JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAXIMILIEN MARIE

Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires; quatrième partie. Des angles imaginaires et de la courbure des courbes et surfaces imaginaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 81-98.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__81_0>

NOUVELLE THÉORIE

DES

FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES;

PAR M. MAXIMILIEN MARIE,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

QUATRIÈME PARTIE.

DES ANGLES IMAGINAIRES ET DE LA COURBURE DES COURBES ET SURFACES IMAGINAIRES.

(Suite.)

CHAPITRE X.

Des angles imaginaires au centre du cercle réel et des triangles imaginaires définis par des données réelles.

147. *Construction d'un angle imaginaire sans partie réelle, dont on donne les lignes trigonométriques.* — L'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} dx\sqrt{a^2 - x^2}$$

représente l'aire du demi-segment intercepté dans le cercle $y^2+x^2=a^2$ par les ordonnées menées à des distances x_0 et x du centre; la même aire est aussi représentée par

$$\frac{1}{2}a^2\left(\arc\cos\frac{x_0}{a} - \arc\cos\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{x_0}{2}\sqrt{a^2-x_0^2},$$

de sorte que

$$\int_{x_0}^{x} dx\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{1}{2}a^2\left(\text{arc cos}\frac{x_0}{a} - \text{arc cos}\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{x_0}{2}\sqrt{a^2-x_0^2}.$$

Si l'aire mesurée est limitée à droite par la tangente $x = a$, l'égalité précédente devient

$$\int_{x_0}^{a} dx\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a^2}{2}\text{arc cos}\frac{x_0}{a} - \frac{x_0}{2}\sqrt{a^2 - x_0^2}$$

ou bien

$$\int_{a}^{x} dx\sqrt{a^2 - x^2} = -\frac{a^2}{2}\text{arc cos}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Si x devient plus grand que a, cette égalité peut s'écrire

$$\sqrt{-1}\int_{a}^{x} dx\sqrt{x^2 - a^2} = -\frac{a^2}{2}\text{arc cos}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{-1}\sqrt{x^2 - a^2}$$

ou bien

$$\int_{a}^{x} dx\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{a^2\sqrt{-1}}{2}\text{arc cos}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Mais $\int_{a}^{x} dx\sqrt{x^2 - a^2}$ représente l'aire du demi-segment intercepté dans l'hyperbole équilatère

$$y^2 - x^2 = -a^2,$$

entre le sommet de cette courbe et l'ordonnée menée à la distance x du centre; l'aire de ce segment est donc

$$\frac{a^2\sqrt{-1}}{2}\text{arc cos}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2};$$

d'un autre côté, l'aire du triangle compris entre l'axe des x, l'ordonnée de l'hyperbole menée à la distance x de l'origine et le rayon mené du centre au point $[x, y]$ de la courbe est

$$\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2};$$

par conséquent le secteur hyperbolique, compris entre les rayons dirigés au sommet et au point $[x, y]$, étant la différence du triangle et du segment, son aire sera

$$-\frac{a^2\sqrt{-1}}{2}\arccos\frac{x}{a}.$$

En désignant donc par ψ le rapport de l'aire de ce secteur à celle du carré construit sur le rayon a comme diagonale, on pourra écrire

$$-\frac{a^2\sqrt{-1}}{2}\arccos\frac{x}{a} = \frac{a^2}{2}\psi,$$

ou

$$\arccos\frac{x}{a} = \psi\sqrt{-1}.$$

Ainsi la valeur absolue de l'angle imaginaire, sans partie réelle, dont le cosinus est une quantité réelle $\frac{x}{a}$, plus grande que 1, est le rapport à $\frac{a^2}{2}$ ou au carré construit sur a comme diagonale, du secteur intercepté dans l'hyperbole équilatère

$$y^2 - x^2 = -a^2,$$

entre l'axe transverse, la courbe et le rayon mené au point dont l'abscisse est x.

Lorsque a et x varieront proportionnellement, le rapport des aires du secteur hyperbolique et du carré $\frac{a^2}{2}$ restera constant, en sorte que l'angle imaginaire $\psi\sqrt{-1}$ ne variera pas; d'ailleurs, x et y se trouvant multipliés par un même nombre, l'angle réel formé, avec l'axe transverse, par le rayon de l'hyperbole, mené au point $[x, y]$, conservera aussi la même ouverture. L'angle réel et l'angle imaginaire dépendant donc l'un de l'autre, ils pourront être figurés l'un par l'autre.

148. Pour résumer ce qui précède, et le compléter de manière à définir à la fois les six lignes trigonométriques d'un angle formé d'une seule partie réelle ou imaginaire, c'est-à-dire ayant l'une ou l'autre des formes φ ou $\psi\sqrt{-1}$, nous dirons :

Si dans l'équation

$$y^2 + x^2 = 1$$

on donne à x une valeur réelle quelconque et qu'on prenne la valeur correspondante de y, réelle ou imaginaire, x et y seront le cosinus et le sinus de l'angle réel, ou imaginaire sans partie réelle, dont la valeur absolue serait le double de la mesure du secteur circulaire ou hyperbolique intercepté entre l'axe des x et le rayon mené au point $[x, y]$; $\frac{y}{x}$ sera la tangente de cet angle, $\frac{x}{y}$ en sera la cotangente, $\frac{1}{x}$ la sécante et $\frac{1}{y}$ la cosécante.

Le cosinus et la sécante d'un angle imaginaire sans partie réelle seront réels; le sinus, la tangente, la cotangente et la cosécante seront imaginaires, mais n'auront pas de parties réelles [*].

149. *Construction d'un angle en partie réel, en partie imaginaire, dont les lignes trigonométriques sont données.* — Si dans l'équation

$$y^2 + x^2 = 1$$

on attribue à x une valeur imaginaire $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, et qu'on tire la valeur correspondante de y, $\alpha' + \beta C\sqrt{-1}$, $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $\alpha' + \beta C\sqrt{-1}$ seront le cosinus et le sinus d'un angle en partie réel, en partie imaginaire, $\varphi + \psi\sqrt{-1}$: les deux parties φ et ψ de cet angle s'obtiendront aisément par la règle suivante.

---

[*] Tous les faits que nous venons de rapporter étaient connus depuis la fin du dernier siècle. Mais la découverte en était restée stérile, jusqu'ici, parce qu'elle avait été entièrement fortuite.

Le point $[x, y]$ appartenant à la conjuguée C du cercle, si l'on joint le centre à ce point, au point où la conjuguée C touche la courbe réelle, enfin à l'origine de tous les angles, c'est-à-dire à l'extrémité droite du diamètre du cercle couché sur l'axe des x, les trois rayons ainsi menés intercepteront un secteur circulaire et un secteur hyperbolique : φ sera le double de la mesure du secteur circulaire et ψ le double de la mesure du secteur hyperbolique.

En effet, si l'on fait tourner les axes de l'angle dont la tangente est $-\frac{1}{C}$, de manière à amener l'axe des x en coïncidence avec le rayon mené au point de contact de la circonférence et de la branche de la conjuguée C, sur laquelle se trouve le point $[x, y]$, la nouvelle abscisse x' du même point $[x, y]$ sera réelle et son ordonnée y' imaginaire sans partie réelle; l'angle du rayon mené au point $[x', y']$ avec le nouvel axe des x sera donc imaginaire sans partie réelle; d'un autre côté, sa valeur algébrique sera

$$\varphi + \psi\sqrt{-1} - \text{arc tang}\left(-\frac{1}{C}\right);$$

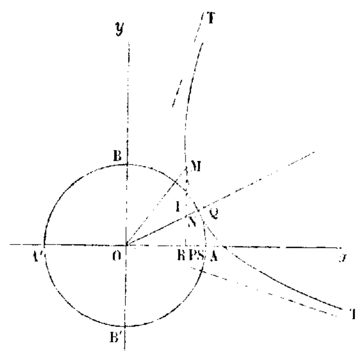
l'angle φ ne différait donc pas de arc tang$\left(-\frac{1}{C}\right)$, c'est-à-dire que sa mesure était bien le double de la mesure du secteur circulaire.

Quant à $\psi\sqrt{-1}$, sa tangente $\frac{y'}{x'}$ étant aussi celle du double du secteur hyperbolique, le double de ce secteur et l'angle ψ ne feront donc qu'un.

On pourrait donner de ce théorème la démonstration suivante qui, sans rien ajouter à l'évidence des faits, présente cependant une analogie assez remarquable avec la démonstration la plus usuelle des théorèmes relatifs à l'addition des arcs réels, pour mériter d'être consignée.

Soient M (*fig.* 10) un point quelconque d'une conjuguée TNT′ du cercle OA, dont le rayon sera pris pour unité, N le point de contact des deux courbes, φ le double de l'aire du secteur circulaire AON, ψ le double de l'aire du secteur hyperbolique NOM, enfin x et y les coordonnées imaginaires du point M : on sait que les parties réelles de x et de y seront les coordonnées du milieu Q de la corde réelle de la conjuguée, menée par le point M, c'est-à-dire OS et SQ, et que leurs parties imaginaires seront les différences des coordonnées des points Q et M,

Fig. 10.



c'est-à-dire $-$ QI et IM, de sorte que

$$x = \mathrm{OS} - \mathrm{QI}\sqrt{-1}$$

et

$$y = \mathrm{SQ} + \mathrm{IM}\sqrt{-1}.$$

Cela posé, comme

$$\mathrm{NP} = \sin\varphi, \quad \mathrm{OP} = \cos\varphi, \quad \mathrm{MQ}\sqrt{-1} = \sin\psi\sqrt{-1},$$

enfin

$$\mathrm{OQ} = \cos\psi\sqrt{-1},$$

les triangles semblables OQS et ONP d'une part, OQS et MQI de l'autre donneront

$$\mathrm{OS} = \cos\varphi\cos(\psi\sqrt{-1}), \quad \mathrm{QI} = \frac{\sin\varphi\sin(\psi\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}},$$

$$\mathrm{QS} = \sin\varphi\cos(\psi\sqrt{-1}), \quad \mathrm{IM} = \frac{\cos\varphi\sin(\psi\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}},$$

d'où

$$x = \cos\varphi\cos(\psi\sqrt{-1}) - \sin\varphi\sin(\psi\sqrt{-1}) = \cos(\varphi + \psi\sqrt{-1})$$

et

$$y = \sin\varphi \cos(\psi\sqrt{-1}) + \cos\varphi \sin(\psi\sqrt{-1}) = \sin(\varphi + \psi\sqrt{-1}).$$

La règle à suivre pour construire l'angle imaginaire dont on donne le sinus ou le cosinus, ou toute autre ligne trigonométrique, se déduit immédiatement de ce qu'on vient de voir.

La droite qui va du centre au point dont les coordonnées sont les parties réelles du sinus et du cosinus donnés, fait avec le diamètre origine un angle égal à la partie réelle de l'angle cherché, et le point de rencontre de cette droite avec la circonférence est le sommet de l'arc d'hyperbole qui doit servir de base au secteur dont l'aire doublée sera la partie imaginaire de l'angle cherché; enfin les parties imaginaires du sinus et du cosinus donnés, ajoutées aux parties réelles des mêmes lignes, fourniront les coordonnées de la seconde extrémité de l'arc hyperbolique en question.

La partie imaginaire $\psi\sqrt{-1}$ de l'angle $\varphi + \psi\sqrt{-1}$ se compte comme la partie réelle de droite à gauche ou de gauche à droite, selon qu'elle est positive ou négative. De sorte que les deux angles $\varphi + \psi\sqrt{-1}$ et $\varphi - \psi\sqrt{-1}$ sont les inclinaisons, sur l'axe des x, des rayons menés aux extrémités d'une même corde réelle de la conjuguée dont l'axe transverse fait avec l'axe des x l'angle réel φ, ou dont la caractéristique est $-\frac{1}{\operatorname{tang}\varphi}$.

On retrouve aisément sur la figure les formules analytiques des angles qui correspondent à une ligne trigonométrique donnée. Ainsi à un sinus y correspondent, en vertu de l'équation

$$y^2 + x^2 = 1,$$

deux cosinus x égaux et de signes contraires; or la partie réelle de x changeant de signe, l'angle φ, d'après la règle énoncée, se change en $\pi - \varphi$; d'un autre côté, la partie imaginaire de x changeant de signe en même temps que la partie réelle, $\psi\sqrt{-1}$ se trouve changé en $-\psi\sqrt{-1}$, de sorte que l'angle devient

$$\pi - \varphi - \psi\sqrt{-1}$$

ou

$$\pi - (\varphi + \psi\sqrt{-1}).$$

Ainsi tous les angles qui répondent à un même sinus sont donnés par les formules

$$2K\pi + (\varphi + \psi\sqrt{-1})$$

et

$$(2K+1)\pi - (\varphi + \psi\sqrt{-1}).$$

Le mode de représentation que nous proposons pour les angles imaginaires est donc aussi fidèle que propre à faire image.

La formule

$$\cos\frac{1}{2}(\psi\sqrt{-1}) = \sqrt{\frac{1+\cos(\psi\sqrt{-1})}{2}}$$

fournit une construction simple de la bissectrice du secteur hyperbolique. De même la formule qui donne $\cos(m\psi\sqrt{-1})$ en fonction de $\cos(\psi\sqrt{-1})$ pourrait être employée à la répétition d'un secteur hyperbolique. Mais il est important d'observer que, bien que dans l'addition des angles imaginaires les secteurs imaginaires se comptent les uns à la suite des autres, cependant le secteur hyperbolique propre à figurer un angle imaginaire $\psi\sqrt{-1}$, considéré isolément, ne peut jamais être compté à partir d'un rayon incliné sur l'axe transverse de l'hyperbole à laquelle ce secteur doit appartenir; l'origine de l'arc d'hyperbole qui correspond à un angle imaginaire isolé est toujours l'un des sommets de cette hyperbole.

La tangente d'un angle imaginaire sans partie réelle ne peut croître que de $-\sqrt{-1}$ à $+\sqrt{-1}$, lorsque l'angle lui-même croît de $-\infty\sqrt{-1}$ à $+\infty\sqrt{-1}$. L'inclinaison réelle qui correspond à un angle imaginaire $\pm\infty\sqrt{-1}$ n'est que de $\pm\frac{\pi}{4}$ ou $\pm 45°$.

L'inclinaison réelle μ correspondante à un angle imaginaire $\psi\sqrt{-1}$ serait fournie par l'équation

$$\operatorname{tang}(\psi\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\operatorname{tang}\mu,$$

qui donne

$$\frac{e^{-\psi} - e^{\psi}}{e^{-\psi} + e^{\psi}} = \sqrt{-1}\,\frac{e^{\mu\sqrt{-1}} - e^{-\mu\sqrt{-1}}}{e^{\mu\sqrt{-1}} + e^{-\mu\sqrt{-1}}},$$

d'où l'on tirerait facilement μ en fonction de ψ.

Mais le but que nous nous proposons est de faire intervenir directement l'angle imaginaire dans la solution de toutes les questions qui en exigent l'emploi, sans retourner jamais à l'angle réel correspondant.

150. *Des triangles imaginaires en général.* — La manière la plus convenable, parce qu'elle est la plus générale, de définir un triangle quelconque, réel ou imaginaire, est de donner les coordonnées de ses trois sommets.

$[x', y']$, $[x'', y'']$, $[x''', y''']$ désignant les coordonnées des trois sommets d'un triangle rapporté à des axes quelconques, faisant entre eux un angle θ, les mesures des côtés de ce triangle seront pour nous, par définition,

$$\sqrt{(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2 + 2(x'-x'')(y'-y'')\cos\theta},$$

$$\sqrt{(x'-x''')^2 + (y'-y''')^2 + 2(x'-x''')(y'-y''')\cos\theta}$$

et

$$\sqrt{(x''-x''')^2 + (y''-y''')^2 + 2(x''-x''')(y''-y''')\cos\theta};$$

les angles de ce triangle pourront être fournis, par exemple, par les formules

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

qu'on pourrait remplacer, en tout ou en partie, et à volonté, par

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

ou toutes autres formules qui s'en déduiraient.

La surface sera

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

et de même, tous autres éléments constitutifs du triangle, tels que hauteurs, bissectrices, médianes, etc., seront fournis par les mêmes équations qui les donneraient dans un triangle réel.

La question ne consistera donc pas dans la détermination des éléments inconnus d'un triangle suffisamment défini, ou dans la résolution analytique de ce triangle, puisqu'elle se bornerait dès lors à la répétition de calculs déjà faits dans l'hypothèse de triangles réels : elle sera de donner à chacune des équations qui devraient entrer dans le calcul un sens précis et intelligible, qui fournisse l'expression de la condition graphique, correspondante, à laquelle devraient satisfaire les inconnues; de manière qu'il suffise ensuite de rapprocher les trois conditions propres à chaque groupe de données pour en déduire la règle à suivre dans la construction effective du triangle inconnu.

131. Mais la question même supposant la démonstration préalable de l'identité permanente du triangle et de ses éléments, nous devons d'abord établir cette identité.

Or, en premier lieu, si les axes viennent à changer d'une manière quelconque, les coordonnées nouvelles des trois sommets du triangle, tirées des formules vulgaires de transformation, fourniront toujours, on le sait, les trois mêmes points du plan; ce qui suffit pour établir l'identité graphique du triangle imaginaire, aussi bien que réel.

D'un autre côté, aucune transformation de coordonnées ne pourra jamais altérer les expressions algébriques ni des côtés, ni des angles, ni de la surface, ni de tous autres éléments du triangle, quelles que soient les données qui le déterminent.

Parce que d'abord l'identité de la chose, qui va de soi quand cette chose est réelle, entraîne nécessairement l'identité analytique de la formule, qui la représente, dans un mode quelconque; et qu'il suffit d'ailleurs de savoir que cette identité analytique subsiste pour toutes les valeurs réelles des variables contenues dans la formule, pour pouvoir affirmer qu'elle ne serait pas troublée par l'attribution à ces variables de valeurs imaginaires.

Il résulte de ce qui vient d'être dit que, quel que soit le triangle que nous ayons à étudier, nous pourrons toujours choisir les axes à volonté, sans risquer d'altérer la question en quoi que ce soit.

152. Comme nous l'avons dit précédemment, la définition des éléments inconnus d'un triangle imaginaire se trouve dans les formules mêmes qui doivent fournir ces éléments et qui les donneraient dans le cas analogue d'un triangle réel; il est donc bien entendu que ce sera toujours de ces formules qu'il faudra se servir pour résoudre le triangle proposé, mais l'usage à en faire doit être réglé par une restriction indispensable.

La plupart des formules de trigonométrie rectiligne attribuent en effet le double signe $\pm$ à toutes les inconnues qu'on en veut tirer. L'espèce d'ambiguïté qui en résulte ne présente aucun inconvénient lorsque le triangle doit être réel; mais elle subsisterait d'une manière fâcheuse dans le cas d'un triangle imaginaire, si l'on ne prenait soin de définir plus exactement cette figure.

De quelques formules qu'on se soit servi pour résoudre un triangle, il conviendra toujours de soumettre les résultats à la condition de vérifier les formules

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

$$A + B + C = \pi.$$

Si l'indétermination n'est pas alors complétement levée, elle n'affectera pas du moins chacun des éléments en particulier : elle portera sur tout le triangle.

En effet, si d'abord on donne deux angles et un côté, dans ce cas la condition $A + B + C = \pi$ déterminera le troisième angle sans ambiguïté; dès lors les numérateurs des rapports

$$\frac{\sin A}{a}, \quad \frac{\sin B}{b} \quad \text{et} \quad \frac{\sin C}{c}$$

étant connus ainsi que l'un des trois dénominateurs, les deux autres seront absolument déterminés.

Si l'on donne deux côtés et l'angle compris, on connaîtra la somme des deux autres angles, et, à la vérité, on pourra partager cette somme d'une infinité de manières en parties dont les sinus soient proportionnels aux deux côtés donnés, mais ce ne pourra être qu'en ajoutant un multiple quelconque de π à l'un des angles inconnus et retranchant le même multiple à l'autre. Quant au troisième côté, il changera de signe ou reprendra son signe primitif, selon que l'on aura ajouté à l'un des angles inconnus et retranché à l'autre un multiple impair ou pair de π.

Si l'on donne deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, les deux termes d'un même rapport étant déterminés, ainsi que le dénominateur d'un second rapport, le numérateur de ce second rapport sera complétement déterminé, mais les deux angles inconnus pourront encore être l'un augmenté, l'autre diminué d'un même multiple de π : par suite le troisième côté pourra changer de signe.

Enfin si l'on donne les trois côtés, pour que les égalités

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

$$A + B + C = \pi,$$

restassent satisfaites, on ne pourrait qu'augmenter l'un des trois angles d'un multiple de 2π, en diminuant les deux autres d'autres multiples de 2π qui formassent la même somme.

133. Les observations que nous venons de présenter conviennent à toutes les hypothèses; mais nous nous bornerons ici à étudier le cas où les triangles en question, bien qu'imaginaires, seraient définis par des données réelles.

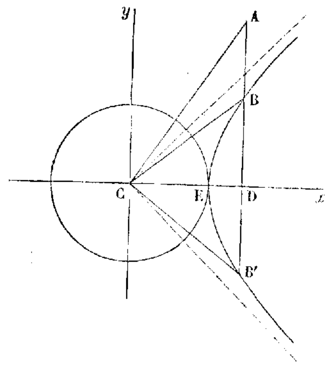
134. Les deux premiers cas où l'on donne soit un côté et les deux angles adjacents, soit deux côtés et l'angle compris, ne pouvant alors fournir de valeurs imaginaires pour les autres éléments du triangle, nous n'aurons pas pour le moment à nous en occuper.

Dans le troisième cas où l'on donne deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, le triangle peut être imaginaire.

Soient CAD (*fig.* 11) l'angle donné, $AC = b$ celui des côtés donnés qui doit être adjacent à l'angle A, CD la perpendiculaire abaissée de C sur AB, enfin $CE = a$ celui des côtés donnés qui doit être opposé à l'angle A.

Le côté CE, qui doit être opposé à l'angle A, étant moindre que la

Fig. 11.



perpendiculaire CD, le triangle sera impossible.

Les formules

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

et

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$$

donnent

$$c = b\cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2\sin A}$$

et

$$\sin C = \frac{b}{a}\sin A\cos A \pm \sin A\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2 A}:$$

sinC étant composé d'une partie réelle et d'une partie imaginaire, il en sera de même de C. Nous commencerons par déterminer la partie réelle de C. Pour cela, nous retrancherons de cet angle un angle réel φ tel, que $\sin(C - \varphi)$ n'ait plus de partie réelle :

$$\sin(C - \varphi) = \sin C\cos\varphi - \cos C\sin\varphi;$$

pour abréger le calcul, nous tirerons cosC de la formule

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

qui, en y remplaçant c par sa valeur, donne

$$\cos C = \frac{b}{a}\sin^2 A \mp \cos A \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2 A}.$$

En substituant les valeurs de $\sin C$ et de $\cos C$, on trouve

$$\sin(C - \varphi) = \frac{b}{a}\sin A \cos A \cos\varphi - \frac{b}{a}\sin^2 A \sin\varphi$$
$$\pm \sqrt{-1}\,(\sin A \cos\varphi + \cos A \sin\varphi)\sqrt{\frac{b^2}{a^2}\sin^2 A - 1}:$$

la condition qui détermine φ est donc

$$\frac{b}{a}\sin A\,(\cos A \cos\varphi - \sin A \sin\varphi) = 0,$$

qui donne

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - A.$$

Ainsi la partie réelle de C est $\frac{\pi}{2} - A$; quant à la partie imaginaire $\psi\sqrt{-1}$, elle est donnée par l'équation

$$\sin\psi\sqrt{-1} = \sin(C - \varphi) = \pm\sqrt{-1}\sqrt{\frac{b^2}{a^2}\sin^2 A - 1}.$$

L'interprétation de ces résultats est facile à former : La circonférence décrite du point C comme centre, avec a pour rayon, ne coupant plus la droite AB, elle a été suppléée par celle des hyperboles équilatères, de même centre et de même rayon, qui pouvait, comme la circonférence, couper AB en deux points symétriquement placés par rapport à D, c'est-à-dire par l'hyperbole ayant son sommet en E; de telle sorte que cette hyperbole coupant AB en B et B', le troisième sommet du triangle est B ou B', le troisième côté C est $AD \pm DB\sqrt{-1}$, l'angle C est

$$\widehat{ACD} \pm 2\,\frac{\text{secteur CEB}}{a^2}\sqrt{-1},$$

et enfin l'angle B est

$$\pi - \widehat{ACD} \mp 2\,\frac{\text{secteur CEB}}{a^2}\sqrt{-1}.$$

En effet, si nous prenons pour axe des x la droite CD et pour axe des y une perpendiculaire à CD, au point C, l'équation de l'hyperbole dont il s'agit sera

$$y^2 - x^2 = -a^2,$$

d'un autre côté, l'équation de AB sera

$$x = b\sin A,$$

BD sera donc égal à $\sqrt{b^2\sin^2 A - a^2}$; ainsi, puisque

$$c = b\cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2\sin^2 A},$$

sa valeur est bien $AD \pm BD\sqrt{-1}$; quant à l'angle C, nous avons déjà vu qu'il a pour partie réelle ACD, et que le sinus de sa partie imaginaire est $\pm\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2 A}$, ou $\frac{DB}{a}\sqrt{-1}$: mais $\frac{DB}{a}\sqrt{-1}$ est aussi le sinus de $2\,\frac{\text{secteur CEB}}{a^2}\sqrt{-1}$; par conséquent

$$C = \widehat{ACD} \pm 2\,\frac{\text{secteur CEB}}{a^2}\sqrt{-1}.$$

La surface du triangle considéré, donnée par la formule

$$\frac{bc}{2}\sin A,$$

est évidemment

$$ACD \pm DCB\sqrt{-1}.$$

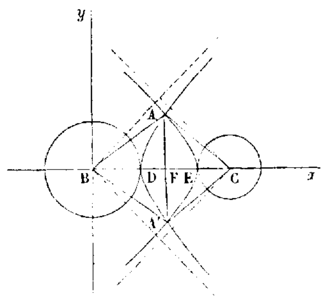
En sorte que si, dans l'expression analytique de cette surface, on remplace $\sqrt{-1}$ par 1, il reste l'expression de la surface du même triangle supposé réel.

155. Supposons maintenant qu'on donne les trois côtés d'un triangle et que l'un d'eux se trouve plus grand que la somme des autres

$$a > b + c.$$

Soient (*fig.* 12) $BC = a$, $BD = c$, $CE = b$. Les deux circonférences décrites des points B et C comme centres avec c et b pour rayons ne se

FIG. 12.



coupant plus, seront suppléées par celles de leurs conjuguées hyperboliques qui peuvent se couper en deux points symétriquement placés par rapport à BC.

En effet, les formules donnent

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

et

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}:$$

or on va voir que ces quantités sont bien les rapports $\frac{BF}{BD}$ et $\frac{CF}{CE}$, c'est-à-dire les cosinus des angles

$$2\,\frac{\text{secteur BDA}}{c^2}\sqrt{-1}$$

et

$$2\,\frac{\text{secteur CEA}}{b^2}\sqrt{-1}.$$

En effet, si l'on prend BC pour axe des x et pour axe des y la perpendiculaire à BC élevée au point B, les équations des deux hyperboles seront

$$y^2 - x^2 = - c^2$$

et

$$y^2 - (x-a)^2 = - b^2,$$

en sorte que l'abscisse du point de rencontre, ou BF, sera

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a},$$

et que, par suite, $\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{BD}}$ sera

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

d'un autre côté,

$$\mathrm{CF} = a - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a},$$

et ainsi

$$\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CE}} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Le triangle imaginaire cherché est donc bien BAC; les angles B et C sont

$$2\,\frac{\text{secteur BDA}}{c^2}\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad 2\,\frac{\text{secteur CE}a}{b^2}\sqrt{-1},$$

et l'angle $\mathrm{A} = \pi - \mathrm{B} - \mathrm{C}$.

Quant à l'expression analytique de la surface de ce triangle, elle est

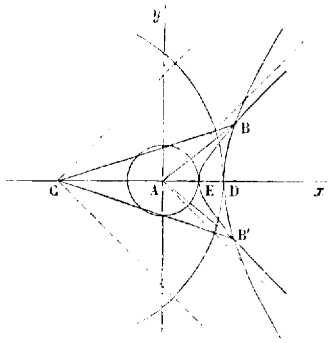
$$\frac{ac\sin \mathrm{B}}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{ac}{2}\,\frac{\mathrm{AF}\sqrt{-1}}{c} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{2}\cdot \mathrm{AF}.\sqrt{-1},$$

et si l'on y remplace $\sqrt{-1}$ par 1, elle donne la surface du même triangle supposé réel.

Si l'on avait pris pour base des constructions l'un des petits côtés, b par exemple, l'interprétation des résultats du calcul se serait faite de la même manière.

Si (*fig.* 13), $AC = b$, $CD = a$, $AE = c$, les deux circonférences dé-

Fig. 13.



crites des points A et C comme centres avec c et a pour rayons seront suppléées par les hyperboles équilatères BEB′, BDB′ et le troisième sommet du triangle sera en B ou en B′.