical des expressions (14) serait essentiellement imaginaire.

On démontrerait de même que $1+p$ ne saurait être négatif.

On conclut de là que n_1 est toujours réel.

2° $p+1$ étant toujours positif, il doit en être de même de $p-1$, sans quoi la valeur (19) de x serait imaginaire, n_1 étant réel.

Il y a donc en définitive seulement deux cas à distinguer, selon que $1-q$ est positif ou négatif.

Premier cas : $1-q<0$. $1-p$ étant aussi négatif, la quantité m est réelle, et il est facile de s'assurer qu'elle est plus petite que 1, donc m' est également réel et plus petit que 1. On peut prendre m' pour module d'une fonction elliptique ordinaire; et si l'on pose

$$\mathfrak{k}_1 = m' = 2\sqrt{\frac{a}{(1+p)(1+q)}},$$

on aura

$$\tag{20} \operatorname{tang}\frac{1}{2}\chi = \sqrt{\frac{p-1}{p+1}}\operatorname{tang} am(n_1 t, \mathfrak{k}_1),$$

en supposant que l'origine du temps coïncide avec l'instant où l'axe du solide considéré est dans le plan méridien.

On voit d'après la formule (20) que l'angle χ peut passer par toutes les valeurs comprises entre 0° et 360°. Le mouvement est continu. La durée d'une révolution dépend à la fois du coefficient n_1 et du module $\mathfrak{k}_1$. En désignant, avec Jacobi, par K_1 la fonction complète qui correspond au module $\mathfrak{k}_1$, on aura

$$T = \frac{4K_1}{n_1}.$$

Deuxième cas : $1-q>0$. m est imaginaire, et par conséquent m' plus grand que 1. Je pose alors

$$\mathfrak{k}_2 = \frac{1}{m'} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1+p)(1+q)}{a}};$$

et comme

$$\operatorname{tang} am\left(u, \frac{1}{\mathfrak{k}}\right) = \frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{k}'}\cos coam\left(\frac{u}{\mathfrak{k}}, \mathfrak{k}\right) \text{ [*]},$$

je puis remplacer la formule (20) par la suivante

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\chi = \sqrt{\frac{1+q}{1-q}}\cos coam[n_2(t+\beta), \mathfrak{k}_2],$$

[*] *Fundamenta nova*, p. 70.

où

$$n_2 = \frac{n_1}{k_2} = n \sin\omega \sqrt{a}.$$

Enfin puisqu'on a d'une manière générale

$$\cos coam\, u = \cos am\,(K - u) = \cos am\,(u - K),$$

la constante arbitraire β me permet d'écrire l'équation précédente :

$$(21)\qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}\chi = \sqrt{\frac{1+q}{1-q}} \cos am\,(n_2 t, k_2).$$

Ici $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\chi$ varie seulement de $+\sqrt{\frac{1+q}{1-q}}$ à $-\sqrt{\frac{1+q}{1-q}}$; c'est-à-dire que l'axe du solide accomplit des oscillations symétriques de part et d'autre du plan méridien, la durée de chaque oscillation complète étant

$$T = \frac{4K_2}{n_2}.$$

31. L'amplitude des oscillations est d'autant plus grande que q s'approche plus de l'unité, et d'autant plus petite que cette quantité est plus voisine de -1. Les deux cas limites, $q = 1$ et $q = -1$, correspondent à l'équilibre relatif; on a alors $\chi =$ constante : 0° dans le deuxième cas, et 180° dans le premier; on sait d'ailleurs qu'il y a stabilité dans l'une des positions et instabilité dans l'autre, et que la stabilité a lieu quand la rotation du corps autour de son axe de figure est de même sens que la rotation de la terre.

Si $1 + q$ est une quantité très-petite, le module k_2 est aussi très-petit, et l'on peut remplacer la fonction complète K_2 par $\frac{\pi}{2}$, ou, si l'on veut, par $\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k_2^2}{4}\right)$. En s'en tenant à la première valeur, on aura

$$(22)\qquad T = \frac{2\pi}{n_2} = \frac{2\pi}{n \sin\omega \sqrt{a}} = 2\pi \frac{\sqrt{\pm \frac{A \sin\theta}{n \sin\omega}}}{\sqrt[4]{\Phi^2(1-\mu) - 2AH + A^2 n^2}}.$$

Le double signe doit être pris sous le radical de manière à rendre celui-ci réel. En effet, j'ai dit (n° **29**) que je prenais pour a la valeur positive de $\sqrt{a^2}$, donc

$$a = \frac{\sqrt{\Phi^2(1-\mu) - 2AH + A^2 n^2}}{\pm A n \sin\omega \sin\theta},$$

en ayant soin de prendre le signe + ou le signe −, selon que $A n \sin\omega \sin\theta$ ou $\frac{A \sin\theta}{n \sin\omega}$ est positif ou négatif.

Si dans l'équation (21) on fait $t = 0$, $1 + q$ étant toujours supposé très-petit, on a

$$\cos\chi_0 = -q = 1 \text{ à peu près},$$
$$\chi'_0 = 0;$$

si de plus je désigne par N_0 la projection de la rotation initiale du corps sur son axe de figure, j'ai

$$(5\ bis) \qquad \Phi = C[N_0 + n\cos(\omega - \theta)],$$

$$(13\ bis) \qquad a = \frac{N_0 + n(1-\mu)\cos(\omega-\theta)}{\mu n \sin\omega \sin\theta}.$$

Cette valeur de a a été obtenue en remplaçant le numérateur de l'expression (13) par sa valeur tirée de l'équation (12), et en y faisant ensuite $t = 0$.

Si l'on se reporte maintenant à l'équation (22), et qu'on substitue à la constante a sa valeur (13 *bis*), il vient

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} T &= 2\varpi \sqrt{\frac{\mu \sin\theta}{n \sin\omega [N_0 + n(1-\mu)\cos(\omega-\theta)]}} \\ &= 2\varpi \sqrt{\frac{\mu \sin\theta}{N_0 n \sin\omega}} \left[1 - \frac{1}{2}\frac{n(1-\mu)\cos(\omega-\theta)}{N_0}\right], \end{aligned} \right.$$

en ayant égard à la petitesse habituelle du rapport $\frac{n}{N_0}$.

32. Pour terminer cette discussion, il faut encore considérer le cas où

$$p = q = 1,$$

ce qui exige qu'on ait

$$(24) \qquad b = 0 \quad \text{ou} \quad N_0 = n[\mu \cos\omega \cos\theta - \cos(\omega - \theta)].$$

L'équation précédente montre que ce cas ne se rencontrera généralement pas dans les expériences, car la rotation N_0 est toujours très-grande par rapport à n. Quoi qu'il en soit, on a alors

$$\beta + t = \pm \frac{1}{n \sin\omega} \int \frac{d\chi}{\sin\chi},$$

d'où

$$(25) \qquad \operatorname{tang} \frac{1}{2}\chi = \operatorname{tang} \frac{1}{2}\chi_0 \, e^{\pm n \sin\omega . t},$$

$$(26) \qquad \chi' = \pm n \sin\omega \sin\chi.$$

Pour que ce cas se présente, il faut évidemment d'abord que l'équation (26) soit satisfaite à l'origine du mouvement; cette équation revient à $a = 1$, si l'on tient compte de ce que $b = 0$. Suivant que l'équation

$$\chi'_0 = \pm n \sin\omega \sin\chi_0$$

sera d'ailleurs vérifiée avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, on connaîtra le signe qu'on devra prendre dans les équations (25) et (26).

Dans ce cas remarquable, le mouvement ne sera pas périodique, l'axe du corps tendra indéfiniment vers sa position d'équilibre. Mais alors il est remarquable qu'il se dirigera indifféremment soit vers la ligne qui répond à $\chi = 0$, soit vers $\chi = 180°$, selon le sens de l'impulsion primitive et quel que soit celui de sa rotation propre, pourvu, bien entendu, que celle-ci satisfasse à l'équation (24).

33. Enfin je n'aurais pas pu poser les équations (13), si $\sin\omega$ avait été nul, c'est-à-dire si l'axe de la terre coïncidait avec celui du cône directeur : on a alors

$$\psi = \pm M(t + \beta),$$

c'est-à-dire que la rotation de la terre n'a ici d'autre effet que de changer la valeur de la constante M, sans plus modifier les lois du mouvement; l'axe du corps solide conserve indéfiniment son état de repos ou de mouvement uniforme.