JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 16(y^2 + z^2 + t^2)$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 77-80.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__77_0>

SUR LA FORME
$x^2 + 16(y^2 + z^2 + t^2)$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier n pair ou impair (que nous représenterons par $2^\alpha m$, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro), on demande le nombre N des représentations de n par la forme

$$x^2 + 16(y^2 + z^2 + t^2),$$

c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 16(y^2 + z^2 + t^2),$$

où x, y, z sont des entiers positifs, nuls ou négatifs.

Il est bien clair que l'on aura $N = 0$ si n est impair et de la forme $4l + 3$ ou $8k + 5$: on aura aussi $N = 0$ si n est impairement pair ou le produit de 8 par un entier impair, et encore si $n = 4(4l + 3)$. Mais dans tous les autres cas la valeur de N sera > 0 et se calculera comme on va l'expliquer.

2. Soit d'abord n impair, $n = m = 8k + 1$. On formera en premier lieu la somme $\zeta_1(m)$ des diviseurs de m; puis posant l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où i désigne un entier impair *positif*, tandis que l'entier s (qui est pair à cause de $m = 8k + 1$) doit être pris, quand il n'est pas nul, avec le double signe $\pm$, on cherchera cette seconde somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

relative à toutes les valeurs de i. Cela posé, on aura

$$N = \frac{1}{2}\left[\zeta_1(m) + 3\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right].$$

La somme

$$\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

pouvant être négative, on peut se demander si la valeur de N que je viens d'écrire donne toujours $N > 0$. Mais un raisonnement très-simple lève cette difficulté; car la somme

$$\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

ne peut avoir une valeur différente de zéro qu'autant que l'on a au moins une équation de la forme

$$m = i^2 + 4s^2,$$

ou plutôt de la forme

$$m = i^2 + 16\nu^2,$$

puisque s doit être pair à cause de $m = 8k + 1$. Or une telle équation entraîne celle-ci :

$$m = (\pm i)^2 + 16(\nu^2 + 0^2 + 0^2)$$

qui, si $\nu = 0$, donne deux représentations du genre de celles qui nous occupent, et qui en donnerait douze (en affectant ν du double signe et permutant) si ν n'est pas zéro. On a donc toujours au moins $N = 2$.

Ce mode de raisonnement (que nous aurons souvent à employer dans le cours de nos recherches) mérite d'être remarqué. Nous aurions pu en faire usage à l'occasion d'une question analogue dans le cahier de novembre 1861; mais le procédé dont nous nous sommes servis alors a aussi ses avantages.

3. Appliquons la formule

$$N = \frac{1}{2}\left[\zeta_1(m) + 3\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right]$$

à quelques entiers impairs $8k+1$.

Soit d'abord $m = 1 = 1^2 + 4.0^2$, d'où

$$N = \frac{1}{2}(1+3) = 2.$$

Cette valeur de N s'accorde avec la double équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 16(0^2 + 0^2 + 0^2).$$

Soit ensuite $m = 9 = 3^2 + 4.0^2$. Ayant cette fois

$$\zeta_1(m) = 13, \quad \sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i = -3,$$

on en conclura

$$N = \frac{1}{2}(13 - 9) = 2,$$

et en effet 9 a deux représentations contenues dans l'équation

$$9 = (\pm 3)^2 + 16(0^2 + 0^2 + 0^2).$$

Soit encore $m = 17 = 1^2 + 4(\pm 2)^2$. Il viendra

$$\zeta_1(m) = 18, \quad \sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i = 2,$$

partant

$$N = \frac{1}{2}(18 + 6) = 12.$$

Or 17 a en effet douze représentations que l'équation

$$17 = (\pm 1)^2 + 16[(\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2]$$

fournit en effectuant sous la parenthèse les permutations convenables.

Soit enfin $m = 25$, ce qui donne lieu aux équations

$$m = 5^2 + 4.0^2, \quad m = 3^2 + 4(\pm 2)^2.$$

Il viendra

$$\zeta_1(m) = 31, \quad \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i = -1,$$

partant

$$N = \frac{1}{2}(31 - 3) = 14.$$

Or 25 a en effet 14 représentations provenant des décompositions

$$25 = 5^2 + 16(0^2 + 0^2 + 0^2), \qquad 25 = 3^2 + 16(1^2 + 0^2 + 0^2),$$

où l'on donnera le double signe aux racines des carrés qui ne sont pas nuls et où l'on opérera les permutations voulues.

4. Soit à présent n pairement pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 1$. Dans l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 16(y^2 + z^2 + t^2),$$

l'entier x devra être pair. Faisant donc $x = 2x_1$ et divisant par 4, on sera amené à l'équation

$$2^{\alpha-2} m = x_1^2 + 4(y^2 + z^2 + t^2)$$

que nous avons déjà discutée (dans le cahier de décembre 1861). Il en résultera pour notre recherche actuelle les conclusions suivantes :

1° Pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a (comme je l'ai déjà dit) $N = 0$ si $m = 4l + 3$; mais

$$N = 2\zeta_1(m)$$

si $m = 4l + 1$.

2° Pour n divisible par 8, non par 16, $n = 8m$, on a constamment $N = 0$: j'en ai déjà averti.

3° Pour n divisible par 16, non par 32, $n = 16m$, on a

$$N = 8\zeta_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

4° Enfin pour n divisible par 32, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 4$, on a toujours

$$N = 24\zeta_1(m),$$

quelque grand que α puisse devenir.