JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 129-133.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__129_0>

SUR LA FORME

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2;$$

Par M. J. LIOUVILLE.

1. La détermination du nombre des représentations d'un entier donné n par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2,$$

c'est-à-dire du nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2,$$

se rattache aussi aux questions traitées ci-dessus. Il faut, cette fois encore, poser

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

m étant un entier impair non divisible par 3 et les exposants α, β pouvant se réduire à zéro; après quoi on forme la fonction numérique

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier

$$m = d\delta.$$

La recherche du nombre

$$N\left(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2\right)$$

des solutions de l'équation

$$2^\alpha 3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2$$

dépend en effet surtout de la fonction

$$\sum (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d$$

que nous désignons par la simple lettre

$$\sum.$$

2. Quand on a $\alpha = 0$, c'est-à-dire quand il s'agit d'un entier impair

$$3^\beta m,$$

je trouve que

$$\mathrm{N}(3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2) = \left[3^{\beta+1} - (-1)^\beta \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum.$$

En particulier si l'on prend $\beta = 0$ et si l'on ne considère que les entiers impairs premiers à 3, lesquels sont susceptibles, relativement au module 6, des deux formes distinctes

$$6l + 1$$

ou

$$6l - 1,$$

on a

$$\mathrm{N}(m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2) = 2 \sum$$

quand

$$m = 6l + 1,$$

mais

$$\mathrm{N}(m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2) = 4 \sum$$

quand

$$m = 6l - 1.$$

S'il s'agit d'un entier pair, $2^\alpha 3^\beta m$ avec $\alpha > 0$, la valeur de

$$\mathrm{N}(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2)$$

est

$$\left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\sum.$$

On voit donc que les deux cas de $\alpha = 0$ et de $\alpha > 0$ sont absolument distincts.

3. Donnons maintenant le nombre des solutions propres de l'équation

$$2^{\alpha} 3^{\beta} m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2,$$

et à cet effet introduisons, comme dans les articles précédents, au lieu de la somme

$$\sum$$

le produit

$$\prod = \left[a^{\mu} + (-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a}{3}\right)a^{\mu-1}\right]\left[b^{\nu} + (-1)^{\frac{b-1}{2}}\left(\frac{b}{3}\right)b^{\nu-1}\right]\cdots$$

qu'on forme à l'aide de la décomposition en facteurs premiers de l'entier

$$m = a^{\mu} b^{\nu} \ldots;$$

il faudra considérer successivement les entiers impairs, les entiers impairement pairs, les multiples de 4 non divisibles par 8, et enfin les multiples de 8.

S'il s'agit d'un entier impair m, non divisible par 3, le nombre demandé s'exprimera par

$$\left[3 - \left(\frac{m}{3}\right)\right]\prod:$$

c'est-à-dire par

$$2\prod$$

si

$$m = 6l + 1,$$

mais par

$$4\,\Pi$$

si $m = 6l - 1$.

Pour un multiple impair de 3, non de 9, comme $3m$, il faut prendre

$$\left[9 + \left(\frac{m}{3}\right)\right]\Pi;$$

et enfin s'il s'agit d'un multiple impair de 9, $3^\beta m$ avec $\beta > 1$, ce sera

$$8.3^{\beta-1}\,\Pi.$$

Passons aux entiers impairement pairs $2.3^\beta m$. L'expression du nombre cherché sera

$$\left[3 + \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2 - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\Pi$$

si $\beta = 0$, mais

$$\left[9 - \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2 + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\Pi$$

si $\beta = 1$, enfin

$$8.3^{\beta-1}\left[2 - (-1)^{\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\Pi$$

si l'on a $\beta > 1$.

Pour les multiples de 4, non de 8, $4.3^\beta m$, on aura, si $\beta = 0$, l'expression suivante :

$$\left[3 - \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[3 + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\Pi;$$

mais, si $\beta = 1$, celle-ci

$$\left[9 + \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[3 - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\Pi;$$

enfin, si β est > 1, ce sera

$$8.3^{\beta-1}\left[3 + (-1)^{\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\Pi.$$

En dernier lieu viennent les multiples de 8, représentés par $2^\alpha 3^\beta m$ avec $\alpha > 2$. Pour ceux-là, suivant que l'on a $\beta = 0$, ou $\beta = 1$, ou enfin $\beta > 1$, l'expression du nombre cherché est

$$3.2^{\alpha-2}\left[3 - (-1)^\alpha \left(\frac{m}{3}\right)\right]\Pi,$$

ou bien

$$3.2^{\alpha-2}\left[9 + (-1)^\alpha \left(\frac{m}{3}\right)\right]\Pi,$$

ou enfin

$$2^{\alpha+1}3^\beta\,\Pi.$$