JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Remarques nouvelles sur la forme $x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 193-204.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__193_0>

REMARQUES NOUVELLES SUR LA FORME
$x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Dans le cahier d'avril, où nous nous sommes d'abord occupés de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

et de quelques formes qui se rattachent à celle-là, nous avons déterminé non-seulement le nombre complet

$$\mathrm{N}(n)$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

où n est un entier donné et x, y, z, t des entiers quelconques positifs, nuls ou négatifs, mais séparément aussi le nombre

$$\mathrm{N}'(n)$$

des solutions de cette équation pour lesquelles $z^2 + 3t^2$ est un entier impair, et le nombre

$$\mathrm{N}''(n) = \mathrm{N}(n) - \mathrm{N}'(n)$$

de celles pour lesquelles $z^2 + 3t^2$ est un entier pair. En posant $n = 2^\alpha 3^\beta m$ (m impair, premier à 3), on a

$$\mathrm{N}(n) = \left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\sum$$

et

$$\mathrm{N}'(n) = 2^\alpha\left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\sum,$$

en désignant, pour abréger, par la simple lettre

$$\sum$$

la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d,$$

ou, si l'on veut,

$$\sum \left(\frac{3}{\delta}\right) d,$$

relative aux groupes de diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$.

2. Nous plaçant ensuite à un autre point de vue, nous avons cherché, dans le cahier de mai, le nombre

$$N_0(n)$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

pour lesquelles t est pair, ce qui revient à chercher le nombre total des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers quelconques.

Si l'on demandait au contraire le nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

pour lesquelles t est impair, nous répondrions naturellement que ce nombre

$$N_1(n)$$

est égal à

$$N(n) - N_0(n).$$

En continuant à poser $n = 2^\alpha 3^\beta m$, nous avons trouvé que pour $\alpha > 1$ l'on a

$$N_0(2^\alpha 3^\beta m) = N(2^{\alpha-2} 3^\beta m).$$

Le cas de $\alpha = 1$ est résolu par la formule

$$N_0(2.3^\beta m) = \frac{3}{2} N'(2.3^\beta m).$$

Enfin le cas de $\alpha = 0$, ou de n impair $= 3^\beta m$, le seul qui offrît des difficultés, a exigé l'introduction d'une fonction numérique nouvelle

$$\sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j,$$

que nous avons représentée par la simple lettre

$$\sigma$$

et qui se rapporte aux entiers j, impairs et positifs, qui peuvent figurer dans l'équation

$$4n = i^2 + 3j^2,$$

où l'entier i est aussi impair et positif. On a, en effet, dans l'hypothèse de n impair :

$$N_0(n) = \frac{1}{2} N(n) + 3\sigma.$$

5. Les fonctions numériques

$$N(n),\ N'(n),\ N_0(n),\ N''(n),\ N_1(n),$$

dont les trois premières déterminent les deux autres, sont très-importantes, et nous ont été, comme on l'a vu, de la plus grande utilité pour l'étude de plusieurs formes nouvelles. Trois fonctions numériques d'un haut intérêt ramenées à des expressions simples, trois questions essentielles (tout à fait distinctes) complétement résolues et donnant lieu sans beaucoup de peine à de nombreux corollaires et à des développements curieux, voilà ce que contiennent au fond les quatre feuilles du cahier d'avril, les deux dernières feuilles du cahier de mai et les deux feuilles qui précèdent celle-ci. Mais il sera bon d'ajouter encore quelques remarques et de pénétrer ainsi plus profondément dans le cœur du sujet.

Montrons d'abord comment on peut diviser en quatre classes les solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2,$$

que nous n'avions jusqu'ici divisées qu'en deux classes, sous un double aspect, il est vrai; ce qui conduit naturellement à la division en quatre classes.

En effet, l'entier t peut être pair ou impair, et la somme $z^2 + 3t^2$ peut aussi être paire ou impaire. La distinction des deux cas relatifs à t a été faite au moyen d'un indice 0 ou 1 appliqué à la lettre N, et celle des deux cas relatifs à $z^2 + 3t^2$ au moyen d'un accent double ou simple. Employons à la fois ces deux notations, et nous aurons obtenu la division en quatre classes.

Je désigne donc par

$$N''_0(n)$$

le nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

pour lesquelles t et $z^2 + 3t^2$ sont à la fois des entiers pairs, c'est-à-dire pour lesquelles t et z sont pairs.

Il est clair que

$$N''_0(n)$$

est précisément le nombre complet des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2,$$

où les entiers x, y, z, t seraient quelconques. Or ce nombre, nous l'avons donné à la fin du cahier de mai. La valeur de

$$N''_0(n)$$

est donc connue.

Pour n impair $4g + 3$, on a

$$N''_0(n) = 0,$$

tandis que pour $n = 4g + 1$, l'on trouve

$$N''_0(n) = \frac{2}{3} N_0(n),$$

ou, ce qui revient au même,

$$N''_0(n) = \frac{1}{3} N(n) + 2\sigma.$$

Pour n impairement pair, $n = 2(2g + 1)$, la formule est

$$N''_0(n) = \frac{1}{3} N_0(n),$$

ou, si l'on veut,

$$N''_0(n) = \frac{1}{2} N'(n).$$

Enfin, pour n pairement pair, la formule est

$$N''_0(n) = N_0(n),$$

ou bien, en faisant $n = 4g$,

$$N''_0(4g) = N(g).$$

4. Le nombre

$$N'_0(n)$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

pour lesquelles t est pair et z impair (d'où $z^2 + 3t^2$ entier impair) est maintenant facile à calculer; car on a évidemment

$$N'_0(n) + N''_0(n) = N_0(n),$$

d'où

$$N'_0(n) = N_0(n) - N''_0(n).$$

De là résulte, pour n multiple de 4, $n = 4g$, l'équation

$$N'_0(4g) = 0,$$

ce qu'on voit à priori devoir être.

Pour n impairement pair, $n = 2(2g+1)$, la formule est

$$N'_0(n) = \frac{2}{3} N'(n).$$

Pour n impair $4g+3$, on a

$$N'_0(n) = N_0(n),$$

ou, si l'on veut,

$$N'_0(n) = \frac{1}{2} N(n) + 3\sigma.$$

Enfin, pour $n = 4g+1$,

$$N'_0(n) = \frac{1}{3} N_0(n).$$

c'est-à-dire

$$N'_0(n) = \frac{1}{6} N(n) + \sigma.$$

5. Pour trouver le nombre

$$N'_1(n)$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

pour lesquelles t et $z^2 + 3t^2$ à la fois ont une valeur impaire, c'est-à-dire pour lesquelles t est impair et z pair, on observera que

$$N'_1(n) + N'_0(n) = N'(n),$$

ce qui donne la formule

$$N'_1(n) = N'(n) - N'_0(n),$$

où le second membre est actuellement connu.

De même, le nombre

$$N''_1(n)$$

relatif au cas de t impair et de $z^2 + 3t^2$ entier pair, c'est-à-dire de t et z impairs à la fois, s'exprimera par

$$N''_1(n) = N''(n) - N''_0(n),$$

ou bien encore par

$$N''_1(n) = N(n) - N'(n) - N''_0(n).$$

Les quatre nombres partiels

$$N'_0(n),\ N''_0(n),\ N'_1(n),\ N''_1(n),$$

dont le total fait

$$N(n),$$

sont donc connus séparément; et cela doit servir à résoudre plus d'un problème digne d'intérêt. On peut en effet varier de bien des manières les questions relatives à la représentation des nombres par une forme donnée, en imposant aux indéterminées de la forme des conditions particulières, au lieu d'admettre indifféremment tous les nombres entiers. Or, quand ces conditions portant sur une ou plusieurs des indéterminées x, y, z, t, ne seront relatives qu'au module 2, c'est-à-dire quand il ne s'agira que de distinctions relatives à des entiers pairs ou impairs dans le calcul du nombre de solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2,$$

ce calcul sera facile au moyen des fonctions

$$N'_0(n),\ N''_0(n),\ N'_1(n),\ N''_1(n).$$

6. Pour le montrer de la manière la plus simple, parcourons toutes les hypothèses que l'on peut faire sur les valeurs de x, y, z, t (mod. 2) en les supposant fixées d'avance.

On peut prendre l'entier t pair et x, y, z impairs. Mais l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

n'a alors de solutions que si $n = 4g + 3$; et quand on a effectivement

$$n = 4g + 3,$$

on voit tout de suite que le nombre des solutions est

$$N'_0(n),$$

ou bien encore

$$N_0(n),$$

car alors

$$N'_0(n) = N_0(n).$$

Le nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2,$$

quand on exige que t soit pair et x, y, z impairs, est donc égal à $N'_0(n)$, ou à zéro, suivant que n est ou n'est pas de la forme $4g + 3$.

On peut prendre l'entier t pair, ainsi qu'un des entiers x, y, z, les deux autres étant impairs. Prenons, par exemple, t et z pairs, x et y impairs. Alors l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

ne sera possible que si $n = 4g + 2$, et dans ce cas le nombre des solutions sera

$$N''_0(n).$$

On peut exiger qu'un seul des entiers x, y, z soit impair et que les deux autres soient pairs aussi bien que t. Exigeons, par exemple, que z soit impair et que x, y, t soient pairs. Dans ce cas, l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

ne sera possible que si n est de la forme $4g + 1$; et pour $n = 4g + 1$, le nombre des solutions sera

$$N'_0(n).$$

Le cas où l'on prendrait x, y, z, t pairs à la fois est en quelque sorte insignifiant. L'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

n'est possible alors que pour n multiple de 4. Et quand $n = 4g$, on n'a qu'à faire $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$, $t = 2t_1$, pour ramener l'équation proposée à celle-ci

$$g = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 3t_1^2;$$

le nombre des solutions est donc $N(g)$.

Prenons à présent t impair, et x, y, z pairs. L'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

ne sera alors possible que si $n = 4g + 3$; et dans le cas de

$$n = 4g + 3,$$

le nombre des solutions dont elle jouit est évidemment

$$N'_1(n),$$

ou si l'on veut

$$N_1(n),$$

car on a ici

$$N'_1(n) = N_1(n).$$

Maintenant, que t étant impair, un des entiers x, y, z soit impair, les deux autres pairs. Que par exemple, avec t impair, on ait z impair, x et y pairs. Dans ces conditions, l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

ne sera possible que si $n = 4g$; mais dans le cas de $n = 4g$, le nombre des solutions sera

$$N''_1(n).$$

Prenons toujours t impair, et que de plus deux des entiers x, y, z soient impairs, le troisième pair. Que, par exemple, avec t impair, on veuille avoir x et y impairs, z pair. L'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

ne sera possible alors que si $n = 4g + 1$; mais dans le cas de

$n = 4g + 1$, le nombre des solutions sera

$$N'_1(n).$$

Il nous reste à examiner le cas où l'on prendrait x, y, z et t impairs à la fois. Mais avant de m'en occuper (et de le développer avec quelque étendue à cause de l'intérêt qu'il offre), je remarquerai que quand il s'agit d'entiers impairs on n'a aucun avantage à leur donner le double signe $\pm$; admettre le double signe pour une, deux, trois ou quatre indéterminées impaires, c'est tout simplement doubler, quadrupler, multiplier par 8 ou par 16 le nombre des solutions qui auraient lieu sans cela : il n'en est pas de même pour les entiers pairs, à cause du zéro.

7. Supposons donc que voulant représenter par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

un entier donné n, on n'admette pour x, y, z, t que des entiers impairs et positifs. Quel sera dans ce cas le nombre

$$\mathcal{N}(n)$$

des représentations? Il est bien clair qu'il sera nul si n n'est pas de la forme $8l + 6$. Mais quelle est la valeur de

$$\mathcal{N}(8l + 6)?$$

Pour répondre à cette question, j'observe d'abord que si tout en prenant x, y, z, t impairs dans l'équation

$$8l + 6 = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2,$$

on admettait pour ces indéterminées le double signe $\pm$, le nombre des représentations deviendrait

$$16\mathcal{N}(8l + 6).$$

D'ailleurs, dès que t est impair dans l'équation proposée, x, y, z ne peuvent être qu'impairs. Donc, en ajoutant à

$$16\,\mathfrak{N}(8l+6)$$

le nombre

$$N_0(8l+6)$$

des représentations pour lesquelles t est pair, on aura le nombre total

$$N(8l+6)$$

des représentations. Je conclus de là que

$$\mathfrak{N}(8l+6) = \frac{1}{16}[N(8l+6) - N_0(8l+6)],$$

équation dont le second membre est connu par nos formules.

Les entiers de la forme $8l+6$ se divisent en quatre classes qu'il est bon de distinguer, en sorte que notre équation se décompose dans les quatre suivantes. On a

$$\mathfrak{N}\left[2.3^{2\gamma+1}(12k+1)\right] = \frac{3^{2\gamma+2}-1}{8}\sum,$$

puis

$$\mathfrak{N}\left[2.3^{2\gamma+1}(12k+5)\right] = \frac{3^{2\gamma+2}+1}{8}\sum,$$

mais

$$\mathfrak{N}\left[2.3^{2\gamma}(12k-5)\right] = \frac{3^{2\gamma+1}+1}{8}\sum,$$

enfin

$$\mathfrak{N}\left[2.3^{2\gamma}(12k-1)\right] = \frac{3^{2\gamma+1}-1}{8}\sum,$$

où

$$\sum$$

se rapporte successivement aux entiers

$$12k+1, \quad 12k+5, \quad 12k-5, \quad 12k-1.$$

On admet, bien entendu, pour γ la valeur o comme les autres valeurs.

On exprime aisément que dans une forme proposée un entier t ou z doit être pair; il suffit de le remplacer par $2u$, u restant entier quelconque, et l'on aura ainsi une forme nouvelle à étudier. Comme on ne peut pas procéder de même pour les entiers impairs, du moins en s'en tenant aux formes homogènes, j'ai cru devoir entrer à leur sujet dans les détails qui précèdent.