JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 8y^2 + 64\left(z^2 + t^2\right)$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 421-424.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__421_0>

SUR LA FORME
$x^2 + 8y^2 + 64(z^2 + t^2)$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

La détermination du nombre N des représentations d'un entier donné, par la forme

$$x^2 + 8y^2 + 64(z^2 + t^2)$$

est devenue très-facile pour nous quand cet entier est pair. D'abord, s'il est impairement pair, on a évidemment $N = 0$. Et s'il est pairement pair, de façon qu'on puisse le représenter par $2^\alpha m$, m étant impair et $\alpha > 1$, l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 8y^2 + 64(z^2 + t^2)$$

exigera que x soit pair : en remplaçant x par $2x$ et divisant par 4, elle se réduira donc à celle-ci :

$$2^{\alpha-2} m = x^2 + 2y^2 + 16(z^2 + t^2),$$

que nous avons discutée dans le cahier de Mai.

Quant au cas d'un entier impair m, il est visible que l'on a $N = 0$ si m est $\equiv 3, 5$, ou $7 \pmod{8}$. Nous n'avons donc à nous occuper que du cas où $m = 8\mu + 1$; et voici comment alors nous calculerons N.

On cherchera d'abord, pour la valeur donnée de m, la valeur de la fonction $\omega_1(m)$ définie comme d'ordinaire par les équations

$$m = d\delta, \quad \omega_1(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}} d.$$

Mais trois autres fonctions numériques devront être jointes à celle-là.

L'une d'elles se rapporte à l'équation

$$m = r^2 + 2u^2$$

où l'entier r est pris positivement, tandis que l'on admet pour u des valeurs positives ou négatives, et aussi la valeur zéro; c'est

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r.$$

Il faut calculer de même la somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}+\frac{i^2-1}{8}} i,$$

relative à l'équation

$$m = i^2 + 4s^2$$

où i est essentiellement positif, mais s positif, nul ou négatif.

Puisque $m = 8\mu + 1$, il est clair que l'entier s ne peut être que pair dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^2;$$

mais le cas où s est pairement pair donne lieu à une équation nouvelle que j'écrirai ainsi

$$m = q^2 + 64v^2,$$

en supposant toujours q positif, et v positif, nul ou négatif. De là résultera la somme

$$\sum (-1)^{\frac{q-1}{2}+\frac{q^2-1}{8}} q,$$

la dernière dont nous ayons à tenir compte.

La valeur de N est en effet

$$N = \frac{1}{4}\omega_1(m) + \frac{1}{4}\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r + \frac{1}{2}\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}+\frac{i^2-1}{8}} i + \sum (-1)^{\frac{q-1}{2}+\frac{q^2-1}{8}} q,$$

ou, sous forme abrégée,

$$\mathrm{N} = \frac{1}{4}\omega_1(m) + \frac{1}{4}\sum_1 + \frac{1}{2}\sum_2 + \sum_3,$$

en distinguant par des indices nos sommes $\sum$ prises dans l'ordre même où nous les avons introduites.

Ajoutons quelques exemples; et d'abord soit $m = 1$, d'où $\omega_1(m) = 1$. Comme on a

$$1 = 1^2 + 2.0^2 = 1^2 + 4.0^2 = 1^2 + 64.0^2,$$

les trois sommes $\sum$ seront égales à l'unité. De là

$$\mathrm{N} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = 2,$$

valeur exacte comme le prouve l'équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 64(0^2 + 0^2).$$

Soit ensuite $m = 9$, d'où $\omega_1(m) = 7$. Comme on a

$$9 = 3^2 + 2.0^2 = 1^2 + 2(\pm 2)^2,$$

il viendra

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r = -3 + 2.1 = -1.$$

Les équations

$$9 = 3^2 + 4.0^2, \quad 9 = 3^2 + 64.0^2$$

donneront ensuite

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2} + \frac{i^2-1}{8}} i = 3, \quad \sum (-1)^{\frac{q-1}{2} + \frac{q^2-1}{8}} q = 3.$$

De là

$$\mathrm{N} = \frac{7}{4} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 3 = 6,$$

valeur vérifiée par les identités

$$9 = (\pm 3)^2 + 8.0^2 + 64(0^2 + 0^2),$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 8(\pm 1)^2 + 64(0^2 + 0^2),$$

qui fournissent pour l'entier 9 six représentations.

Pour $m = 17 = 3^2 + 2(\pm 2)^2 = 1^2 + 4(\pm 2)^2$, il vient

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r = -6, \quad \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}+\frac{i^2-1}{8}} i = 2.$$

L'équation $17 = q^2 + 64 \varphi^2$ étant impossible, la somme qui s'y rapporte est nulle. Enfin $\omega_1(17) = 18$. Donc

$$N = \frac{18}{4} - \frac{6}{4} + \frac{2}{2} = 4;$$

et en effet on n'a pour 17 que les quatre représentations fournies par

$$17 = (\pm 3)^2 + 8(\pm 1)^2 + 64(0^2 + 0^2).$$

Soit, comme dernier exemple, $m = 65$. L'équation

$$65 = r^2 + 2u^2$$

étant impossible, la somme qui lui correspond sera nulle. Mais les équations

$$65 = 1^2 + 4(\pm 4)^2 = 7^2 + 4(\pm 2)^2$$

et

$$65 = 1^2 + 64(\pm 1)^2$$

donneront

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}+\frac{i^2-1}{8}} i = -12, \quad \sum (-1)^{\frac{q-1}{2}+\frac{q^2-1}{8}} q = 2.$$

D'ailleurs $\omega_1(65) = 48$. De là

$$N = \frac{48}{4} - \frac{12}{2} + 2 = 8.$$

Or l'entier 65 a en effet huit représentations fournies par les identités

$$65 = (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 64[(\pm 1)^2 + 0^2],$$
$$65 = (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 64[0^2 + (\pm 1)^2],$$

et l'on verra sans peine qu'il n'en a pas d'autre, en observant qu'il n'est pas de la forme $x^2 + 8y^2$.