JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 8 (1863), p. 124-128.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1863_2_8__124_0>

SUR LA FORME
$x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La détermination du nombre des représentations d'un entier donné n par la forme

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2,$$

ou, autrement dit, la détermination du nombre

$$N(n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2)$$

des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2,$$

se rattache à ce que nous avons donné plus haut concernant la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2.$$

Nous continuerons ici à désigner par $N(n)$ le nombre des représentations de n par cette dernière forme, c'est-à-dire que nous écrirons simplement

$$N(n)$$

au lieu de

$$N(n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2).$$

Nous continuerons aussi à poser

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

m désignant un entier impair non divisible par 3, et les exposants α,

β pouvant se réduire à zéro. Enfin nous rappellerons que

$$\mathrm{N}(2^\alpha 3^\beta m) = \left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\sum,$$

où l'on désigne abréviativement par

$$\sum$$

la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{3}\right) d,$$

relative aux groupes de diviseurs conjugués d, δ du nombre entier $m = d\delta$.

2. Cela étant, je remarque d'abord que le problème proposé pour la forme actuelle

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2$$

n'offre aucune difficulté quand il s'agit d'un entier n pair. Il est aisé en effet de prouver que, si α est > 0, on a

$$\mathrm{N}(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2) = \mathrm{N}(2^{\alpha-1} 3^\beta m);$$

partant la valeur de

$$\mathrm{N}(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2)$$

est alors égale à

$$\left[3^{\beta+1} + (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^\alpha - (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\sum.$$

Mais pour $\alpha = 0$, il faut une autre formule.

3. On pourrait ici distinguer deux cas, suivant que l'entier impair $3^\beta m$ est de la forme $4g+1$ ou de la forme $4g+3$.

Pour $3^\beta m = 4g + 1$, je trouve

$$N(3^\beta m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2) = \frac{1}{3} N(2.3^\beta m),$$

tandis que, pour $3^\beta m = 4g + 3$, il vient

$$N(3^\beta m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2) = \frac{1}{5} N(2.3^\beta m).$$

Mais on réunira ces deux cas en un seul, en prenant pour diviseur de l'unité dans le second membre, non plus 3 ou 5, mais

$$4 - (-1)^{\beta + \frac{m-1}{2}}.$$

En un mot la valeur générale de

$$N(3^\beta m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2)$$

est le quotient de

$$N(2.3^\beta m),$$

c'est-à-dire de

$$\left[3^{\beta+1} + (-1)^\beta \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[4 - (-1)^{\beta + \frac{m-1}{2}}\right] \sum,$$

par

$$4 - (-1)^{\beta + \frac{m-1}{2}}.$$

Il y a donc simplification, puisque le dénominateur n'est autre chose qu'un des facteurs mis en évidence au numérateur. De là résulte cette formule définitive, propre à tous les cas et digne d'attention :

$$N(3^\beta m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2) = \left[3^{\beta+1} + (-1)^\beta \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum.$$

En prenant $\beta = 0$ et distinguant les deux formes possibles de m (mod. 6), on a en particulier

$$N(m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2) = 4 \sum$$

si $m = 6l + 1$, tandis que

$$N(m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2) = 2\sum$$

si $m = 6l - 1$.

4. Maintenant occupons-nous des représentations propres. Pour obtenir le nombre de ces représentations, il faudra au lieu de la somme

$$\sum$$

employer le produit

$$\prod$$

défini par l'équation

$$\prod = \left[a^\mu + (-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a}{3}\right)a^{\mu-1}\right]\left[b^\nu + (-1)^{\frac{b-1}{2}}\left(\frac{b}{3}\right)b^{\nu-1}\right]\ldots,$$

où a, b,... sont les facteurs premiers de $m = a^\mu b^\nu\ldots$; mais il y a plusieurs cas à distinguer.

S'il s'agit d'un entier impair m, premier à 3, le nombre cherché s'exprimera par

$$\left[3 + \left(\frac{m}{3}\right)\right]\prod;$$

mais pour le triple d'un tel entier, on devra prendre

$$\left[9 - \left(\frac{m}{3}\right)\right]\prod.$$

Enfin s'il s'agit d'un multiple impair de 9, $3^\beta m$ avec $\beta > 1$, ce sera

$$8.3^{\beta-1}\prod.$$

Passons aux entiers impairement pairs $2.3^\beta m$. L'expression du nombre demandé sera

$$\left[3^{\beta+1} - (-1)^\beta\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2 + (-1)^{\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\prod$$

pour $\beta = 0$ et pour $\beta = 1$, mais

$$8.3^{\beta-1}\left[2 + (-1)^{\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\Pi$$

pour $\beta > 1$.

Pour les multiples de 4, non de 8, $4.3^\beta m$, ce sera

$$\left[3^{\beta+1} + (-1)^\beta\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[3 - (-1)^{\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\Pi$$

si l'on a $\beta = 0$ ou $\beta = 1$, mais

$$8.3^{\beta-1}\left[3 - (-1)^{\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\Pi$$

si β est > 1.

Enfin, pour les multiples de 8, $2^\alpha 3^\beta m$ avec $\alpha > 2$, je trouve pour la valeur du nombre cherché :

$$3.2^{\alpha-2}\left[3^{\beta+1} + (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\Pi$$

si l'exposant $\beta = 0$ ou $= 1$, mais

$$2^{\alpha+1}3^\beta\,\Pi$$

si l'on a $\beta > 1$.