JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 169-172.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__169_0>

SUR LA FORME
$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. On demande le nombre

$$N(n = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2)$$

des représentations d'un entier donné n, par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2.$$

Or on pourra tout de suite répondre à cette question, si l'on s'en réfère à l'article précédent où nous avons déterminé le nombre

$$N_0(n)$$

des représentations de n par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2.$$

Nous supposons donc connue la valeur de

$$N_0(n),$$

c'est-à-dire de

$$N(n = x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2);$$

et de là nous passerons à celle de

$$N(n = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2)$$

en considérant successivement quatre cas très-distincts.

2. Soit d'abord n impair et de la forme $4g + 1$. Nous répondons

alors à la question proposée en disant que

$$N(4g+1 = x^2+2y^2+2z^2+12t^2) = \frac{1}{3} N_0(4g+1).$$

Ainsi, ayant trouvé dans l'article précédent

$$N_0(9) = 30,$$

nous pouvons affirmer qu'il y a dix représentations de l'entier 9 par la forme

$$x^2+2y^2+2z^2+12t^2:$$

ce sont celles que fournissent les deux identités

$$9 = (\pm 3)^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 12.0^2$$

et

$$9 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 2)^2 + 2.0^2 + 12.0^2,$$

en y opérant les permutations convenables.

De même, ayant vu que

$$N_0(13) = 36,$$

on est certain de trouver

$$N(13 = x^2+2y^2+2z^2+12t^2) = 12;$$

or c'est là en effet ce qui résulte des équations

$$13 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 12.(\pm 1)^2$$

et

$$13 = (\pm 3)^2 + 2.(\pm 1)^2 + 2.(\pm 1)^2 + 12.0,^2$$

dont la première fournit pour l'entier 13 quatre représentations, tandis que la seconde en fournit huit.

3. Maintenant, soit

$$n = 4g+3.$$

Je dis que nous aurons, dans ce cas,

$$N(n = x^2+2y^2+2z^2+12t^2) = N_0(n).$$

Ainsi, par cela seul qu'on a trouvé plus haut

$$N_0(7) = 0,$$

nous avons aussi

$$N(7 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2) = 0.$$

De même on a

$$N(3 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2) = N_0(3),$$

la valeur commune des deux membres étant alors $= 8$, ainsi qu'il est aisé de le vérifier.

On ajoutera, si on le désire, d'autres exemples. Je passe aux nombres impairement pairs.

4. Soit n un nombre impairement pair, de façon que

$$n = 2(2g + 1).$$

La formule pour ce cas est

$$N(n = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2) = \frac{1}{3} N_0(n).$$

Ayant donc trouvé

$$N_0(10) = 24,$$

nous sommes autorisés à affirmer que

$$N(10 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2) = 8;$$

or c'est ce qui résulte des deux équations

$$10 = 0^2 + 2(\pm 2)^2 + 2(\pm 1)^2 + 12.0^2$$

et

$$10 = 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2(\pm 2)^2 + 12.0^2.$$

Semblablement, de

$$N_0(14) = 72,$$

nous devons conclure

$$N(14 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2) = 24,$$

ce qui résulte effectivement des deux identités

$$14 = 0^2 + 2.1^2 + 2.0^2 + 12.1^2$$

et

$$14 = 2^2 + 2.1^2 + 2.2^2 + 12.0^2,$$

en y donnant le double signe $\pm$ aux racines des carrés qui ne sont pas nuls et en effectuant les permutations convenables.

5. Je termine par le cas le plus simple, celui de n multiple de 4. On a alors

$$N(n = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2) = N_0(n),$$

ce qui est en quelque sorte évident. Je me bornerai donc à l'exemple de $n = 12$; et de

$$N_0(12) = 10,$$

je conclurai

$$N(12 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2) = 10;$$

or on a, en effet, dix représentations du nombre 12, par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2,$$

au moyen des identités

$$12 = 0^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 12(\pm 1)^2,$$
$$12 = (\pm 2)^2 + 2(\pm 2)^2 + 2.0^2 + 12.0^2,$$
$$12 = (\pm 2)^2 + 2.0^2 + 2(\pm 2)^2 + 12.0^2.$$

Je ne pense pas qu'il soit utile de pousser plus loin ces vérifications numériques.