JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 62-64.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__62_0>

SUR LA FORME
$x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Etant donné un entier n pair ou impair (que nous représenterons par $2^\alpha m$, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro), on demande une règle simple pour calculer le nombre N des représentations de n par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4t^2,$$

c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs. Or on va voir que tout dépend de la fonction $\omega_1(m)$ dont nous avons parlé plusieurs fois déjà, en la définissant au moyen des facteurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$, par la formule

$$\omega_1(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} d.$$

2. Soit d'abord n impair, $n = m$. Je trouve que l'on a

$$\mathrm{N} = 2\omega_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m.

Ainsi, pour $m = 1$, on a $\mathrm{N} = 2$; et c'est ce que confirme l'équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2.$$

Pour $m = 3$, on a $\mathrm{N} = 2\omega_1(3) = 4$. L'équation

$$3 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2$$

confirme ce fait. Pour $m = 5$, il vient $N = 2\omega_1(5) = 8$. Or on a en effet huit représentations fournies par les équations

$$5 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$
$$5 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4(\pm 1)^2.$$

Enfin pour $m = 7$, on a $N = 2\omega_1(m) = 16$; et les deux équations

$$7 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$
$$7 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4(\pm 1)^2$$

donnent, comme il le faut, seize représentations.

3. Soit à présent n pair, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 0$. Alors on a

$$N = 2(2^\alpha - 1)\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$N = 2(2^\alpha + 1)\omega_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$.

Ainsi pour $n = 2$, il viendra $N = 2$, conformément à l'équation

$$2 = 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$

tandis que pour $n = 4$, on aura $N = 6$, comme le montrent en effet les trois équations

$$4 = (\pm 2)^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$4 = 0^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$
$$4 = 0^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4(\pm 1)^2.$$

Pour $n = 6$, on aura $N = 2(2 + 1)\omega_1(3) = 12$. Ce fait est confirmé par les équations ci-après :

$$6 = (\pm 2)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$6 = 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$
$$6 = 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4(\pm 1)^2.$$

Enfin, pour $n = 10$, les équations

$$10 = 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$10 = (\pm 2)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$10 = (\pm 2)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$

vérifient encore nos formules qui donnent $N = 2(2+1)\,\omega_1(5) = 24$.

4. Occupons-nous aussi du nombre M des représentations *propres*, et à cet effet introduisons la fonction $O_1(m)$ définie, au moyen de la décomposition de m en facteurs premiers,

$$m = \prod (p^\mu),$$

par l'équation

$$O_1(m) = \prod \left[p^\mu + (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} p^{\mu-1} \right].$$

Pour n impair, $n = m$, on a

$$M = 2O_1(m),$$

quelle que soit la forme linéaire de m. Pour n impairement pair, $n = 2m$, je trouve au contraire

$$M = 2O_1(m)$$

si $m = 8k \pm 1$, mais

$$M = 6O_1(m)$$

si $m = 8k \pm 3$. De même pour n divisible par 4, non par 8, $n = 4m$, on a

$$M = 4O_1(m) \quad \text{ou} \quad M = 8O_1(m),$$

suivant que $m = 8k \pm 1$ ou $= 8k \pm 3$. Mais pour n divisible par 8, $n = 2^\alpha m$, $\alpha > 2$, la formule unique est

$$M = 3.2^{\alpha-1}.O_1(m).$$