JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 173-176.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__173_0>

SUR LA FORME

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2;$$

Par M. J. LIOUVILLE.

1. La détermination du nombre

$$N(n = x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2)$$

des représentations de n, par la forme

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2,$$

peut aussi être ramenée facilement à celle du nombre

$$N_0(n)$$

des représentations de n par la forme

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2.$$

La valeur de

$$N_0(n)$$

ayant donc été donnée plus haut pour les divers cas qui peuvent se présenter, nous la supposerons connue dans tout ce qui va suivre, et nous y rattacherons la valeur demandée de

$$N(n = x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2).$$

2. Qu'il s'agisse d'abord d'un entier n impair. Il pourra être de la forme

$$4g + 1$$

ou de la forme

$$4g + 3.$$

Or on a

$$N(4g+1 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2) = \tfrac{2}{3} N_0(4g+1)$$

et

$$N(4g+3 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2) = 0.$$

L'exactitude de la seconde de ces formules est évidente, et la première formule est facile à établir

Prenons, comme premier exemple, $n = 9$. On a

$$N_0(9) = 30.$$

Donc

$$N(9 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2) = 20,$$

et cela est confirmé par les équations

$$\begin{aligned}
9 &= (\pm 3)^2 + 0^2 + 4.0^2 + 12.0^2,\\
9 &= 0^2 + (\pm 3)^2 + 4.0^2 + 12.0^2,\\
9 &= (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 4(\pm 1)^2 + 12.0^2,\\
9 &= (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 12.0^2,
\end{aligned}$$

qui donnent pour l'entier 9 vingt représentations.

Soit ensuite

$$n = 13.$$

Comme on a trouvé

$$N_0(13) = 36,$$

il s'ensuivra

$$N(13 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2) = 24.$$

Or, des identités

$$\begin{aligned}
13 &= 3^2 + 2^2 + 4.0^2 + 12.0^2,\\
13 &= 3^2 + 0^2 + 4.1^2 + 12.0^2,\\
13 &= 1^2 + 0^2 + 4.0^2 + 12.1^2,
\end{aligned}$$

on tire pour l'entier 13 vingt-quatre représentations en affectant du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en opérant les permutations convenables.

3. Soit à présent n impairement impair,

$$n = 2(2g+1).$$

Je trouve que dans ce cas

$$N(n = x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2) = \frac{1}{3} N_0(n).$$

Ayant donc obtenu

$$N_0(10) = 24,$$

nous sommes autorisés à affirmer que

$$N(10 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2) = 8,$$

et cela s'accorde avec les équations

$$10 = (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2 + 4.0^2 + 12.0^2,$$
$$10 = (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 12.0^2,$$

qui fournissent, pour l'entier 10, huit réprésentations.

Semblablement, de

$$N_0(14) = 72,$$

nous tirons

$$N(14 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2) = 24;$$

or c'est bien là ce qui résulte des trois identités que voici :

$$14 = (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2 + 4(\pm 1)^2 + 12.0^2,$$

puis

$$14 = (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 12.0^2,$$

enfin

$$14 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 12(\pm 1)^2.$$

4. Enfin soit n multiple de 4, c'est-à-dire soit

$$n = 2^\alpha(2g+1),$$

avec $\alpha > 1$. On voit immédiatement que l'on a alors

$$N(n = x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2) = N_0(n).$$

Soit par exemple

$$n = 12.$$

On a

$$N_0(12) = 10;$$

on aura donc aussi

$$N(12 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2) = 10.$$

Or on constate qu'il existe en effet dix représentations de l'entier

$$12$$

par la forme

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2,$$

au moyen des identités

$$12 = 0^2 + 0^2 + 4.0^2 + 12(\pm 1)^2$$

et

$$12 = (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 + 4(\pm 1)^2 + 12.0^2,$$

dont la première fournit deux représentations, tandis que la seconde en fournit huit.

Je ne crois pas utile d'ajouter d'autres exemples; mais quels que soient ceux qu'on veuille choisir, on ne pourra que confirmer l'exactitude de nos formules.