JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 + 8T^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 9-12.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__9_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

SUR LA FORME
$X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 + 8T^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier n, pair ou impair, on demande le nombre N des représentations de n par la forme

$$X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 + 8T^2,$$

c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation indéterminée

$$n = X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 + 8T^2,$$

où X, Y, Z, T sont des entiers positifs, nuls ou négatifs.

Nous poserons

$$n = 2^\alpha m,$$

m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro. On va voir que pour la forme actuelle

$$X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 + 8T^2,$$

comme pour la forme

$$X^2 + 8(Y^2 + Z^2 + T^2)$$

considérée dans l'article précédent, tout dépend de la fonction $\omega_1(m)$ définie (au moyen des diviseurs conjugués d, δ de m) par l'équation

$$\omega_1(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} d.$$

Mais, pour comprendre nos démonstrations, il ne suffira pas de se rappeler ce que nous avons dit (dans le cahier de juillet 1861) au sujet des deux formes

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2, \quad x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2):$$

on devra y joindre ce que nous avons ajouté (dans le cahier de septembre 1861) concernant la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 8t^2.$$

2. Soit d'abord n impair, $n = m$. L'équation

$$4g + 3 = X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 + 8T^2$$

est évidemment impossible en nombres entiers. Pour $m = 4g + 3$, on a donc $N = 0$. Mais si l'on prend

$$m = 4g + 1,$$

on aura

$$N = 2\omega_1(m);$$

car l'équation

$$m = 4g + 1 = X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 + 8T^2$$

ne diffère de l'équation

$$m = 4g + 1 = x^2 + y^2 + z^2 + 8t^2,$$

qui a $6\omega_1(m)$ solutions, et où deux des trois carrés x^2, y^2, z^2 ne peuvent manquer d'être pairs, qu'en ce que la place du carré impair s'y trouve assignée d'avance, ce qui réduit au tiers le nombre des solutions.

Pour n impairement pair, $n = 2m$, on a de nouveau

$$N = 0.$$

Mais pour n pairement pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 1$, le nombre N des solutions de notre équation

$$2^\alpha m = X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 + 8T^2$$

est évidemment le même que pour l'équation (traitée dans le cahier de juillet 1861)

$$2^{\alpha-2}m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2.$$

Dans ce cas de $\alpha > 1$, on a donc

$$N = 2(2^\alpha - 1)\,\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$N = 2(2^\alpha + 1)\,\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$.

Ces deux valeurs de N sont comprises au surplus dans la formule unique

$$N = 2\left[2^\alpha - (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\right]\omega_1(m),$$

ainsi qu'on le verra facilement.

3. Nous venons de trouver le nombre complet des solutions, tant propres qu'impropres, de l'équation

$$n = X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 + 8T^2.$$

Mais on peut aussi demander séparément le nombre M des solutions propres, pour lesquelles aucun entier > 1 ne divise à la fois X, Y, Z, T. Il faut alors substituer à la fonction $\omega_1(m)$ la fonction $O_1(m)$, indiquée dans l'article précédent, et définie au moyen de la décomposition de m en facteurs premiers,

$$m = \prod(p^\mu),$$

par l'équation

$$O_1(m) = \prod\left[p^\mu + (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\mu-1}\right].$$

Cette fonction $O_1(m)$ avait du reste été déjà employée pour un usage semblable dans le cahier de septembre 1861, où elle est désignée par la simple lettre R. Voici comment elle détermine M pour l'équation

$$n = X^2 + 4Y^2 + 4Z^2 + 8T^2$$

qui nous occupe à présent.

1° Pour n impair, $n = m$, on a

$$M = 0$$

quand $m = 4g + 3$, mais

$$N = 2O_1(m)$$

quand $m = 4g + 1$.

2° Pour n impairement pair, $n = 2m$, on a

$$M = 0.$$

3° Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$M = 4O_1(m)$$

quand $m = 8k + 1$, mais

$$M = 6O_1(m)$$

quand $m = 8k - 1$,

$$M = 8O_1(m)$$

quand $m = 8k - 3$, enfin

$$M = 10O_1(m)$$

quand $m = 8k + 3$.

4° Pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, on a

$$M = 14O_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$M = 18O_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$.

5° Enfin pour n divisible par 16, que le quotient soit pair ou impair, c'est-à-dire pour $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 3$, on a

$$M = 3.2^{\alpha-1}O_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.