JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HERMITE

Sur la théorie des fonctions elliptiques et ses applications à l'arithmétique; lettre adressée à M. Liouville

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 25-40.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__25_0>

SUR LA

THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

ET SES

APPLICATIONS A L'ARITHMÉTIQUE;

Par M. HERMITE.

LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE.

« Depuis notre dernier entretien sur les questions arithmétiques qui sont l'objet de vos recherches et où vous m'avez donné un nouvel exemple de la grande fécondité des méthodes dont vous conservez le principe, je pense avoir réussi, dans une certaine mesure, à donner satisfaction à un désir que vous m'avez plusieurs fois exprimé relativement aux beaux théorèmes de M. Kronecker sur les nombres de classes de formes quadratiques. Ces théorèmes, qui semblent par leur nature devoir naturellement entrer dans le cercle de vos études sur les fonctions numériques, restaient cependant comme isolés et appartenant à un ordre d'idées très-distinct où la théorie de la multiplication complexe dans les fonctions elliptiques paraissait seule pouvoir donner accès. Les démonstrations du P. Joubert découlent en effet de cette théorie où la notion de classe de formes quadratiques s'offre de la manière la plus nécessaire et joue le rôle le plus important. J'attache à ces démonstrations un grand prix, car elles éclairent et étendent la théorie arithmétique des formes en montrant que les théorèmes donnés il y a si longtemps par M. Gauss sont autant de propriétés des fonctions elliptiques, et elles ajoutent un des plus remarquables exemples de ces liens cachés qui réunissent l'analyse transcendante à l'arithmétique. En parvenant par une autre voie à ces théorèmes de M. Kronecker, c'est à l'ordre d'idées qui vous appartient que je pense les avoir rattachés de la manière la plus directe, et, si je ne me trompe, dans le sens même de vos prévisions, car la notion arithmétique de classe se trouve remplacée par l'idée beaucoup plus simple et plus élémentaire des formes réduites.

» Je suis parti des identités que fournit le développement des quotients de fonctions Θ, en séries simples de sinus ou de cosinus, et dont Jacobi a montré le premier la grande importance en découvrant de cette manière l'expression du nombre des décompositions d'un entier en quatre carrés par la somme des diviseurs de cet entier. Une extension fort simple de ce procédé consiste à considérer, au lieu seulement de $\sin\operatorname{am} z$, $\cos\operatorname{am} z$, $\Delta\operatorname{am} z$, les produits de fonctions doublement périodiques par des puissances de quantités Θ, c'est-à-dire des expressions ayant la période $4K$, et se multipliant par un facteur exponentiel, lorsqu'on ajoute $2iK'$ à la variable.

» En faisant $z = \frac{2Kx}{\pi}$ et posant avec Jacobi

$$\Theta(z) = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots,$$

$$\mathrm{H}(z) = 2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - \ldots,$$

$$\Theta_1(z) = 1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \ldots,$$

$$\mathrm{H}_1(z) = 2\sqrt[4]{q}\cos x + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x + \ldots,$$

de sorte qu'on ait

$$\sin\operatorname{am} z = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\mathrm{H}(z)}{\Theta(z)},\quad \cos\operatorname{am} z = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)},\quad \Delta\operatorname{am} z = \sqrt{k'}\frac{\Theta_1(z)}{\Theta(z)},$$

les plus simples de ces fonctions seront

$$(1)\qquad \frac{\mathrm{H}(z)\Theta_1(z)}{\Theta(z)},\quad \frac{\mathrm{H}_1(z)\Theta_1(z)}{\Theta(z)},\quad \frac{\mathrm{H}(z)\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)},$$

$$(2)\qquad \frac{\mathrm{H}^2(z)}{\Theta(z)},\quad \frac{\mathrm{H}_1^2(z)}{\Theta(z)},\quad \frac{\Theta_1^2(z)}{\Theta(z)}.$$

Si on les développe en séries de sinus et de cosinus, on trouvera pour les premières

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\mathrm{K}}{2\pi}}\,\frac{\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)}{\Theta(z)} &= \sin x \sqrt[4]{q}\\
&+ \sin 3x \sqrt[4]{q^9}\,(1+2q^{-1})\\
&+ \sin 5x \sqrt[4]{q^{25}}\,(1+2q^{-1}+2q^{-4})\\
&+ \sin 7x \sqrt[4]{q^{49}}\,(1+2q^{-1}+2q^{-4}+2q^{-9})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \sin(2n+1)\,x \sqrt[4]{q^{(2n+1)^2}}\,(1+2q^{-1}+2q^{-4}+\ldots+2q^{-n^2}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{k'\mathrm{K}}{2\pi}}\,\frac{\mathrm{H}_1(z)\,\Theta_1(z)}{\Theta(z)} &= \cos x \sqrt[4]{q}\\
&- \cos 3x \sqrt[4]{q^9}\,(1-2q^{-1})\\
&+ \cos 5x \sqrt[4]{q^{25}}\,(1-2q^{-1}+2q^{-4})\\
&- \cos 7x \sqrt[4]{q^{49}}\,(1-2q^{-1}+2q^{-4}-2q^{-9})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ (-1)^n \cos(2n+1)\,x \sqrt[4]{q^{(2n+1)^2}}\begin{bmatrix} 1-2q^{-1}+2q^{-4}-\ldots\\ +2(-1)^n q^{n^2}\end{bmatrix},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{k\mathrm{K}}{2\pi}}\,\frac{\mathrm{H}(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)} &= \sin 2x\, q\,(2\sqrt[4]{q^{-1}})\\
&+ \sin 4x\, q^4\,(2\sqrt[4]{q^{-1}}+2\sqrt[4]{q^{-9}})\\
&+ \sin 6x\, q^9\,(2\sqrt[4]{q^{-1}}+2\sqrt[4]{q^{-9}}+2\sqrt[4]{q^{-25}})\\
&+ \sin 8x\, q^{16}\,(2\sqrt[4]{q^{-1}}+2\sqrt[4]{q^{-9}}+2\sqrt[4]{q^{-25}}+2\sqrt[4]{q^{-49}})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \sin 2nx\, q^{n^2}\,(2\sqrt[4]{q^{-1}}+2\sqrt[4]{q^{-9}}+\ldots+2\sqrt[4]{q^{-(2n-1)^2}}).\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Quant aux secondes, introduisons la fonction suivante :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Z}(x) &= \cos 2x\, q\,(2\sqrt[4]{q^{-1}})\\
&- \cos 4x\, q^4\,(2\sqrt[4]{q^{-1}}-2\sqrt[4]{q^{-9}})\\
&+ \cos 6x\, q^9\,(2\sqrt[4]{q^{-1}}-2\sqrt[4]{q^{-9}}+2\sqrt[4]{q^{-25}})\\
&- \cos 8x\, q^{16}\,(2\sqrt[4]{q^{-1}}-2\sqrt[4]{q^{-9}}+2\sqrt[4]{q^{-25}}-2\sqrt[4]{q^{-49}})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&- (-1)^n \cos 2nx\, q^{n^2}\left[2\sqrt[4]{q^{-1}}-2\sqrt[4]{q^{-9}}+\ldots-2(-1)^n\sqrt[4]{q^{-(2n-1)^2}}\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

et ces constantes, savoir :

$$A = \frac{\sqrt[4]{q^3}}{1-q} - \frac{\sqrt[4]{q^{15}}}{1-q^3} + \frac{\sqrt[4]{q^{35}}}{1-q^5} - \frac{\sqrt[4]{q^{63}}}{1-q^7} + \ldots = \sum (-1)^m \frac{q^{\frac{1}{4}(2m+1)(2m+3)}}{1-q^{2m+1}},$$

$$B = \frac{\sqrt[4]{q^3}}{1+q} + \frac{\sqrt[4]{q^{15}}}{1+q^3} + \frac{\sqrt[4]{q^{35}}}{1+q^5} + \frac{\sqrt[4]{q^{63}}}{1+q^7} + \ldots = \sum \frac{q^{\frac{1}{4}(2m+1)(2m+3)}}{1+q^{2m+1}},$$

$$C = \frac{1}{4} + \frac{q^2}{1+q^2} + \frac{q^6}{1+q^4} + \frac{q^{12}}{1+q^6} + \ldots = \frac{1}{4} + \sum \frac{q^{m^2+m}}{1+q^{2m}},$$

ou encore :

$$\sqrt[4]{q}\,A = \sum_{m=1} (-1)^{m+1} \frac{q^{m^2}}{1-q^{2m-1}},$$

$$\sqrt[4]{q}\,B = \sum_{m=1} \frac{q^{m^2}}{1+q^{2m-1}},$$

$$\sqrt[4]{q}\,C = \frac{1}{4}\sqrt[4]{q} + \sum_{m=1} \frac{q^{\frac{1}{4}(2m+1)^2}}{1+q^{2m}}:$$

elles donnent :

$$\frac{k\mathrm{K}}{2\pi} \sin \operatorname{am} z\, \mathrm{H}(z) = \frac{\sqrt{k}\,\mathrm{K}}{2\pi} \frac{\mathrm{H}^2(z)}{\Theta(z)} = \mathrm{A}\,\Theta(z) - \Theta(o)\mathrm{Z},$$

$$\frac{k'\mathrm{K}}{2\pi} \cos \operatorname{am} z\, \mathrm{H}_1(z) = \frac{\sqrt{kk'}\,\mathrm{K}}{2\pi} \frac{\mathrm{H}_1^2(z)}{\Theta(z)} = \mathrm{B}\,\Theta(z) - \Theta_1(o)\mathrm{Z},$$

$$\frac{\mathrm{K}}{2\pi} \Delta \operatorname{am} z\, \Theta_1(z) = \frac{\sqrt{k'}\,\mathrm{K}}{2\pi} \frac{\Theta_1^2(z)}{\Theta(z)} = \mathrm{C}\,\Theta(z) - \mathrm{H}_1(o)\mathrm{Z}.$$

» Ce second groupe de fonctions se distingue essentiellement du premier par la présence des fonctions complètes A, B, C, dont voici le caractère arithmétique. Désignant par n les nombres entiers $\equiv 3 \bmod 4$, on aura d'abord

$$\mathrm{A} = \sum a_n q^{\frac{1}{4}n}, \qquad \mathrm{B} = \sum (-1)^{\frac{n-3}{4}} a_n q^{\frac{1}{4}n},$$

le coefficient a_n étant la somme des valeurs de l'expression $(-1)^{\frac{d-1}{2}}$, en prenant pour d tous les diviseurs de n inférieurs à sa racine carrée ;

nous le représenterons ainsi :

$$a_n = \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}}.$$

» Faisons ensuite, en supposant n pair,

$$C = \frac{1}{4} + \sum (-1)^{\frac{n}{2}} c_n q^n.$$

» Si l'on désigne par d les diviseurs impairs de n inférieurs à sa racine carrée et par d' les diviseurs impairs plus grands que sa racine carrée, on aura

$$c_n = \sum (-1)^{\frac{d'-1}{2}} - \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}}.$$

» Voici donc deux nouveaux exemples de ces parties de fonctions que M. Kronecker a introduites en arithmétique et qui s'offrent sous un point de vue si différent dans les recherches délicates et profondes de ce savant géomètre sur les modules qui se rapportent à la multiplication complexe. Par cette nouvelle origine, elles se trouvent rattachées de la manière la plus immédiate à l'ensemble de vos travaux sur les fonctions numériques, et peut-être même ne sera-t-il pas impossible de définir par des équations différentielles les fonctions qui leur donnent naissance en partant de ces expressions :

$$2\pi A = \sqrt{k} \int_0^K \frac{H^2(z)}{\Theta(z)} dz, \quad 2\pi B = \sqrt{kk'} \int_0^K \frac{H_1^2(z)}{\Theta(z)} dz, \quad 2\pi C = \sqrt{k'} \int_0^K \frac{\Theta_1^2(z)}{\Theta(z)} dz.$$

» Je remarque encore, comme un nouveau trait de la distinction à établir entre les fonctions (1) et (2), que la quantité $Z(x)$ qui donne A et B en y faisant $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$, conduit pour $x = \frac{\pi}{4}$ à cette relation :

$$\sqrt[4]{q}\, Z\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sum_0^\infty {}_n (-1)^n \frac{q^{4(n+1)^2}}{1 + q^{8n+6}} - \sum_0^\infty {}_n \frac{q^{4(n+1)^2-2}}{1 + q^{8n+2}}$$

dont le développement a la forme

$$Z\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sum (-1)^{\frac{n+1}{8}} k_n q^{\frac{n}{4}}.$$

Le nombre n est $\equiv -1$ mod. 8; k_n est la somme des quantités $\left(\frac{-2}{d}\right) = (-1)^{\frac{d^2-1}{8}+\frac{d-1}{2}}$ pour tous les diviseurs de n inférieurs à sa racine carrée, c'est-à-dire encore une partie de fonction. Au contraire, dans ces cas et d'autres analogues, les développements des expressions (1) ne conduisent jamais qu'à des fonctions numériques complètes.

» Après ces deux groupes de fonctions, la suivante :

$$\frac{\mathrm{H}^2(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)},$$

pourra servir d'exemple du cas le plus simple qui s'offre ensuite dans la série des expressions obtenues en multipliant par la première puissance d'une des quantités Θ, une fonction doublement périodique. Elle donne, en désignant par $\mathcal{A}$ une constante, ce développement

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{K}}{2\pi}\sqrt{\frac{2k\mathrm{K}}{\pi}}\,\frac{\mathrm{H}^2(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)} \\
&= \mathcal{A}\Theta_1(z) - \cos 2xq\sqrt[4]{q^{-1}} \\
&\qquad - \cos 4xq^4\left(\sqrt[4]{q^{-1}} + 3\sqrt[4]{q^{-9}}\right) \\
&\qquad - \cos 6xq^9\left(\sqrt[4]{q^{-1}} + 3\sqrt[4]{q^{-9}} + 5\sqrt[4]{q^{-25}}\right) \\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad - \cos 2nxq^{n^2}\left(\sqrt[4]{q^{-1}} + 3\sqrt[4]{q^{-9}} + \ldots + (2n-1)\sqrt[4]{q^{-(2n-1)^2}}\right). \\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

» On doit donc encore regarder $\mathcal{A}$ comme une fonction complète, dont la valeur sous une forme analytique toute semblable à celle de A, B, C, sera

$$2\pi\mathcal{A} = \sqrt{\frac{2k\mathrm{K}}{\pi}}\int_0^{\mathrm{K}} \frac{\mathrm{H}^2(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)}\,dz.$$

» Mais tandis que A, B, C se rapportent sous le point de vue arithmétique aux fonctions des diviseurs des nombres, $\mathcal{A}$, comme vous allez voir, conduit aux fonctions qui expriment le nombre des classes quadratiques pour toutes les formes de déterminant $-n$, n étant $\equiv 3$ mod. 4.

» Pour le démontrer, je regarde l'expression $\frac{H^2(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)}$ comme le produit de ces deux facteurs : $\frac{H(z)\Theta_1(z)}{\Theta(z)}$ et $\frac{H(z)}{\Theta(z)} = \sqrt{k}\sin\operatorname{am} z$; or nous avons trouvé :

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{K}{2\pi}}\,\frac{H(z)\Theta_1(z)}{\Theta(z)} &= \sin x\sqrt[4]{q}\\ &+ \sin 3x\sqrt[4]{q^9}(1+2q^{-1})\\ &+ \sin 5x\sqrt[4]{q^{25}}(1+2q^{-1}+2q^{-4})\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= \sum\sin(2n+1)x\sqrt[4]{q^{(2n+1)^2}}\times\sum q^{-a^2},\end{aligned}$$

le nombre a devant prendre les valeurs

$$a = 0,\quad \pm 1,\quad \pm 2,\ldots,\quad \pm n,$$

et l'on a

$$\frac{\sqrt{k}K}{\pi}\,\frac{H(z)}{\Theta(z)} = 2\sin x\frac{\sqrt{q}}{1-q} + 2\sin 3x\frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3} + 2\sin 5x\frac{\sqrt{q^5}}{1-q^5} + \text{etc.},$$

de sorte qu'en multipliant membre à membre les deux séries, on devra précisément retomber sur le développement ci-dessus de

$$\frac{K}{2\pi}\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}\,\frac{H^2(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)}.$$

On trouve ainsi, en se bornant au terme constant :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \sum\frac{\sqrt{q^{2n+1}}}{1-q^{2n+1}}\sqrt[4]{q^{(2n+1)^2}}(1+2q^{-1}+2q^{-4}+\ldots+2q^{-n^2}),\\ &= \sum\frac{\sqrt{q^{2n+1}}}{1-q^{2n+1}}\,q^{\frac{(2n+1)^2}{4}-a^2},\end{aligned}$$

expression qu'il est aisé de développer suivant les puissances de q en remplaçant la fraction $\frac{\sqrt{q^{2n+1}}}{1-q^{2n+1}}$ par

$$\sqrt{q^{2n+1}}(1+q^{2n+1}+q^{2(2n+1)}+\text{etc.}) = \sum q^{\frac{2n+1}{2}+(2n+1)b}.$$

b désignant tous les nombres entiers de zéro à l'infini. En posant

$$N = (2n+1)(2n+4b+3) - 4a^2,$$

et désignant par $F(N)$ le nombre de fois que cette équation aura lieu pour une valeur de N, en supposant n et b entiers et positifs, a compris dans la série :

$$0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \ldots, \quad \pm n,$$

on aura évidemment

$$\mathcal{A} = \sum F(N) q^{\frac{1}{4}N}.$$

» Ceci posé, j'observe que la valeur de N représentera tous les nombres entiers $\equiv 3 \bmod 4$, et qu'on peut l'écrire de ces trois manières, en faisant correspondre à chacune d'elles une forme quadratique de déterminant $-N$, savoir :

$$\text{I.} \begin{cases} N = (2n+1)(2n+4b+3) - 4a^2, \\ (2n+1, \quad 2a, \quad 2n+4b+3), \end{cases}$$

$$\text{II.} \begin{cases} N = (2n+1)(4n+4b+4-4a) - (2n+1-2a)^2, \\ (2n+1, \quad 2n+1-2a, \quad 4n+4b+4-4a), \end{cases}$$

$$\text{III.} \begin{cases} N = (2n+1)(4n+4b+4+4a) - (2n+1+2a)^2, \\ (2n+1, \quad 2n+1+2a, \quad 4n+4b+4+4a). \end{cases}$$

» En employant la première pour les valeurs de a inférieures, abstraction faite du signe à la limite $\frac{2n+1}{4}$, la forme quadratique correspondante représentera toutes les formes réduites de déterminant $-N$, où le coefficient moyen est pair, et qui sont, par conséquent, de l'ordre proprement primitif, chacune d'elles étant prise une seule fois. Les classes ambiguës seront renfermées dans ce premier groupe et correspondront à $a = 0$ (Gauss, *Rech. arith.*, p. 288). Pour les valeurs de a qui vont de la limite inférieure $\frac{2n+1}{4}$ à la limite supérieure n, nous emploierons la seconde expression en leur attribuant le signe +

et la troisième en leur donnant le signe $-$. On aura ainsi, deux fois répétée, une série de formes (p, q, r) de déterminant $-$N où se trouvent satisfaites les conditions :

$$q > 0, \quad 2q < p, \quad 2q < r.$$

» En permutant p et r lorsqu'on aura $p > r$, cette série donnera toutes les formes réduites de déterminant $-$ N où le coefficient moyen est impair et positif, l'un des coefficients extrêmes étant aussi un nombre impair. On doublera leur nombre si on y joint les formes opposées $(p, -q, r)$ qui en sont distinctes et appartiennent à des classes différentes, puisqu'il n'existe point de formes ambiguës ayant un coefficient moyen impair. Par conséquent, à la totalité des deux séries de valeurs positives et négatives de a correspond exactement la totalité des formes réduites, proprement primitives du déterminant $-$ N. Ainsi la fonction $F(\mathrm{N})$ qui s'est offerte d'abord comme la somme des nombres de solutions des équations I, II et III, reçoit cette nouvelle et importante signification arithmétique de représenter le nombre des classes proprement primitives de déterminant $-$ N. L'équation

$$\mathcal{A} = \sum F(\mathrm{N}) q^{\frac{1}{4}\mathrm{N}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k\mathrm{K}}{\pi}} \int_0^{\mathrm{K}} \frac{\mathrm{H}^2(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)}\, dz,$$

envisagée sous ce nouveau point de vue, montre l'importance de la fonction complète de l'expression $\frac{\mathrm{H}^2(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)}$ et va donner très-aisément l'un des théorèmes de M. Kronecker.

» Je fais pour cela $x = 0$ dans l'équation

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{K}}{2\pi}\sqrt{\frac{2k\mathrm{K}}{\pi}}\frac{\mathrm{H}^2(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)} = \mathcal{A}\Theta_1(z) &- \cos 2xq\sqrt[4]{q^{-1}} \\ &- \cos 4xq^4\left(\sqrt[4]{q^{-1}} + 3\sqrt[4]{q^{-9}}\right) \\ &- \cos 6xq^9\left(\sqrt[4]{q^{-1}} + 3\sqrt[4]{q^{-9}} + 5\sqrt[4]{q^{-25}}\right) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Le premier membre s'annulant, on voit immédiatement que le second membre, ordonné suivant les puissances de q, donne une série dont le terme général est

$$q^{\frac{1}{4}\mathrm{N}}\,\frac{\sum d' - \sum d}{2}.$$

L'exposant N est $\equiv 3 \bmod 4$, $\sum d'$ représente la somme des diviseurs de N supérieurs à sa racine carrée, et $\sum d$ la somme des diviseurs qui lui sont inférieurs. Le coefficient de $q^{\frac{1}{4}\mathrm{N}}$ est donc précisément la fonction désignée par $\Psi(\mathrm{N})$ et définie dans le Mémoire de M. Kronecker au moyen de la relation

$$\sum \Psi(n) q^n = \sum \frac{q^{n^2+n}}{(1-q^n)^2}.$$

En employant cette notation, on pourra donc écrire

$$\Theta_1(0) \sum F(\mathrm{N}) q^{\frac{1}{4}\mathrm{N}} = \frac{1}{2} \sum \Psi(\mathrm{N}) q^{\frac{1}{4}\mathrm{N}},$$

et en égalant dans les deux membres les coefficients d'une même puissance de q, on trouvera

$$F(\mathrm{N}) + 2F(\mathrm{N}-2^2) + 2F(\mathrm{N}-4^2) + \ldots + 2F(\mathrm{N}-4k^2) = \frac{1}{2}\Psi(\mathrm{N}).$$

Or cette relation est donnée en ajoutant membre à membre les équations (V) et (VI) du Mémoire de M. Kronecker, et observant que la fonction $\varphi(m)$ qui y figure s'évanouit pour $m = \mathrm{N} \equiv 3 \bmod 4$.

» D'autres théorèmes résultent d'une détermination différente de $\mathcal{A}$. En premier lieu, je fais le produit des deux séries

$$\Theta_1(z) = 1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \ldots,$$

$$\frac{k\mathrm{K}^2}{2\pi^2}\,\frac{\mathrm{H}^2(z)}{\Theta^2(z)} = \sum \frac{nq^n}{1-q^{2n}} - \cos 2x\,\frac{q}{1-q^2} - \cos 4x\,\frac{2q^2}{1-q^4}, \ldots,$$

qui donne pour le terme constant dans le second membre l'expression

$$\sum \frac{nq^n}{1-q^{2n}} - \sum \frac{nq^{n^2+n}}{1-q^{2n}}.$$

» Ce même terme s'obtenant aussi en intégrant entre les limites zéro et K le premier membre, on aura

$$\frac{k\mathrm{K}}{2\pi^2}\int_0^{\mathrm{K}} \frac{\mathrm{H}^2(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)}dz = \sum \frac{nq^n}{1-q^{2n}} - \sum \frac{nq^{n^2+n}}{1-q^{2n}},$$

et par conséquent

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2k\mathrm{K}}{\pi}}\,\mathfrak{A} = \sum \frac{nq^n}{1-q^{2n}} - \sum \frac{nq^{n^2+n}}{1-q^{2n}}.$$

Soit

$$\sum \frac{nq^n}{1-q^{2n}} = \sum \Phi_1(n)q^n,$$

$$\sum \frac{nq^{n^2+n}}{1-q^{2n}} = \sum \Psi_1(n)q^n,$$

$\Phi_1(n)$ représentera la somme de tous les diviseurs de n dont les conjugués sont impairs et $\Psi_1(n)$ la somme de tous les diviseurs moindres que $\sqrt{n}$ et qui ne sont pas de même parité que leurs conjugués. Ainsi pour n impair, $\Phi_1(n)$ coïncidera avec la somme de tous les diviseurs que M. Kronecker nomme $\Phi(n)$, et $\Psi_1(n)$ sera nul. Cela étant, l'équation

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2k\mathrm{K}}{\pi}}\sum F(\mathrm{N})\,q^{\frac{1}{4}\mathrm{N}} = \sum [\Phi_1(n) - \Psi_1(n)]\,q^n$$

donnera ce nouveau théorème où n est quelconque :

$$F(4n-1) + F(4n-3^2) + \ldots + F[4n-(2a+1)^2] = \Phi_1(n) - \Psi_1(n).$$

» Je considère en second lieu le produit des développements de $\mathrm{H}(z)$ et de la dérivée de cos am$z$, à savoir :

$$\mathrm{H}(z) = 2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - \ldots,$$

$$\frac{\sqrt{kk'}\,\mathrm{K}^2}{\pi^2}\,\frac{\mathrm{H}(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)} = \frac{\sqrt{q}}{1+q}\sin x + \frac{3\sqrt{q^3}}{1+q^3}\sin 3x + \frac{5\sqrt{q^5}}{1+q^5}\sin 5x + \ldots.$$

En opérant de même on trouvera

$$\frac{\sqrt{kk'}\mathrm{K}}{\pi^2}\int_0^{\mathrm{K}}\frac{\mathrm{H}^2(z)\,\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)}dz=\sqrt{\frac{2k'\mathrm{K}}{\pi}}\,\mathcal{A}=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)\,q^{\frac{1}{4}(2n+1)(2n+3)}}{1-q^{2n+1}},$$

et si l'on pose

$$\sum(-1)^n\frac{(2n+1)\,q^{\frac{1}{4}(2n+1)(2n+3)}}{1-q^{2n+1}}=\sum(-1)^{\frac{\mathrm{N}-3}{4}}\,\Psi_2(\mathrm{N})\,q^{\frac{1}{4}\mathrm{N}},$$

N représentera tous les nombres entiers $\equiv 3 \bmod 4$ et $\Psi_2(\mathrm{N})$ la somme des diviseurs de N inférieurs à la racine carrée. L'équation

$$\sqrt{\frac{2k'\mathrm{K}}{\pi}}\sum F(\mathrm{N})q^{\frac{1}{4}\mathrm{N}}=\sum(-1)^{\frac{\mathrm{N}-3}{4}}\,\Psi_2(\mathrm{N})q^{\frac{1}{4}\mathrm{N}}$$

donnera par suite ce troisième théorème

$$F(\mathrm{N})-2F(\mathrm{N}-2^2)+2F(\mathrm{N}-4^2)-\ldots+2(-1)^kF(\mathrm{N}-4k^2)$$
$$=(-1)^{\frac{\mathrm{N}-3}{4}}\,\Psi_2(\mathrm{N})=(-1)^{\frac{\mathrm{N}-3}{4}}\,\frac{\Phi(\mathrm{N})-\Psi(\mathrm{N})}{2}.$$

» Le temps me manque en ce moment pour donner le système complet de toutes les relations de cette nature, et m'occuper des autres théorèmes de M. Kronecker et de ceux où le P. Joubert a introduit des fonctions numériques distinctes des précédentes. J'aurais surtout à retrouver cette relation

$$\sum\mathrm{F}(n)q^n=\frac{q^{\frac{1}{4}}}{\mathrm{H}(\mathrm{K})}\sum\frac{q^{n^2+3n+1}}{(1-q^{2n+1})^2},$$

qui sans doute doit résulter de combinaisons où entre la fonction $\frac{\Theta'^2(z)}{\Theta^2(z)}$. M. Kronecker, en la donnant comme l'expression analytique d'un de ses théorèmes, avait bien évidemment pressenti la signification qu'elle recevrait dans la théorie des fonctions elliptiques, et à cet égard je ne puis trop admirer la pénétration dont il a donné la preuve.

» Vous m'avez aussi plusieurs fois parlé de la décomposition des nombres en trois carrés ; dans le cas où il s'agit des nombres $\equiv 3 \bmod 8$, et où les carrés sont tous impairs, voici comment on trouve le nombre des décompositions.

» Soit $\mathcal{A}_1$ ce que devient $\mathcal{A}$ par le changement de q en $-q$; en posant pour un instant $\varepsilon = \sqrt[4]{-1}$, on aura

$$\frac{\mathcal{A} - \varepsilon\mathcal{A}_1}{2} = \sum_{0}^{\infty}{}_n F(8n+3) q^{\frac{8n+3}{4}}.$$

Or on obtient aisément la valeur du premier membre. Introduisons dans l'intégrale x au lieu de $z = \frac{2Kx}{\pi}$, ce qui donnera

$$2\pi\mathcal{A} = \frac{2K}{\pi}\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{H^2(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)}\,dx.$$

Comme en changeant q en $-q$, les quantités

$$\frac{2K}{\pi}, \quad \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}, \quad \Theta(z), \quad H(z), \quad \Theta_1(z)$$

deviennent

$$\frac{2k'K}{\pi}, \quad \varepsilon\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}, \quad \Theta_1(z), \quad \varepsilon H(z), \quad \Theta(z),$$

on aura

$$2\pi\mathcal{A}_1 = e^3\,\frac{2k'K}{\pi}\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{H^2(z)\Theta(z)}{\Theta_1^2(z)}\,dx.$$

Mais par la substitution de $\frac{\pi}{2} - x$ à x, l'intégrale se change en celle-ci : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{H_1^2(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)}\,dx$, d'où résulte

$$2\pi\mathcal{A}_1 = \varepsilon^3\,\frac{2k'K}{\pi}\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{H_1^2(z)\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)}\,dx,$$

et par suite, à cause de $\varepsilon^4 = -1$,

$$2\pi(\mathcal{A} - \varepsilon\mathcal{A}_1) = \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\sqrt{\frac{2k\mathrm{K}}{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[\mathrm{H}^2(z) + k'\,\mathrm{H}_1^2(z)]\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)}\,dx.$$

Or on a

$$\mathrm{H}^2(z) + k'\mathrm{H}_1^2(z) = k\Theta^2(z),$$

il s'ensuit que

$$2\pi(\mathcal{A} - \varepsilon\mathcal{A}_1) = \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\sqrt{\frac{2k\mathrm{K}}{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} k\Theta_1(z)\,dx = \frac{\pi}{2}\sqrt{\left(\frac{2k\mathrm{K}}{\pi}\right)^3}$$

et on en conclut la relation

$$\frac{\mathcal{A} - \varepsilon\mathcal{A}_1}{2} = \sum F(8n+3)q^{\frac{8n+3}{4}} = (\sqrt[4]{q} + \sqrt[4]{q^9} + \sqrt[4]{q^{25}} + \ldots)^3,$$

qui est l'expression de ce théorème arithmétique que le nombre des représentations d'un entier $\mathrm{N} \equiv 3$ mod. 8, par la forme $x^2 + y^2 + z^2$, en supposant x, y, z de même signe, est précisément égal au nombre des classes quadratiques du déterminant $-\mathrm{N}$ pour lesquelles un au moins des coefficients extrêmes est impair.

» Quant au cube de $\sqrt{\frac{2\mathrm{K}}{\pi}}$ ou $\Theta_1(0)$, il est donné sous une forme singulière et dont je n'ai pu suffisamment approfondir la signification en faisant $x = 0$ dans l'équation

$$\frac{\mathrm{K}}{2\pi}\Delta\,\mathrm{am}\,z\Theta_1(z) = \mathrm{C}\Theta(z) - \mathrm{H}_1(0)\mathrm{Z}.$$

On obtient ainsi immédiatement

$$\sqrt{\left(\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\right)^3} = \Theta(0)\left(1 + 4\sum\frac{q^{m^2+m}}{1+q^{2m}}\right) - 4\,\mathrm{H}_1(0)\sum(-1)^m\frac{q^{\frac{1}{4}(2m+1)(2m+3)}}{1-q^{2m+1}}.$$

Je laisse donc de côté ce résultat et d'autres du même genre pour vous indiquer, en terminant, de quelle manière je conçois la liaison de la théorie des fonctions elliptiques, dans ses applications à l'arithmétique, avec vos recherches générales sur les fonctions numériques.

» Je considère pour cela les développements suivant les puissances de q, de $\sin\operatorname{am} z$, $\cos\operatorname{am} z$, $\Delta\operatorname{am} z$, et je remarque qu'en posant

$$\frac{k\mathrm{K}}{2\pi}\sin\operatorname{am} z = \sum \mathrm{R}_n q^{\frac{1}{2}n},$$
$$\frac{k\mathrm{K}}{2\pi}\cos\operatorname{am} z = \sum (-1)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{S}_n q^{\frac{1}{2}n},$$
$$\frac{\mathrm{K}}{2\pi}\Delta\operatorname{am} z = 1 + \sum \mathrm{T}_n q^n,$$

on a

$$\mathrm{R}_n = \sum \sin dx,$$
$$\mathrm{S}_n = \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} \cos dx,$$

les sommes s'étendant à tous les diviseurs d du nombre impair n; et à l'égard de la fonction T, si l'on pose $n = 2^\nu \mathrm{N}$, N étant impair, et qu'on désigne par d les diviseurs de N, on aura semblablement

$$\mathrm{T}_n = \sum (-1)^{\frac{\mathrm{N}-d}{2}} \cos 2^{\nu+1} dx.$$

On retrouve donc ainsi les fonctions numériques qui se sont si souvent présentées dans vos recherches.

» Soit encore

$$\sqrt{\frac{\mathrm{K}}{2\pi}}\,\frac{\mathrm{H}(z)\Theta_1(z)}{\Theta(z)} = \sum \mathrm{U}_n q^{\frac{1}{4}n},$$
$$\sqrt{\frac{k'\mathrm{K}}{2\pi}}\,\frac{\mathrm{H}_1(z)\Theta_1(z)}{\Theta(z)} = \sum \mathrm{V}_n q^{\frac{1}{4}n},$$
$$\sqrt{\frac{k\mathrm{K}}{2\pi}}\,\frac{\mathrm{H}(z)\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)} = \sum \mathrm{W}_n q^{\frac{1}{4}n},$$

et désignons par d et d' deux diviseurs conjugués, dont le produit soit n, on aura

$$\mathrm{U}_n = \frac{1}{2}\sum \sin\frac{d+d'}{2}x, \quad \mathrm{V}_n = \frac{1}{2}\sum (-1)^{\frac{d+1}{2}} \cos\frac{d+d'}{2}x,$$

les sommes s'étendant à tous les diviseurs du nombre n qui est $\equiv 1$ mod 4, et en dernier lieu

$$W_n = \sum \sin \frac{d+d'}{2} x,$$

n étant $\equiv -1$ mod. 4. On reconnaît ainsi, au point de vue arithmétique, l'analogie des nouvelles fonctions avec les anciennes, et en même temps leur différence qui consiste en ce qu'un diviseur d est remplacé par $\frac{d+d'}{2}$. On ne voit point encore d'ailleurs s'offrir de parties de fonctions, mais elles se présentent en faisant

$$Z(x) = \sum \zeta_n q^{\frac{1}{4}n}.$$

Dans ce cas n est $\equiv -1$ mod. 4, et en supposant $d < d'$ on trouve

$$\zeta_n = 2 \sum (-1)^{\frac{d+1}{2}} \cos \frac{d+d'}{2} x,$$

la somme ne comprenant que les diviseurs d, qui sont inférieurs à $\sqrt{n}$.

» J'espère, mon cher confrère, que vous n'oublierez pas m'avoir aussi promis une Lettre arithmétique qui soulève un peu le voile dont vous vous êtes jusqu'à présent recouvert. Si vous le jugez à propos, j'aimerais bien que celle-ci fût publiée dans votre Journal, où je la ferai suivre de plusieurs articles sur divers sujets qui s'y rattachent et qu'en ce moment je suis obligé d'ajourner. »